E.N.S. de Rennes
U.F.R. de mathématiques de Rennes

Séminaire de M2

Contrôlabilité de l'équation de la chaleur par la méthode des moments

Théo Gherdaoui

Encadré par : Frédéric Marbach

Année scolaire 2021-2022

Sommaire

1 Étude des systèmes linéaires de dimension finie **2**
1.1 Contexte et définitions 2
1.2 Théorème de Kalman 2

2 Équation de la chaleur : premières approches **4**
2.1 Cadre 4
2.2 Point de vue spectral 4
2.3 Caractère bien posé 4
2.4 Problème de moments 5

3 Construction d'une famille biorthogonale **6**
3.1 Construction d'une famille de fonctions $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $\Phi_n(\lambda_k) = \delta_{n,k}$ 6
3.2 Construction d'une fonction entière à croissance modérée 8

4 Contrôlabilité de l'équation de la chaleur **10**

Introduction

Ce document a pour but de synthétiser l'étude que j'ai menée dans le cadre de mon séminaire de M2. L'objectif final est de s'intéresser à la contrôlabilité de l'équation de la chaleur via une commande scalaire.

En première approche, on peut penser la contrôlabilité comme la question de la possibilité d'ajuster un paramètre d'une équation différentielle ordinaire ou d'une équation aux dérivées partielles, permettant à la solution de cette dernière d'atteindre une cible préalablement définie.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au cas des systèmes linéaires, en dimension finie. C'est un cadre simple qui permet une initiation à la notion de la contrôlabilité de manière agréable. Cette situation est totalement balisée, et pour laquelle nous possédons des conditions nécessaires et suffisantes. Dans un deuxième temps, nous allons centrer cette étude sur la question de la contrôlabilité de l'équation de la chaleur. La stratégie consiste en la reformulation de cette dernière en un problème de moments, qui pourra être résolu sous de bonnes hypothèses. La résolution du problème de moments nécessitera la construction d'une famille biorthogonale à une famille d'exponentielles, qui fera appel à des outils d'analyse complexe.

Enfin, je tiens tout particulièrement à remercier Frédéric Marbach qui s'est montré très disponible, investi, et qui a su m'accorder du temps, dans la bonne humeur.

1 Étude des systèmes linéaires de dimension finie

1.1 Contexte et définitions

Soit $T_0 < T_1$, et $n, m \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse ici à la contrôlabilité de systèmes linéaires sous la forme :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \text{ pour } t \in (T_0, T_1) \\ x(T_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La variable x est appelé l'**état** du système, et la variable u le **contrôle**, dans $L^1((T_0, T_1), \mathbb{R}^m)$.

On travaille ici avec une notion de solution au sens de la formulation intégrale de l'équation. Plus précisement :

Définition 1 (*Solutions*)

Soient $b \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Une fonction $x : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}^n$ est une solution du système

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + b \text{ pour } t \in (T_0, T_1) \\ x(T_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

si $x \in \mathcal{C}^0([T_0, T_1], \mathbb{R}^n)$, et,

$$\forall t \in [T_0, T_1], \quad x(t) = x(T_0) + \int_{T_0}^{t} (Ax(s) + b)\,\mathrm{d}s.$$

Le théorème de Cauchy-Lispchitz assure l'existence et l'unicité de la solution globale du système linéaire (2) proposé précédemment.
On formalise maintenant la notion de contrôlabilité :

Définition 2 (*Contrôlabilité*)

Le système (1) est dit contrôlable entre T_0 et T_1 sur $\mathbb{R}^n$ si $\forall (x_0, x_1) \in (\mathbb{R}^n)^2$, il existe $u \in L^1((T_0, T_1), \mathbb{R}^m)$ telle que **la** *solution x de (1) vérifie $x(T_1) = x_1$.*

Remarque. *On appelle x_1 l'état cible.*

1.2 Théorème de Kalman

On introduit la matrice **grammienne** du système. Elle jouera un rôle fondamental dans l'étude de la contrôlabilité du système :

Définition 3 (*Matrice grammienne*)

On appelle matrice grammienne associée au système $x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, $t \in (T_0, T_1)$, la matrice :

$$\mathfrak{G} = \int_{T_0}^{T_1} R(T_1, s)B(s)^t B(s)^t R(T_1, s)\mathrm{d}s,$$

où $R(\cdot, \cdot)$ est la résolvante du système (voir le rappel qui suit).

Rappel. *La résolvante est l'application $R : (t_1, t_2) \to [T_0, T_1]^2 \mapsto R(t_1, t_2) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, vérifiant $\forall t_2 \in [T_0, T_1]$, $R(\cdot, t_2)$ est la solution de $M'(t) = A(t)M(t)$ avec condition initiale $M(t_2) = I_n$.*

Remarque. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ${}^t x \mathfrak{G} x = \displaystyle\int_{T_0}^{T_1} |{}^t B(s)^t R(T_1, s)x|^2 \mathrm{d}s$, *donc $\mathfrak{G} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.*

Theorème 1 (*Kalman*)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :
(1) Le système (à coefficients constants) $x' = Ax + Bu$ est contrôlable entre T_0 et T_1.
(2) La matrice grammienne est inversible.
(3) Vect$(A^k Bu,\ u \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq k \leq n-1) = \mathbb{R}^n$.

Remarque. — *la troisième condition est appelée condition de Kalman.*
- — *la condition faisant intervenir la matrice grammienne perdure dans le cas d'un système à coefficients variables.*
- — *on déduit de (3) que la contrôlabilité d'un système linéaire à coefficients constants ne dépend pas de l'intervalle.*

Démonstration : On remarque que dans ce cas, la matrice résolvante est $R(t_1, t_2) = e^{A(t_1 - t_2)}$.
(2) $\Rightarrow$ (1) : on introduit le contrôle $u(t) = {}^tBe^{{}^tA(T_1-t)}\mathfrak{G}^{-1}\left(x_1 - e^{A(T_1-T_0)}x_0\right)$. La formule de Duhamel permet de conclure.
(1) $\Rightarrow$ (2) : on raisonne par contraposée : soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\mathfrak{G}y = 0$, alors pour tout $t \in (T_0, T_1)$, ${}^tye^{A(T_1-t)}B = 0$. Ainsi, pout tout $u \in L^1((T_0,T_1), \mathbb{R}^m)$, la solution du problème de Cauchy vérifie ${}^tyx(T_1) = 0$. Il n'existe donc pas de contrôle qui amène la solution à l'état cible y.
(3) $\Rightarrow$ (2) : soit $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\mathfrak{G}y = 0$. De la même façon, $k(t) = {}^tye^{A(T_1-t)}B$ est nulle. Donc, $\forall l \in \mathbb{N},\ k^{(l)}(T_1) = 0$. La condition de Kalman n'est pas vérifiée.
(2) $\Rightarrow$ (3) : on montre que l'on peut remonter les calculs précédents, pour cela, on utilise le théorème de Cayley-Hamilton et l'analyticité de k. ■

Remarque. *Faisons le lien entre la condition de Kalman et un problème de moments fini. On se place pour cela dans le cadre d'un contrôle scalaire ($m = 1$), et $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, diagonalisable. La formule de Duhamel fournit : $\forall t,\ x(t) = e^{A(t-T_0)}x_0 + \int_{T_0}^{t} e^{A(t-s)}Bu(s)\mathrm{d}s$. Ainsi, $\forall x_1 \in \mathbb{R}^n$, $\forall T_1$, on a :*

$$x(T_1) = x_1 \Leftrightarrow \int_{T_0}^{T_1} e^{A(T_1-s)}Bu(s)\mathrm{d}s = x_1 - e^{A(T_1-T_0)}x_0.$$

On introduit une base $\mathcal{B}$ de diagonalisation de A et, en écrivant $B = (b_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, $x_{0/1} = ({x_{0/1}}_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ les coordonnées associées dans cette base. Alors :

$$x(T_1) = x_1 \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ b_i \int_{T_0}^{T_1} u(s)e^{\lambda_i(T_1-s)}\mathrm{d}s = x_{1i} - e^{\lambda_i(T_1-T_0)}x_{0i}.$$

Ceci est équivalent au fait que les $(\lambda_i)_i$ soient deux à deux distincts, et les b_i soient non nuls (on construit alors une famille biorthogonale à $(t \mapsto e^{-\lambda_j t})_j$). Cette condition est bien équivalente à la condition de Kalman. En effet :

$$\det(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & \lambda_n b_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}b_n \end{vmatrix} = b_1 \ldots b_n \prod_{1\leq i<j\leq n}(\lambda_j - \lambda_i).$$

On s'intéresse maintenant à la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur en dimension 1. On va voir que cette dernière se ramène à la résolution d'un problème de moments infini. Afin de résoudre le problème des moments, on va devoir faire intervenir des outils d'analyse complexe, notamment le théorème de Paley-Wiener.

2 Équation de la chaleur : premières approches

2.1 Cadre

Soit $T > 0$, soit $\psi \in L^2(0,1)$. On souhaite résoudre l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) = \partial_x^2 v(t,x) & \text{pour } t \in (0,T),\ x \in (0,1), \\ v(t,0) = u(t) & \text{pour } t \in (0,T), \\ v(t,1) = 0 & \text{pour } t \in (0,T), \\ v(0,x) = \psi(x) & \text{pour } x \in (0,1). \end{cases} \tag{3}$$

Définition 4 (*Contrôlabilité à zéro*)

Le système (3) est contrôlable à zéro s'il existe $u \in \mathcal{C}^1([0,T])$ telle que la solution v de (3) vérifie : $\forall x \in (0,1),\ v(T,x) = 0$.

Le but est de démontrer que le système est contrôlable à zéro. Ici, la contrôlabilité est faite en temps arbitraire. Le contrôle est donc la quantité u. Physiquement, on est capable d'intervenir pour tout temps, sur une source de chaleur (chauffage/climatiseur) placée à une extrémité d'un segment dont on étudie l'évolution de la chaleur.

2.2 Point de vue spectral

On s'intéresse à l'opérateur $A = -\Delta$ ayant pour domaine $D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$. On remarque que la résolution de $A\phi = \lambda\phi$ avec ϕ non nulle impose nécessairement que $\lambda = (n\pi)^2$ où $n \in \mathbb{N}^*$. C'est de plus bien une valeur propre ayant $\varphi_n : x \mapsto \sqrt{2}\sin(n\pi x)$ comme vecteur propre. Cette normalisation permet de faire de la famille des $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une famille orthonormée pour le produit scalaire usuel $L^2(0,1)$. Elle forme même une base hilbertienne de cet espace.

Remarque. *La méthode qui va suivre s'adapte à tout opérateur autoadjoint à résolvante compacte.*

2.3 Caractère bien posé

Theorème 2

$\forall \psi \in L^2(0,1)$, $\forall u \in \mathcal{C}^1([0,T])$, *l'équation (3) est bien posée (i.e. admet une unique solution* $v \in \mathcal{C}^0([0,T])$*).*

Démonstration : Montrons que l'équation (3) est bien posée en résolvant l'équation sur chacun des sous-espaces stables. Afin de faire agir le contrôle frontière au sein de l'équation elle-même, on introduit

$$w(t,x) = v(t,x) - (1-x)u(t).$$

w vérifie l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) = \partial_x^2 w(t,x) - (1-x)u'(t) & \text{pour } t \in (0,T),\ x \in (0,1), \\ w(t,0) = 0 & \text{pour } t \in (0,T), \\ w(t,1) = 0 & \text{pour } t \in (0,T), \\ w(0,x) = \psi(x) - (1-x)u(0) & \text{pour } x \in (0,1). \end{cases} \tag{4}$$

Introduisons $\mu(x) = 1 - x$. On cherche une solution w de (4), décomposée selon la base de valeurs propres, *i.e.* $w(t,x) = \sum_{j=1}^{+\infty} w_j(t)\varphi_j(x)$. La formule de Duhmamel fournit :

$$w(t,\cdot) = e^{-tA}w(0,\cdot) - \int_0^t e^{-(t-s)A}\mu u'(s)\mathrm{d}s.$$

On obtient ainsi :

$$\forall j \geq 1,\ w_j(t) = (\psi - \mu u(0), \varphi_j)_{L^2} e^{-\lambda_j t} - (\mu, \varphi_j)_{L^2} \int_0^t e^{-\lambda_j(t-s)}u'(s)\mathrm{d}s.$$

On remarque que : $\forall j \geq 1,\ (\mu, \varphi_j)_{L^2} = \sqrt{2}\int_0^1 (1-x)\sin(j\pi x)\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{2}}{j\pi}$. On vérifie enfin que la fonction obtenue est bien solution du problème initial via un théorème de dérivation sous le signe somme. La quantité $u(0)$ vaut $v(0,0)$ par continuité. Cette solution est unique. On constate aussi l'effet régularisant de l'équation de la chaleur : $\forall t > 0,\ w(t,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(0,1)$. ■

2.4 Problème de moments

L'utilisation de la théorie spectrale permet de diagonaliser l'opérateur en dimension infinie et de ramener l'étude dans un espace de Hilbert à une étude sur chacune des droites propres de l'opérateur. Par ce biais, la contrôlabilité va, de manière analogue au cas des systèmes linéaires en dimension finie, se reformuler en un problème de moments infini. Sa résolution est beaucoup moins triviale et va faire intervenir des éléments d'analyse complexe qui seront developpés dans la partie suivante. Plus précisement : $T > 0$ étant fixé, on cherche u vérifiant $\forall x \in (0,1),\ v(T,x) = 0$ et $u(T) = 0$. Ceci est équivalent à :

$$\forall x \in (0,1),\ w(T,x) = 0,$$

i.e. $\forall j \geq 1$,

$$e^{-\lambda_j T}(\psi, \varphi_j)_{L^2} - v(0,0)(\mu,\varphi_j)_{L^2} = (\mu,\varphi_j)_{L^2}\int_0^T e^{-\lambda_j(T-s)}u'(s)\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \int_0^T e^{0s}u'(s)\mathrm{d}s = -v(0,0).$$

On réinterprète la condition de continuité comme un moment d'ordre 0.

Theorème 3

La contrôlabilité à zéro du système (3) *(avec l'hypothèse* $u(T)=0$*) est équivalente à l'existence d'une fonction* $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^0([0,T])$ *vérifiant :*

$$\forall j \geq 1,\ e^{-\lambda_j T}(\psi, \varphi_j)_{L^2} - v(0,0)(\mu,\varphi_j)_{L^2} = (\mu,\varphi_j)_{L^2}\int_0^T e^{-\lambda_j(T-s)}\widetilde{u}(s)\mathrm{d}s \tag{5}$$

et

$$\int_0^T e^{0s}\widetilde{u}(s) = -v(0,0).$$

Démonstration : Si le système est contrôlable, par l'équivalence précédente, il existe $u \in \mathcal{C}^1([0,T])$ telle que : $\forall j \geq 1,\ e^{-\lambda_j T}(\psi, \varphi_j)_{L^2} - v(0,0)(\mu,\varphi_j)_{L^2} = (\mu,\varphi_j)_{L^2}\int_0^T e^{-\lambda_j(T-s)}u'(s)\mathrm{d}s$ et la condition initiale $\int_0^T e^{0s}u'(s) = -v(0,0)$. Ainsi, définissons $\widetilde{u}(t) := u'(t) \in \mathcal{C}^0([0,T])$. Ainsi, $\widetilde{u}$ est solution de (5).

Réciproquement, s'il existe une solution $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^0([0,T])$ vérifiant (5), alors, on définit $u(t) = \int_T^t \widetilde{u}(s)\mathrm{d}s$. On a bien $u \in \mathcal{C}^1([0,T])$, et u est un contrôle qui permet à la solution v de (3) de vérifier : $\forall x \in (0,1),\ v(T,x) = 0$. En effet, on a $u(T) = 0$ et $\forall x \in (0,1)$,

$$v(T,x) = w(T,x) = \sum_{j=1}^{+\infty} w_j(T)\varphi_j(x).$$

Or, $\forall j \geq 1$,

$$w_j(T) = e^{-\lambda_j T}(\psi, \varphi_j)_{L^2} - v(0,0)(\mu,\varphi_j)_{L^2} - (\mu,\varphi_j)_{L^2}\int_0^T e^{-\lambda_j(T-s)}u'(s)\mathrm{d}s = 0.$$

Ceci conclut. ■

Ainsi, nous allons démontrer que le problème de moments admet une solution. Pour cela, nous allons utiliser des outils d'analyse complexe. Cette étude est basée sur deux lemmes fondamentaux, que nous allons démontrer maintenant.

Remarque. *On s'affranchira des difficultés techniques dans la suite en oubliant la condition du moment d'ordre* 0 *et en supposant* $v(0,0) = 0$.

3 Construction d'une famille biorthogonale

Nous allons construire une famille biorthogonale à la famille $(t \mapsto e^{\lambda_n t})_{n\geq 1}$ pour le produit scalaire L^2, où l'on rappelle que l'on a noté pour tout entier naturel n non nul, $\lambda_n = (n\pi)^2$, les valeurs propres de l'opérateur (voir 2.2). Pour cela, nous allons utiliser le théorème de Paley-Wiener. Le premier lemme a pour but de construire une famille $(\psi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant : $\forall k, n \in \mathbb{N}^*, \psi_n(\lambda_k) = \delta_{n,k}$. Nous aurons recours à la construction classique via les produits infinis, dont on souhaitera obtenir des estimations de croissance. Le deuxième lemme a pour vocation de construire une fonction qui viendra contrecarrer la croissance de la première afin que le produit des deux fonctions vérifie les hypothèses du théorème de Paley-Wiener. Le but est de parvenir au théorème suivant :

Theorème 4 (*Existence d'une famille biorthogonale*)

Il existe une famille $(f_k)_{k\geq 1} \in L^2(-T/2, T/2)$ *telle que* $\forall k, n \in \mathbb{N}^*, \ (e^{\lambda_n \cdot}, f_k)_{L^2} = \delta_{n,k}$.

3.1 Construction d'une famille de fonctions $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $\Phi_n(\lambda_k) = \delta_{n,k}$

Lemme 1

Soit n *un entier naturel non nul. On définit pour tout nombre complexe* z*, la fonction entière suivante :*

$$\Phi_n(z) = \prod_{k\neq n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k - \lambda_n}\right).$$

Alors, il existe une constante $B > 0$ *telle que :*

1. $\forall z \in \mathbb{C}, \ |\Phi_n(z)| \lesssim e^{\pi\sqrt{|z|}} (1 + |z|)^B$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\Phi_n(-ix - \lambda_n)| \lesssim (\lambda_n + |x|)^B e^{\pi\sqrt{|x|/2}}$.

La notation $\lesssim$ signifie inférieur à constante près, la notation $\lesssim_n$ signifie inférieur à constante près dépendant de n.

Démonstration : Remarquons d'abord que le produit infini est bien défini, et converge normalement sur tout compact, puisque :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall R > 0, \ \sum_{k\neq n} \sup_{z\in B(0,R)} \left|\frac{z}{\lambda_k - \lambda_n}\right| \leq \frac{R}{\pi^2} \sum_{k\neq n} \frac{1}{|k^2 - n^2|} < \infty.$$

Ainsi, Φ_n est une fonction entière dont les valeurs d'annulation sont celles de ces facteurs, *i.e.* $I_n := \{\lambda_k - \lambda_n, \ k \neq n\}$ et $\forall z \in \mathbb{C}\backslash I_n$,

$$\ln|\Phi_n(z)| \leq \sum_{k\neq n} \ln\left(1 + \frac{|z|}{|\lambda_n - \lambda_k|}\right) = \sum_{k\neq n} \int_0^{|z|} \frac{\mathrm{d}t}{t + |\lambda_k - \lambda_n|} = \int_0^{|z|} \sum_{k\neq n} \frac{1}{t + |\lambda_k - \lambda_n|} \mathrm{d}t.$$

$$\ln|\Phi_n(z)| \leq \int_0^{|z|} \sum_{k\neq n} \int_{|\lambda_k - \lambda_n|}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{(t+s)^2} \mathrm{d}t \leq \int_0^{|z|} \int_\delta^{+\infty} \frac{L_n(s)}{(t+s)^2} \mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

où $\delta = \inf\limits_{(k,n) \ k\neq n} |\lambda_k - \lambda_n|$, et $L_n(s) = \sum\limits_{k\neq n, \ |\lambda_k - \lambda_n| \leq s} 1.$

On remarque que $L_n(s) = \sharp\left\{k \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n - s \leq \pi^2 k^2 \leq \lambda_n + s\right\} \leq \sqrt{\lambda_n + s} - \sqrt{(\lambda_n - s)^+} + \mathcal{O}(1)$.
On en déduit :

$$\ln|\Phi_n(z)| \leq \int_0^{|z|}\int_\delta^{+\infty} \frac{\sqrt{\lambda_n + s} - \sqrt{(\lambda_n - s)^+}}{(t+s)^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + B\int_0^{|z|}\int_\delta^{+\infty}\frac{1}{(t+s)^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

$$\ln|\Phi_n(z)| \leq \frac{|z|}{\sqrt{\lambda_n}}(U+V)\left(\frac{|z|}{\lambda_n}\right) + B\ln\left(1 + \frac{|z|}{\delta}\right),$$

où

$$U(x) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+v} - \sqrt{1-v}}{v(v+x)}\mathrm{d}v \quad \text{et} \quad V(x) = \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{v+1}}{v(v+x)}\mathrm{d}v.$$

On conclut le point 1. en montrant que :

$$\forall x \geq 0,\ \sqrt{x}\,(U(x) + V(x)) \leq \pi.$$

On se limite ici au cas $x \geq 3$. Remarquons que :

$$U(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+v} - \sqrt{1-v}}{v}\mathrm{d}v =: \frac{a}{x}.$$

Le calcul de a s'obtient facilement en séparant les deux intégrales, et en effectuant le changement de variables $u = \sqrt{1+v}$ dans la première, et $u = \sqrt{1-v}$ dans la deuxième. On a $a = 2\sqrt{2} - 2\ln(1+\sqrt{2})$.
Passons à la majoration de V :

$$V(x) = \int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{v}}{v(v+x)}\mathrm{d}v + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{v(v+x)(\sqrt{v} + \sqrt{v+1})}.$$

En posant $t = \sqrt{v/x}$ dans la première intégrale, et en majorant grossièrement la deuxième intégrale, on a :

$$V(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}\int_{1/\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \frac{b}{x+1},$$

où

$$b = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{v(\sqrt{v} + \sqrt{v+1})} \underset{v=\tan^2(\tau)}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{2\mathrm{d}\tau}{(1+\sin(\tau))\sin(\tau)} \underset{t=\tan(\tau/2)}{=} 2\int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{1+t^2}{t(1+t)^2} = 2 - a.$$

On obtient alors, en vertu de l'inégalité : $\arctan(x) \geq x - \frac{1}{3}x^3$ pour x positif,

$$V(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + \frac{b}{x+1} \leq \frac{\pi}{\sqrt{x}} + \frac{b-2}{x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{b}{x(x+1)}.$$

Ceci conclut.
On démontre désormais le point 2 : avec des raisonnements similaires, on a : pour tout x réel,

$$\ln|\Phi_n(-ix - \lambda_n)| \leq \ln\left(\prod_{k\neq n}\left|1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|^{-1}\right)\frac{1}{2}\sum_{k\neq n}\ln\left(1 + \frac{x^2}{\lambda_k^2}\right),$$

puis

$$\sum_{k\neq n}\ln\left(1 + \frac{x^2}{\lambda_k^2}\right) \leq \int_0^{+\infty}\frac{M(t)}{1+t}\mathrm{d}t, \text{ avec } M(t) = \sum_{k,\lambda_k \leq |x|/\sqrt{t}} 1 \leq \sqrt{|x|}t^{-1/4} + \mathcal{O}(1).$$

Par suite,

$$\sum_{k\neq n}\ln\left(1 + \frac{x^2}{\lambda_k^2}\right) \lesssim \ln(1+|x|) + \sqrt{|x|}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)t^{1/4}}.$$

La dernière intégrale est obtenue par le théorème des résidus, appliqué à la fonction $f : z \mapsto \dfrac{2z^2}{z^4+1}$, et pour contour un demi -cercle. Elle vaut $2i\pi\left(\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) + \mathrm{Res}(f, e^{3i\pi/4})\right) = \pi\sqrt{2}$.
Il faut enfin majorer $\prod_{k\neq n}\left|1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right|^{-1}$ par λ_n^B, cette partie n'est pas développée ici (on pourra par exemple utiliser le développement eulérien du sinus). ■

Remarques. *1. Pour tout entier naturel non nul n, $\psi_n : z \mapsto \Phi_n(z - \lambda_n)$ vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \psi_n(\lambda_k) = \delta_{n,k}$.*

2. Il faut maintenant construire une fonction entière valant 1 en zéro, et dont la croissance permet d'appliquer le théorème de Paley-Wiener.

3.2 Construction d'une fonction entière à croissance modérée

Il nous faut trouver une fonction entière qui décroît rapidement selon l'axe des abscisses. On considère alors la famille de fonctions suivante :

Définition 5

Soit $\nu > 0$. On introduit :

$$\sigma_\nu : z \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{\nu}{1-z^2}\right) & \textit{pour } t \in B(0,1) \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}.$$

Il est bien connu que pour tout $\nu > 0$, $\nu_{|\mathbb{R}}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. La régularité d'une fonction se traduisant par la décroissance de sa transformée de Fourier, on construit une fonction entière qui convient comme suit :

Lemme 2

Soient $\beta, \delta > 0$, et définit :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ H_\beta(z) = \frac{1}{\|\sigma_\nu\|_1} \int_{-1}^{1} \sigma_\nu(t) e^{-i\beta t z} \mathrm{d}t,$$

où $\nu = \frac{(\pi+\delta)^2}{\beta}$. Alors, H_β est une fonction entière de z qui vérifie :

1. $H_\beta(0) = 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_\beta(ix) \in \mathbb{R}$ *et* $H_\beta(ix) \geq \dfrac{e^{\beta|x|/2\sqrt{\nu+1}}}{4e\sqrt{\nu+1}}$.
3. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|H_\beta(z)| \leq e^{\beta|Im(z)|}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|H_\beta(x)| \lesssim \sqrt{\nu+1}e^{3\nu/4-(\pi+\delta/2)\sqrt{|x|}}$.

Démonstration : L'intégrande est une fonction entière de z, et,

$$\forall R > 0,\ \forall z \in B(0,R),\ |\sigma_\nu(t)e^{-i\beta t z}| \leq e^{\beta R} \in L^1(-1,1).$$

Le théorème d'holomorphie sous le signe intégral donne le caractère entier de H_β. Le point (1) découle immédiatement de la positivité de σ_ν et de la normalisation introduite, le point (3) découle immédiatement de la croissance de l'exponentielle. Démontrons le point (2). On suppose $x \geq 0$. On a, par décroissance de σ_ν sur $\mathbb{R}^+$, et par parité,

$$2e^{-\nu} = 2\sigma_\nu(0) \geq \int_{-1}^{1} \sigma_\nu(t)\mathrm{d}t,\ \text{d'où},\ \frac{1}{2}e^\nu \leq \frac{1}{\|\sigma_\nu\|_1}.$$

Ainsi,

$$\|\sigma_\nu\|_1 H_\beta(ix) = \int_{-1}^{1} \sigma_\nu(t)e^{t\beta x}\mathrm{d}t \geq \int_{\frac{1}{2\sqrt{\nu+1}}}^{\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}} \sigma_\nu(t)e^{t\beta x}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{2\sqrt{\nu+1}} e^{\beta x/2\sqrt{\nu+1}} \sigma_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\right).$$

D'où

$$H_\beta(ix) \geq \frac{1}{2}e^\nu \frac{1}{2\sqrt{\nu+1}} e^{\beta x/2\sqrt{\nu+1}} e^{-\nu-1},$$

ce qui conclut. Terminons par la démonstration du point (4). Par imparité de H_β sur $\mathbb{R}$, on raisonne avec $x > 0$. Puisque pour tout entier naturel j, $\sigma_\nu^{(j)}(\pm 1) = 0$, on obtient par intégration par parties : pour tout réel $x > 0$,

$$|H_\beta(x)| = \left| \frac{(-1)^j}{\|\sigma_\nu\|_1} \int_{-1}^{1} \sigma_\nu^{(j)}(t) \frac{e^{-it\beta x}}{(-ix\beta)^j} \mathrm{d}t \right| \leq \frac{2\left\|\sigma_\nu^{(j)}\right\|_{\infty,(-1,1)}}{(\beta x)^j \|\sigma_\nu\|_1}. \tag{6}$$

Afin d'estimer $\left\|\sigma_\nu^{(j)}\right\|_{\infty,(-1,1)}$, on passe par l'analyse complexe : soit $t \in (-1,1)$, la formule de Cauchy fournit, pour tout entier naturel j,

$$|\sigma_\nu^{(j)}(t)| = \left|\frac{j!}{2i\pi}\int_{\partial B(t,1-t)} \frac{\sigma_\nu(\xi)}{(\xi-t)^{j+1}}\mathrm{d}\xi\right| \leq \frac{j!}{2\pi}\|\sigma_\nu\|_{\infty,\partial B(t,1-t)} \frac{2\pi(1-t)}{(1-t)^{j+1}}.$$

Enfin, $\forall \theta \in]-\pi,\pi]$,

$$|\sigma_\nu(t+(1-t)e^{i\theta})| = \exp\left(-\mathrm{Re}\left(\frac{\nu}{1-(t+(1-t)e^{i\theta})^2}\right)\right) \leq \exp\left(-\nu/4(1-t)-\nu/4\right).$$

Ainsi,

$$\forall j \in \mathbb{N},\quad |\sigma_\nu^{(j)}(t)| \leq j! e^{-\nu/4} \sup_{t\in(-1,1)} \frac{e^{-\nu/4(1-t)}}{(1-t)^j}.$$

Puisque $j! > j^j e^{-j}$ et $e^{-\nu/4(1-t)} \leq \dfrac{j!}{(\nu/4(1-t))^j}$, on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N},\quad \left\|\sigma_\nu^{(j)}\right\|_{\infty,(-1,1)} \leq e^{-\nu/4}\frac{(2^j j!)^2}{\nu^j}. \tag{7}$$

Remarquons enfin que :

$$\|\sigma_\nu\|_1 \geq \int_{-1\sqrt{\nu+1}}^{1\sqrt{\nu+1}} \sigma_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\right)\mathrm{d}t = 2\frac{e^{-\nu-1}}{\sqrt{\nu+1}},\quad \text{d'où } \frac{1}{\|\sigma_\nu\|_1} \leq \frac{3}{2}e^\nu\sqrt{\nu+1}.$$

Par (6), (7), et la dernière estimée, on a :

$$\forall x>0,\ \forall j \in \mathbb{N},\ |H_\beta(x)| \leq 3\sqrt{\nu+1}e^{3\nu/4}\frac{(2^j j!)^2}{(\beta x\nu)^j}.$$

Avec $j = \lfloor \frac{1}{2}\sqrt{\beta\nu x}\rfloor$, et en utilisant la définition de ν, on conclut. ■

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème (3.1) sur l'existence d'une famille biorthogonale.

Démonstration : L'estimation (2) du lemme 3.2 montre que la fonction H_β ne s'annule pas sur l'axe imaginaire pur. On peut donc considérer $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\beta>0,\ \forall\delta>0,$

$$G_n : z \in \mathbb{C} \mapsto \Phi_n(-iz-\lambda_n)\frac{H_\beta(z/2)}{H_\beta(i\lambda_n/2)}.$$

Elle est entière, et vérifie :

1. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ G_n(i\lambda_k) = \delta_{n,k}$ (voir la remarque 1 du point 3.1.).
2. $G_n|_\mathbb{R} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Enfin, la combinaison des deux estimations (2) et (3) du lemme 3.2 et de l'estimation (1) du lemme 3.1 fournit :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |G_n(z)| \lesssim_n e^{T/2|z|},$$

avec $\beta < T$. Par le théorème de Paley-Wiener, G_n est la transformée de Fourier d'une fonction F_n, $L^2(\mathbb{R})$, supportée dans $[-T/2,T/2]$, *i.e.*,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C},\ G_n(z) = \int_{-T/2}^{T/2} F_n(t)e^{-izt}\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\forall n,k \in \mathbb{N}^*, (F_n, e^{\lambda_k \cdot})_{L^2(-T/2,T/2)} = G_n(i\lambda_k) = \delta_{n,k}.$$ ■

4 Contrôlabilité de l'équation de la chaleur

Cette famille étant construit, nous pouvons maintenant démontrer la contrôlabilité de l'équation de la chaleur.

Theorème 5

Le problème de moments (5) admet une solution $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^0([0,T])$, (quelque soit la condition initiale $\psi \in L^2$ et quelque soit $T > 0$).

Démonstration : On définit : $\forall t \in [0,T]$,

$$\widetilde{u}(t) := \sum_{m \geq 1} \frac{(\psi, \varphi_m)_{L^2}}{(\mu, \varphi_m)_{L^2}} e^{-T\lambda_m/2} F_m(t - T/2).$$

Alors, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^T \widetilde{u}(s) e^{\lambda_k s} \mathrm{d}s = \sum_{m \geq 1} \frac{(\psi, \varphi_m)_{L^2}}{(\mu, \varphi_m)_{L^2}} e^{-T(\lambda_k + \lambda_m)/2} (F_m, e^{\lambda_k \cdot})_{L^2} = \frac{(\psi, \varphi_m)_{L^2}}{(\mu, \varphi_m)_{L^2}} e^{-\lambda_k T}.$$

Le théorème 2.2. conclut.
Remarquons que u est bien définie et continue, puisque, par inversion de Fourier, $F_n = \mathcal{F}(G_n) \in \mathcal{C}^0([0,T])$, comme tranformée de Fourier d'une fonction L^1. De plus, la série converge normalement : $\forall t \in [0,T]$,

$$\sum_{k \geq 1} \left| \frac{(\psi, \varphi_k)_{L^2}}{(\mu, \varphi_k)_{L^2}} e^{-T\lambda_k/2} F_k(t - T/2) \right| \leq \left\| \left(\frac{e^{-T\lambda_k/2}}{(\mu, \varphi_k)_{L^2}} \right)_{k \geq 1} \right\|_2 \|F_k\|_{\infty,[0,T]} \left(\sum_{k \geq 1} |(\psi, \varphi_k)_{L^2}|^2 \right)^{1/2} < \infty. \quad \blacksquare$$

Remarques.

1. *Les estimations très précises démontrées précedemment, et la possibilité de faire varier δ permettent de démontrer des estimations fines sur le coût du contrôle.*
2. *Cette méthode de résolution via la méthode des moments s'étend de manière générale à une classe d'opérateurs modulo des contraintes sur les valeurs propres de ce dernier.*
3. *Cette méthode généralise la résolution du problème de moments fini évoqué dans le cas des systèmes linéaires de dimension finie.*

Références

[1] G. TENEMBAUM, M. TUCSNAK. *New blow-up rates for fast controls of Schrönding and heat equations*, J. Differential Equations 243 (2007) 70-100.

[2] Jean-Michel CORON. *Control and Nonlinearity*, American Mathematical Society, 2007.

[3] K. BEAUCHARD, C. LAURENT, *Local controllability of* 1*D linear and nonlinear Schrödinger equations with bilinear control*, J. Math. Pures Appl. 94 (2010) 520–554.

[4] S. DOLECKI, D.L. RUSSELL, *A general theory of observation and control*, J. Control Optim. 15 (1997) 185–220.