ALBI
L3, semestre 1 (2025-2026) - Groupe magistère
Université de Rennes - ENS Rennes

TD 5 : Révisions euclidiennes et hermitiennes

Exercice 1

Soit E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est trigonalisable en base orthonormée.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien ou hermitien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est un endomorphisme normal si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice 3

Soit E un espace hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = 0$, et en déduire que $f = 0$.

2. Peut-on conclure la même chose si E est un espace euclidien ?

Exercice 4

Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que ${}^tPAP = I_n$ et ${}^tPBP$ soit une matrice diagonale réelle.

ALBI
L3, semestre 1 (2025-2026) - Groupe magistère
Université de Rennes - ENS Rennes

TD 5 : Révisions euclidiennes et hermitiennes

Exercice 1

Soit E un espace hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est trigonalisable en base orthonormée.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien ou hermitien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est un endomorphisme normal si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Exercice 3

Soit E un espace hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$.

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = 0$, et en déduire que $f = 0$.

2. Peut-on conclure la même chose si E est un espace euclidien ?

Exercice 4

Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que ${}^tPAP = I_n$ et ${}^tPBP$ soit une matrice diagonale réelle.