

Ex1: Soit E hermitien de dim finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Mq u est trigonalisable en b.o.n.

Solut: Comme E est un $\mathbb{C}$ -ev, χ_u est scindé sur $\mathbb{C}$, donc u est trigonalisable. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base (quelconque) de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (cela veut dire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est stable par u).

On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(e_1, \dots, e_n)$.

On obtient une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ qui satisfait

$$\text{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\}.$$

et qui répond donc à la question.

Ex2: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace euclidien ou hermitien.

Mq u est normal $\Leftrightarrow \forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

Solution: On rappelle les formules de polarisation:

$$\text{Dans le cas euclidien: } \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$\text{Dans le cas hermitien: } \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) + \frac{i}{2} (\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$\text{Ainsi, } (\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|) \quad \leftarrow y=x$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle x, u^* \circ u(y) \rangle = \langle x, u \circ u^*(y) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in E, u^* \circ u(y) = u \circ u^*(y) \Leftrightarrow u \text{ est normal.}$$

Ex3: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq
 $\forall x \in E, \quad \langle f(x), x \rangle = 0$

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = 0$

b) En déduire que $f = 0$.

c) Peut-on démontrer la même chose dans le cas euclidien ?

Solution: a) Soit $x, y \in E$.

$$\langle f(x+y), x+y \rangle = 0 = \underbrace{\langle f(x), x \rangle}_0 + \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), x \rangle + \underbrace{\langle f(y), y \rangle}_0$$

$$\langle f(x+iy), x+iy \rangle = 0 = \underbrace{\langle f(x), x \rangle}_0 + \langle f(x), iy \rangle + \langle if(y), x \rangle + \underbrace{\langle if(y), iy \rangle}_0$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), x \rangle = 0 & (L_1) \\ -i\langle f(x), y \rangle + i\langle f(y), x \rangle = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$\text{donc } (L_1) - (L_2) \Rightarrow 2\langle f(x), y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), y \rangle = 0$$

b) En particulier pour $y = f(x)$ on obtient $\|f(x)\|^2 = 0$ et donc $f(x) = 0$.

c) Non, par exemple la rotation $R_{\pi/2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \langle R_{\pi/2}(x), x \rangle = 0, \quad \text{mais } R_{\pi/2} \neq 0.$$

Ex 4: (Orthogonalisation simultanée de deux formes bilinéaires symétriques)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $\begin{cases} {}^t P A P = I_n \\ {}^t P B P = D \text{ diagonale réelle.} \end{cases}$

Solut: Soit $\langle -, - \rangle_A$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans Can est A . Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle X, Y \rangle_A = \underbrace{\langle AX, Y \rangle}_{\text{produit scalaire canonique de } \mathbb{R}^n} = {}^t X A Y$$

Il s'agit bien d'un produit scalaire car A est définie positive

Alors $A^{-1}B$ est auto-adjoint par ce produit scalaire.

En effet $\begin{cases} \bullet \langle A^{-1}BX, Y \rangle_A = \langle AA^{-1}BX, Y \rangle = \langle BX, Y \rangle = {}^t X B Y \\ \bullet \langle X, A^{-1}BY \rangle_A = \langle AX, A^{-1}BY \rangle = {}^t X A A^{-1} B Y = {}^t X B Y \end{cases}$

D'après le théorème spectral, il existe donc une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ orthonormée par $\langle -, - \rangle_A$ et telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = D$ diag réelle.
 $\uparrow$
canoniquement associé à $A^{-1}B$

Soit $P = P_{\text{Can}, \mathcal{B}} = M_{\text{Can}}(\mathcal{B})$.

Alors $\bullet {}^t P A P = {}^t P M_{\text{Can}}(\langle -, - \rangle_A) P = M_{\mathcal{B}}(\langle -, - \rangle_A) = I_n$

car $\mathcal{B}$ est orthonormée par $\langle -, - \rangle_A$

$$\text{et } \circ \quad \underbrace{P^{-1}(A^{-1}B)P}_{M_{\mathcal{B}}(u)} = M_{\mathcal{B}}(u) = D \quad (*)$$

6- d'après l'égalité ${}^tPAP = I_n$, on a ${}^tP = P^{-1}A^{-1}$

donc $(*)$ se réécrit ${}^tPBP = D$, ce qui donne le résultat recherché □