Exercice 1.3 *Montrer qu'un groupe fini d'ordre pair contient au moins un élément d'ordre* 2.

La rédaction de cet exercice n'est pas évidente car lorsqu'on écrit

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x, x^{-1}\} \tag{1}$$

il faut être prudent car l'union n'est pas disjointe. Par exemple, si l'on prend $G = \{1, i, -1, -i\}$ le groupe des racines quatrièmes de l'unité, alors l'union

$$\bigcup_{x \in G} \{x, x^{-1}\} = \{1, 1\} \cup \{i, -i\} \cup \{-1, -1\} \cup \{-i, i\}$$

n'est pas une union disjointe. Le passage au cardinal nécessite donc quelques précautions.

Méthode 1 : On peut montrer que la situation qui se présente dans l'exemple ci-dessus est la seule qui peut se produire. C'est-à-dire que pour tout $x, y \in G$, ou bien $\{x, x^{-1}\} \cap \{y, y^{-1}\} = \emptyset$, ou bien $\{x, x^{-1}\} = \{y, y^{-1}\}$. C'est un bon exercice de prouver cela rigoureusement. Ainsi, dans l'union (1), les ensembles qui apparaissent sont soit disjoints, soit égaux. Quitte à enlever les répétitions d'ensembles qui apparaissent plusieurs fois, on peut donc se ramener à une union disjointe :

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{N} \{x_i, x_i^{-1}\}.$$

Comme $e \in G$, on peut supposer que $x_1 = e$, puis que $x_2, \ldots, x_m$ sont des éléments d'ordre 2 (s'il y en a), et que $x_{m+1}, \ldots, x_N$ sont des éléments d'ordre strictement supérieur à 2. Alors

$$|G| = |\{e\}| + \sum_{i=2}^{m} |\{x_i, x_i^{-1}\}| + \sum_{i=m+1}^{N} |\{x_i, x_i^{-1}\}|$$

Or dans la dernière somme, les ensembles $\{x_i, x_i^{-1}\}$ sont de cardinal 2, car $x_i \neq x_i^{-1}$ car $x_i^2 \neq e$. Ainsi, la dernière somme est un nombre pair, tout comme $|G|$. Donc pour que cette égalité soit vraie, il faut que la somme du milieu contienne un nombre impair de termes, donc au moins un terme, c'est-à-dire que G contienne au moins un élément d'ordre 2.

Méthode 2 : On peut aussi introduire la relation d'équivalence suivante sur G : pour tout $x, y \in G$, on dit que $x \sim y$ lorsque $y \in \{x, x^{-1}\}$. On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence sur G et que la classe d'équivalence d'un élément x est $\{x, x^{-1}\}$. Soit $x_1, \ldots, x_N$ un système de représentant des classes d'équivalence pour cette relation. Alors comme les classes d'équivalence forment une partition de G, on obtient l'union disjointe

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{N} \{x_i, x_i^{-1}\}$$

et on peut reproduire la fin de la preuve ci-dessus.