Comportement d'une série entière au bord de son disque de convergence

Table des matières

1. Tout peut arriver...

Référence : Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques*, page 261.

- *Une série entière qui diverge en tout point du cercle de convergence :*

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n$$

Le rayon de convergence est égal à 1, mais pour tout z de module 1, la série des z^n diverge grossièrement.

- *Une série entière qui converge en tout point du cercle de convergence :*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} z^n$$

Le rayon de convergence est égal à 1, et pour tout z de module 1, la série des $\frac{z^n}{n^2}$ converge absolument, donc converge.

- *Une série entière qui converge en certains points du cercle de convergence, et diverge en d'autres :*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^n$$

Pour $z = 1$ on retrouve la série harmonique, notoirement divergente, tandis que pour $z = -1$ la série converge (série alternée). Si tout va bien, on verra plus loin qu'on peut faire mieux que juste 1 et -1, et déterminer si pour $z = e^{i\theta}$, la série converge.

2. Les théorèmes d'Abel

Dans le premier exemple de la section précédente, on peut remarquer que la somme de la série des z^n coïncide avec la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ à l'intérieur du disque de convergence. Or cette fonction est définie sur un domaine bien plus grand que le disque unité ! On peut se demander s'il y a un lien entre la limite de $f(z) = \frac{1}{1-z}$ lorsque z tend vers un point du bord, disons z_0 (de module 1), et le comportement de la série $\sum z_0^n$. Dans cet exemple, il y a peu d'espoir, car que f admette ou non une limite finie en z_0, la série des z_0^n diverge. Cependant, il y a des cas où des liens entre le comportement de la somme de la série au voisinage d'un point z_0 du bord, et le comportement de la série où l'on a remplacé z par z_0, peuvent être montrés. C'est tout l'objet des théorèmes d'Abel, puis des théorèmes dits taubériens.

Définition 2.1 :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. La série $\sum a_n$ est dite Abel-sommable si la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et si $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (fonction de la variable réelle définie sur $[0,1[$) admet une limite finie lorsque $x \to 1^-$.

(Thomas me signale que la sommation au sens d'Abel est évoquée dans *Calcul intégral* de Bernard Candelpergher, avec des applications au noyau de Poisson dans le monde des séries de Fourier. C'est sans doute intéressant d'aller voir !)

Commençons par une application classique de la transformation d'Abel, le théorème d'Abel radial, qui nous dit que la convergence de la série implique sa sommabilité au sens d'Abel.

Théorème 2.2 :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,\infty[$. On note f la fonction définie sur $[0,R[$ par la somme de cette série. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors :

$$f(x) \underset{x\to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Démo : Références possibles : De nombreux livres de prépa je suppose. J'ai lu une preuve pour la première fois dans *Mathématiques MP, MP** de la collection Prépas sciences chez Ellipses (les gros livres jaunes).

On peut supposer que $R = 1$.

Nous allons effectuer une tranformation d'Abel, on note zuzuellement $S_n := \sum_{i=0}^n a_i$ (avec la convention $S_{-1} = 0$), et $S := \lim S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in [0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{N} (S_n - S_{n-1})\, x^n = \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N} S_{n-1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} S_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1} \quad \text{car } S_{-1} = 0 \\
&= S_N x^N + (1-x) \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^n
\end{aligned}$$

Par hypothèse $S_N \underset{N\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, donc la suite $(S_N)_{N\in\mathbf{N}}$ est bornée, donc $S_N x^N \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme le terme de gauche converge quand $N \to +\infty$ (vers $f(x)$), on en déduit que la série des $S_n x^n$

converge. En passant à la limite $N \to \infty$, on obtient :

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

(égalité vraie pour tout $x \in [0,1[$). On en déduit que pour tout $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned} f(x) - S &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S x^n \\ &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S) x^n \end{aligned}$$

Une fois que l'on a obtenu cette égalité, on conclut rapidement. En effet, si on fixe $\varepsilon > 0$, alors il existe un rang N à partir duquel les différences $|S_n - S|$ sont toutes majorées par ε. On en déduit que pour tout $0 \leqslant x < 1$,

$$\begin{aligned} |f(x) - S| &\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} |S_n - S| x^n + (1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} |S_n - S| x^n \\ &\leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{N-1} |S_n - S| x^n \quad + \; \varepsilon \end{aligned}$$

Or le premier terme tend vers 0 lorsque $x \to 1^-$, et donc il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]1-\delta, 1[$, $|f(x) - S| \leqslant 2\varepsilon$, et c'est ce qu'on voulait. □

Remarques :

- Ce théorème est utile en pratique, quand il est plus facile de voir la limite de f que la somme de la série. On peut par exemple l'utiliser pour montrer que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \text{ou encore que :} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

- Si $\sum a_n$ converge absolument, on a une démonstration bien plus rapide, car alors $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $[0,1]$, donc sa somme est continue en 1.

Voici maintenant une version un peu plus forte du théorème précédent, le théorème d'Abel non-tangentiel.

Théorème 2.3 :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. On note f sa somme sur $D(0,1)$. Soit $\theta \in [0, \pi/2[$, et soit

$$\Delta_\theta := \left\{1 - \rho e^{i\varphi},\ \rho > 0,\ \varphi \in [-\theta, \theta]\right\} \cap D(0,1)$$

Si $\sum a_n$ converge, alors :

$$f(z) \underset{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_\theta}}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Démo : Références possibles : Gourdon Analyse, Zuily & Queffélec.

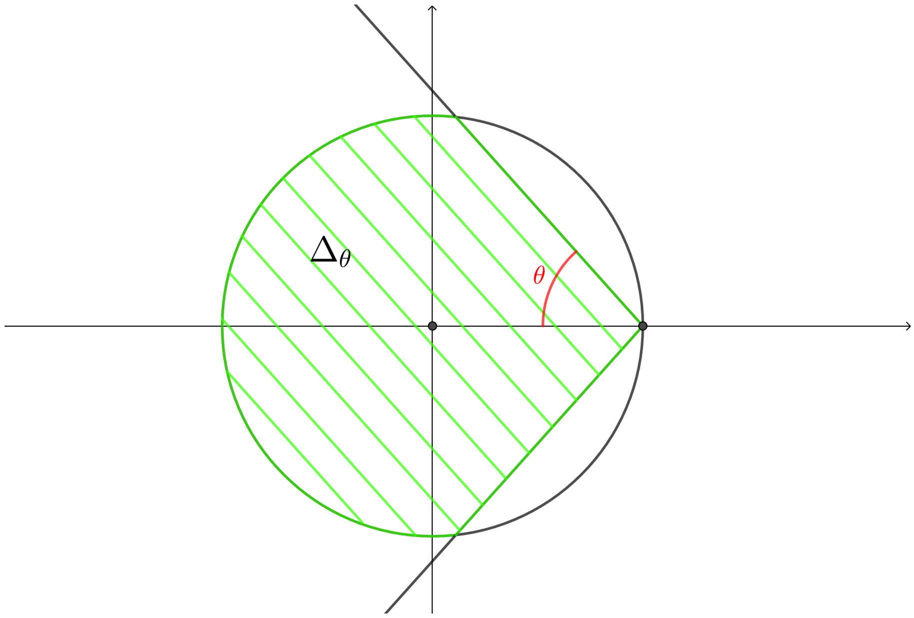

FIGURE 1. Secteur angulaire Δ_θ.

Là encore, l'idée clef est de faire une transformation d'Abel. On note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ \ S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ et } R_n := S - S_n$$

(toujours avec le convention $S_{-1} = 0$). Les calculs de la démonstration du théorème 2.2, écrits pour $x \in [0, 1[$, restent valables pour tout $z \in D(0, 1)$, ce qui nous permet d'écrire :

$$f(z) - S = (1 - z) \sum_{n=0}^{+\infty} (S_n - S) z^n = (z - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n.$$

On veut montrer que cette différence tend vers 0 lorsque z tend vers 1 en restant dans Δ_θ.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $|R_n| \leqslant \varepsilon$ (c'est bien possible car comme on suppose que $\sum a_n$ converge, les restes tendent vers 0). Pour tout $z \in D(0, 1)$, on a :

$$\begin{aligned}
|f(z) - S| &\leqslant |z - 1| \sum_{n=0}^{n_0} |R_n||z|^n + |z - 1| \sum_{n>n_0} |R_n||z|^n \\
&\leqslant |z - 1| \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| + \varepsilon |z - 1| \sum_{n>n_0} |z|^n \\
&\leqslant |z - 1| \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| + \varepsilon |z - 1| \sum_{n\geqslant 0} |z|^n \\
&\leqslant |z - 1| \sum_{n=0}^{n_0} |R_n| + \varepsilon \frac{|z - 1|}{1 - |z|}
\end{aligned}$$

Maintenant, si $z = 1 - \rho e^{i\varphi} \in \Delta_\theta$, alors

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{\rho}{1-|z|} \underset{(\star)}{\leqslant} \frac{2\rho}{1-|z|^2} = \frac{2\rho}{1-(1-2\rho\cos\varphi+\rho^2)} = \frac{2}{2\cos\varphi-\rho} \leqslant \frac{2}{2\cos\theta-\rho}.$$

$$\left(\text{L'inégalité } (\star) \text{ est satisfaite car : } \frac{1}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{1-|z|^2} \iff (|z|-1)^2 \geqslant 0\right).$$

Ainsi, pour $z \in \Delta_\theta$ assez proche de 1, on a à la fois $\rho = |z-1| \leqslant \cos\theta$ (et donc $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{\cos\theta}$) et $|z-1|\sum_{n=0}^{n_0}|R_n| \leqslant \varepsilon$. D'où

$$|f(z)-S| \leqslant \varepsilon + \frac{2}{\cos\theta}\varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence annoncée.

□

Remarque :
C'est dans le contrôle de ce terme en $|z-1|/1-|z|$ qu'on peut pressentir qu'il ne faut pas s'approcher trop « tangentiellement ».

3. Deux théorèmes taubériens

Les théorèmes d'Abel de la partie précédente permettent de déduire le comportement de f au voisinage d'un point du bord, lorsque l'on fait des hypothèses sur la convergence de la série en ce point. Les deux théorèmes qui suivent sont des tentatives de trouver des réciproques à ces théorèmes (2.2 et 2.3). Autrement dit, on suppose que f admet une limite finie en un point du bord, et on aimerait en déduire quelque chose sur la nature de la série en ce point. Re-autrement dit, on se demande si l'Abel-sommabilité n'impliquerait pas la convergence de la série... L'exemple de la série des $(-1)^n z^n$ nous montre qu'il va falloir ajouter quelques hypothèses ! En effet, dans cet exemple $f(z) := \frac{1}{1+z}$ admet une limite finie en 1^- (qui vaut $1/2$), tandis que $\sum(-1)^n$ n'est pas une série convergente.

Bien que non tous dus à Tauber, les théorèmes qui comparent différents procédés de sommation (au sens d'Abel, au sens classique...) sont souvent appelés théorèmes taubériens, sans doute pour faire référence au premier résultat de ce genre, qui est présenté au théorème 3.1.

Je n'ai pas eu le temps de lire ce livre, mais il semblerait que la meilleure référence pour l'histoire des théorèmes taubériens, les discussions sur l'optimalité des conditions « $o\left(\frac{1}{n}\right), O\left(\frac{1}{n}\right)$ » à l'aide d'exemples détaillés...soit *Analyse mathématique. Grands théorèmes du vingtième siècle* de Denis Choimet et Hervé Queffélec.

Commençons par démontrer un premier théorème taubérien, dit « faible ». Il découlera du théorème « fort » qui nous occupera ensuite, mais comme la démonstration est beaucoup plus simple, il est peut-être préférable de savoir la faire, et de ne pas voir ce théorème comme un corollaire du théorème 3.2.

Théorème 3.1 (Tauber, 1897) **:**
Si $\sum a_n$ est Abel-sommable, et si $a_n \underset{n\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Démo : Référence possible : GOURDON Analyse.

On garde les notations utilisées jusqu'à présent, c'est-à-dire : f désigne la fonction définie par la somme de la série entière sur $[0,1[$. L'hypothèse d'Abel-sommabilité nous dit qu'il existe un $l \in \mathbf{C}$ tel que

$$f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} l.$$

En particulier,

$$f\left(1 - \frac{1}{N}\right) \underset{N\infty}{\longrightarrow} l.$$

Donc pour montrer que la série des a_n converge et que sa somme est l, il suffit que montrer que :

$$f\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \underset{N\infty}{\longrightarrow} 0$$

Or pour tout $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} f\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - 1\right] + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left| f\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| &\leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n| \underbrace{\left|\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - 1\right|}_{\leqslant n/N \ \ \text{(IAF)}} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \\ &\leqslant \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n|a_n| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \end{aligned}$$

- Le premier terme tend vers 0 d'après le lemme de Cesàro, car par hypothèse $na_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Pour le second terme :

$$\begin{aligned} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n &= \sum_{n>N} \frac{n|a_n|}{n} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \\ &\leqslant \left(\sup_{n>N} n|a_n|\right) \times \sum_{n>N} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \\ &\leqslant \left(\sup_{n>N} n|a_n|\right) \times \frac{1}{N} \sum_{n>N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \\ &\leqslant \left(\sup_{n>N} n|a_n|\right) \times \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n\geqslant 0} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}_{=1} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\left| f\left(1 - \frac{1}{N}\right) - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} n|a_n| + \sup_{n>N} n|a_n|$$

et les deux termes de droite tendent vers 0 grâce à l'hypothèse $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où le résultat.

$\square$

En fait, le théorème reste vrai en supposant seulement que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, mais c'est considérablement plus difficile à démontrer. C'est le théorème taubérien fort suivant, aussi appelé théorème O de HARDY-LITTLEWOOD.

Théorème 3.2 (LITTLEWOOD, 1911) **:**
Si $\sum a_n$ est Abel-sommable, et si $a_n \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Démo : Références possibles : CHOIMET & QUEFFÉLEC, GOURDON Analyse... et sans doute bien d'autres pour une preuve classique. La preuve que je retranscris quasiment mot pour mot est issue de l'article de Nicolas TOSEL : *Rampes et théorèmes taubériens*, paru dans la RMS 128-4. Elle a l'avantage de ne pas utiliser le théorème de Weierstrass pour approcher une fonction par un polynôme. En effet, ce théorème est très fort puisqu'il nous dit qu'on peut approcher uniformément n'importe quelle fonction continue sur un segment par une fonction polynomiale, mais si on veut seulement approcher une fonction particulière, il peut-être intéressant de construire explicitement une suite de polynômes qui approchent bien notre fonction. De plus, quelques dessins suffisent à convaincre que les polynômes qu'on prend sont naturels ! J'aime bien le côté « manuel » de cette preuve.

Heuristique : Deux remarques cruciales vont nous donner l'idée de la démonstration.

- La première remarque est que l'existence d'une limite l en 1^- pour $\sum a_n x^n$ s'étend par linéarité de la manière suivante : pour tout $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P(x^n) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} P(1)l$$

  En effet, si on écrit $P := \sum_{k=1}^{m} b_k X^k$, on a pour tout $x \in [0,1[$, pour tout $N \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n P(x^n) = \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=1}^{m} b_k \,(x^n)^k = \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{n=0}^{N} a_n (x^k)^n.$$

  Puisque $k \geqslant 1$, x^k est bien dans $[0,1[$, donc on peut passer à la limite $N \to \infty$ dans le terme de droite. Donc la série de gauche converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P(x^n) = \sum_{k=1}^{m} b_k f(x^k).$$

  Puisque pour tout $k \in [\![1,m]\!]$, $f(x^k) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} l$, on obtient le résultat annoncé.

- La seconde remarque est que si on note $\varphi := \mathbf{1}_{[1/2,1]}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n)$ va ressembler à des sommes partielles de la série des a_n. En effet :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n) = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{-\ln 2}{\ln x} \right\rfloor} a_n$$

et la borne du haut de cette somme de droite tend vers l'infini lorsque $x \to 1^-$. Ainsi, le comportement asymptotique des sommes partielles de la série des a_n peut être étudié en regardant le comportement en 1^- de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(x^n)$.

Finalement, ces deux remarques nous guident vers l'idée de démonstration suivante : on cherche à approcher sur $[0,1]$ la fonction indicatrice de $[1/2,1]$ par une fonction polynomiale S qui vaut 0 en 0 et 1 en 1. De cette manière, la première remarque nous permettra de bien contrôler le comportement en 1^- de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P(x^n)$. En effet puisque P est polynomiale et nulle en 0, la première remarque nous assure que la limite en 1^- de cette série est $P(1)l = l$. Mais d'autre part, comme notre fonction polynomiale est proche de l'indicatrice de $[1/2,1]$, on s'attend (par la deuxième remarque) à ce que cette limite en 1^- soit aussi la limite des sommes partielles de la série des a_n, ce qui fournira la conclusion !

Il ne reste plus qu'à mettre en forme tout ça.

Étape 1 : Il s'agit du lemme ci-dessous.

Lemme 3.3 :
Soit $\alpha, \beta, \delta \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $\alpha < 1/2 < \beta$. Il existe une fonction polynomiale S, croissante sur $[0,1]$, telle que $S(0) = 0$, $S(1) = 1$, et

$$\begin{cases} \forall x \in [0,\alpha], \ \ S(x) \leqslant \delta x \\ \forall x \in [\beta,1], \ \ S(x) \geqslant 1 - \delta + \delta x \end{cases}$$

Autrement dit, avant α, S est en dessous de la droite de pente δ passant par l'origine, et au-delà de β, S est au-dessus de la droite de pente δ passant par le point de coordonnées $(1,1)$. Lorsque $(\alpha,\beta,\delta) \longrightarrow (1/2,1/2,0)$, une fonction S satisfaisant les conditions du lemme 3.3 ressemblera à l'indicatrice de $[1/2,1]$.

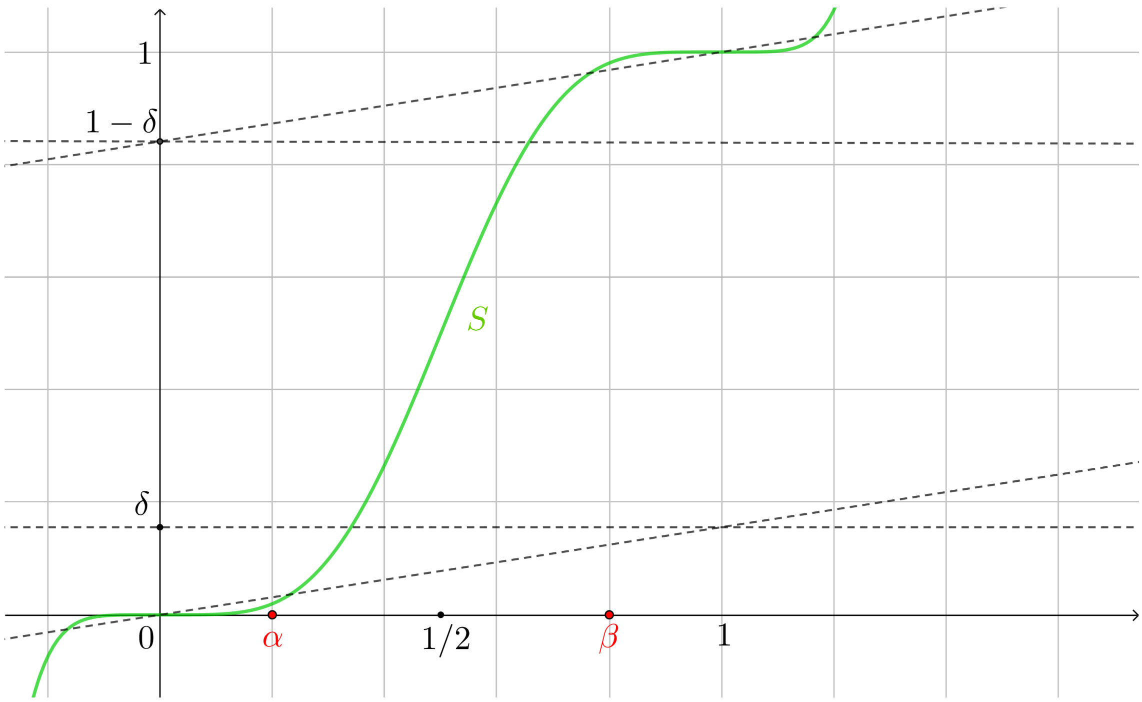

FIGURE 2. Graphe d'une fonction S satisfaisant les conditions du lemme 3.3.

Démo : Toute l'idée de la démonstration est de construire une telle fonction rampe comme une primitive d'une fonction assez pointue. En effet, plus la fonction fait un pic, plus l'aire sous la courbe augmente d'abord lentement, puis beaucoup autour de $1/2$, puis à nouveau lentement. La FIGURE 3 ci-dessous devrait être convaincante. La première ligne présente une suite de trois fonctions polynomiales de plus en plus piquées, et la ligne d'en dessous présente leurs primitives (à une normalisation près, pour qu'elles valent bien 1 en 1).

Plus rigoureusement, posons $P := 4X(1-X)$, et pour tout $r \in \mathbf{N}^*$,

$$S_r(x) := \frac{\int_0^x P^r(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 P^r(t)\mathrm{d}t}.$$

Montrons que pour r suffisamment grand, S_r convient bien. La définition de S_r correspond bien aux motivations expliquées ci-dessus : le polynôme P, restreint à $[0,1]$ forme une bosse, et ses puissances forment une bosse de plus en plus pointue, donc on s'attend bien à ce que l'aire sous la courbe de P^r donne une fonction rampe. La division par $\int_0^1 P^r$ est juste là pour assurer que $S_r(1) = 1$. La figure suivante illustre ce qu'il se passe. On a posé $g_r := P^r / \int_0^1 P^r$ (de sorte que S_r est la primitive nulle en 0 de cette fonction, donc si $x \in [0,1]$, $S_r(x)$ est l'aire sous la courbe de g_r sur $[0,x]$).

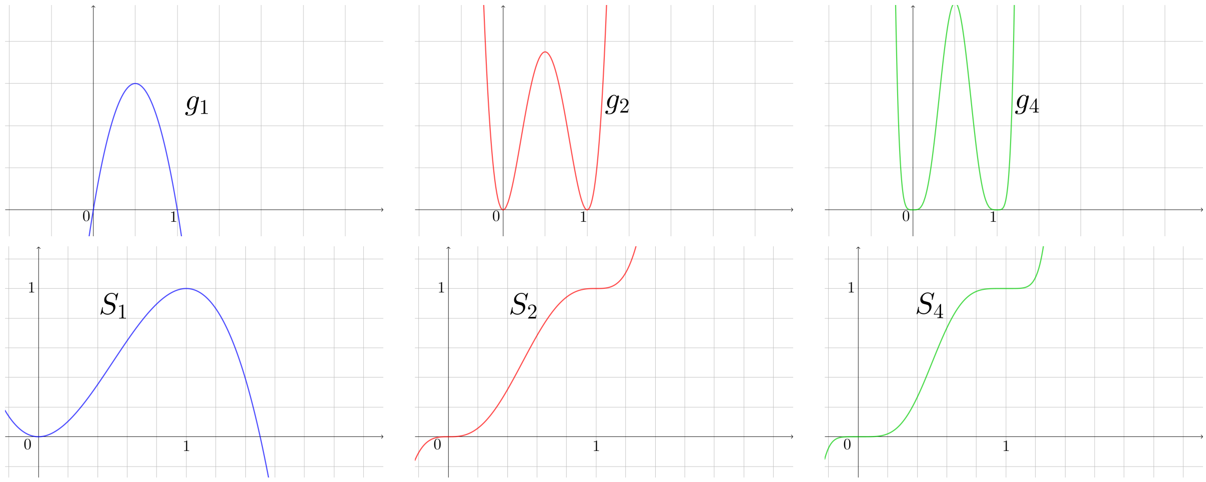

FIGURE 3. Construction des fonctions rampes comme primitives de fonctions de plus en plus pointues.

Comme P est positif sur $[0,1]$, ses puissances aussi, et donc pour tout r, la fonction S_r est croissante sur $[0,1]$. Elle est bien sûr polynomiale, et vaut 0 en 0 et 1 en 1. Il nous reste à prouver que, pour r assez grand, S_r est bien sous la droite d'équation $y = \delta x$ lorsque $x \in [0,\alpha]$ (et la condition analogue après β).

Puisque P est croissant sur $[0,1/2]$, on a :

$$\forall t \in [0,\alpha],\ P(t) \leqslant P(\alpha)$$

et donc pour tout $x \in [0,\alpha]$:

$$\int_0^x P^r(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x P^r(\alpha)\mathrm{d}t.$$

En divisant par $\int_0^1 P^r$ on en déduit que pour tout $x \in [0,\alpha]$:

$$0 \leqslant S_r(x) \leqslant \left(\frac{P(\alpha)}{\left(\int_0^1 P^r(t)\mathrm{d}t\right)^{1/r}}\right)^r x = \left(\frac{P(\alpha)}{\|P\|_r}\right)^r x.$$

Or $P(\alpha) < 1 = P(1/2)$ par stricte croissance de P sur $[0, 1/2]$, et $\|P\|_r \underset{r\infty}{\longrightarrow} \|P\|_\infty = 1$ (voir par exemple *Théorie de l'intégration* de Briane & Pagès pour une preuve de ce résultat). D'où

$$\left(\frac{P(\alpha)}{\|P\|_r}\right)^r \underset{r\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, pour r suffisamment grand, on a bien :

$$\forall x \in [0, \alpha],\ 0 \leqslant S_r(x) \leqslant \delta x.$$

Enfin, un petit changement de variable permet de montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$S_r(1 - x) = 1 - S_r(x).$$

En utilisant cette propriété de symétrie, on montre sans souci la deuxième inégalité sur le comportement de S_r au-delà de β.

□

Étape 2 : On met en place la stratégie annoncée dans l'heuristique, l'étape 1 nous donnant une fonction polynomiale qui « ressemble » à l'indicatrice de $[1/2, 1]$.

Soit α, β, δ comme dans le lemme 3.3, et soit S une fonction polynomiale qui satisfait les conditions de ce lemme. On utilisera aussi (enfin !) l'hypothèse $a_n \underset{n\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$: on fixe donc un $C > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $n|a_n| \leqslant C$.

Pour $x \in]0, 1[$, on note

$$p(x) := \max\{n \in \mathbf{N},\ x^n \geqslant \beta\}$$
$$q(x) := \min\{n \in \mathbf{N},\ x^n \leqslant \alpha\}$$

On a (en écrivant explicitement $p(x)$ et $q(x)$ avec des parties entières) :

$$p(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln\beta}{\ln x} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln\beta}{x-1} = \frac{\ln(1/\beta)}{1-x}$$

$$q(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln\alpha}{\ln x} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln\alpha}{x-1} = \frac{\ln(1/\alpha)}{1-x}$$

Plus x est proche de 1, et plus les x^n restent longtemps au-dessus de β, donc c'est la somme partielle des a_n arrêtée à $p(x)$ dont le comportement quand $x \to 1^-$ mime celui des sommes partielles des a_n. Comme on veut montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = l$, on regarde la différence suivante :

$$\left|\sum_{n=0}^{p(x)} a_n \ - \ l\right|.$$

On fait $\pm \sum_{n=0}^{+\infty} a_n S(x^n)$ à l'intérieur puis quelques inégalités triangulaires pour obtenir :

$$\left|\sum_{n=0}^{p(x)} a_n \ - \ l\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{p(x)} a_n\left(1 - S(x^n)\right)\right| + \left|\sum_{n=p(x)+1}^{q(x)-1} a_n S(x^n)\right| + \left|\sum_{n=q(x)}^{+\infty} a_n S(x^n)\right| + \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n S(x^n) - l\right|$$

Dans la première somme, le terme en $n = 0$ est nul car $S(1) = 1$.
On utilise ensuite la domination $|a_n| \leqslant \frac{C}{n}$ valable pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, ainsi que les majorations de S ou $1 - S$ données par le lemme 3.3. D'où

$$\left|\sum_{n=0}^{p(x)} a_n \;-\; l\right| \leqslant C\delta \sum_{n=1}^{p(x)} \frac{(1-x)^n}{n} + C \sum_{n=p(x)+1}^{q(x)-1} \frac{1}{n} + C\delta \sum_{n=q(x)}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n S(x^n) - l\right|.$$

(Pour que toutes les sommes qui apparaissent soient bien « dans le bon sens » et ne portent pas sur l'ensemble vide, il faut supposer x assez proche de 1 pour que les x^n restent d'abord supérieurs à β, puis passent sous α plus tard. Mais comme β est voué à tendre vers $1/2$ et x à tendre vers 1, on peut effectivement supposer cela (voir l'étape de conclusion)).

On utilise ensuite que $\frac{1-x^n}{n} = (1-x)\frac{1+x+\cdots+x^{n-1}}{n} \leqslant 1-x$ pour majorer la première somme, puis une comparaison série-intégrale pour la deuxième somme, et enfin on majore les $\frac{x^n}{n}$ de la troisième somme par des $\frac{x^n}{q(x)}$, ce qui nous donne :

$$\left|\sum_{n=0}^{p(x)} a_n \;-\; l\right| \leqslant C\delta p(x)(1-x) + C\ln\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right) + \frac{C\delta}{q(x)(1-x)} + \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n S(x^n) - l\right|.$$

En utilisant les équivalents de $p(x)$ et $q(x)$ et le fait que $\sum a_n S(x^n) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} S(1)l = l$, on en déduit que

$$\limsup_{x\to 1^-} \left|\sum_{n=0}^{p(x)} a_n \;-\; l\right| \leqslant C\delta \ln\left(\frac{1}{\beta}\right) + C\ln\left(\frac{\ln(\alpha)}{\ln(\beta)}\right) + \frac{C\delta}{\ln(1/\alpha)} + 0.$$

Enfin, comme l'inégalité ci-dessus est valable pour tout (α, β, δ) comme dans le lemme 3.3, on peut faire tendre (α, β, δ) vers $(1/2, 1/2, 0)$, et on obtient alors que

$$\limsup_{x\to 1^-} \left|\sum_{n=0}^{p(x)} a_n \;-\; l\right| = 0$$

ce qui fournit le résultat.

J'ai été longtemps perturbé par cette $\limsup$ *quand $x \to 1^-$, je connaissais seulement la définition de* $\limsup$ *pour des suites. La définition de* $\limsup$ *dans un cas assez général est donnée au début du* Zuily & Queffélec. *Cependant, si on ne veut pas en parler, on peut tout faire avec des suites. En effet, pour tout $x \in]0,1[$, $p(x) = \lfloor \frac{\ln\beta}{\ln x} \rfloor$ et la fonction $x \mapsto \ln\beta/\ln x$ est continue et tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 1^-$, donc on peut trouver une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ tendant vers 1 par valeurs inférieures, et telle que pour tout n suffisamment grand, $p(x_n) = n$. On utilise alors les inégalités précédentes en mettant x_n à la place de x, et on prend une* $\limsup$ *de suite classique.*
Finalement,

$$\limsup_{n\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \;-\; l\right| = 0$$

donc $\sum a_n$ converge et sa somme est égale à l, ce qui est exactement le résultat voulu !

□

Remarque :
Les théorèmes énoncés jusqu'à présent faisaient intervenir la notion de série Abel-sommable, et la notion de série convergente classique. Il existe encore d'autres subtilités, comme les séries Cesàro-sommables, ou sommables au sens de Hölder... L'étude des différentes méthodes de sommation a été l'un des sujets majeurs de l'analyse au début du vingtième siècle. Pour aller plus loin dans ces notions, voir par exemple le Choimet & Queffélec et l'article de Nicolas Tosel, déjà mentionnés plus haut.

4. Le théorème des hauts indices

À titre culturel, voici l'énoncé d'un théorème qui donne un type de séries pour lesquelles on a une réciproque inconditionnelle au théorème d'Abel (c'est-à-dire sans condition du type $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ou autre) : les séries lacunaires.

Théorème 4.1 :
Soit $(n_k)_{k\geqslant 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels. On suppose qu'il existe $q > 1$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $n_{k+1} \geqslant q n_k$ (la suite des n_k fera donc de grands sauts lorsque k est grand, d'où le nom de série lacunaire pour la série qui va suivre). On suppose que la série $\sum a_k x^{n_k}$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{n_k} \quad \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \quad l \in \mathbf{C}.$$

Alors $\sum a_k$ converge.

Démo : Voir toujours le même article de la RMS 128-4. □

5. Points réguliers, points singuliers

Jusque là, nous nous sommes intéressés aux liens entre limite au bord pour la somme de la série entière, et convergence de la série en ce point. On regardait donc plutôt la question du prolongement par continuité de la série entière. Nous allons maintenant discuter de la question du prolongement holomorphe d'une série entière en un point du bord. On commence par introduire les notions de points singuliers et de points réguliers.

Définition 5.1 :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 (pour fixer les idées). Comme avant, on note f la fonction holomorphe sur $D(0,1)$ définie comme la somme de cette série. On dit qu'un point z_0 du cercle unité est :

- *régulier* pour cette série si il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction holomorphe g définie sur $D(z_0, \varepsilon)$ telle que g coïncide avec f sur $D(z_0,\varepsilon) \cap D(0,1)$.
- *singulier* pour cette série si il n'est pas régulier.

Remarque :

- L'ensemble des points réguliers pour $\sum a_n z^n$ est un ouvert de $\mathbf{S}^1$.
- On dit que le cercle unité $\mathbf{S}^1$ est une *coupure* pour la série entière si tous les points du cercle sont singuliers.

Une jolie application de la compacité est le résultat suivant, dont on peut trouver une démonstration dans *Analyse réelle et complexe* de W. Rudin.

Proposition 5.2 :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. Au moins un point du cercle unité est un point *singulier* pour cette série.

Esquisse de preuve. Si tous les points étaient réguliers, on pourrait recouvrir le cercle unité par une union de disques sur lesquels f admet un prolongement holomorphe :

$$\mathbf{S}^1 \subseteq \bigcup_{z\in\mathbf{S}^1} D(z, \varepsilon_z)$$

où sur chaque $D(z, \varepsilon_z)$ on dispose d'une fonction holomorphe g_z qui prolonge f. Par compacité de $\mathbf{S}^1$, on pourrait extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini : $\mathbf{S}^1 \subseteq \bigcup_{i=1}^N D(z_i, \varepsilon_i)$. Mais alors

$$D(0,1) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} D(z_i, \varepsilon_i) \right)$$

contient un disque de rayon un peu plus que 1 : $D(0, 1+\eta)$, sur lequel f se prolonge de manière holomorphe. Ceci contredit le fait que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est exactement 1. $\square$

On passe maintenant à une splendide intervention des probabilités (et de la loi du 0-1 !!!) pour montrer un théorème d'analyse. On va montrer qu'on peut trouver une perturbation des arguments des coefficients d'une série entière qui fait du cercle unité une coupure pour la série perturbée. Pour cela, on montre que presque toute perturbation convient !

Théorème 5.3 (Steinhaus) **:**
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires iid suivant la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note

$$f_\omega \colon z \in D(0,1) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{i\theta_n(\omega)} z^n.$$

Pour presque tout $\omega \in \Omega$, le cercle unité est une coupure pour f_ω. En particulier, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que le cercle unité est une coupure pour $\sum a_n \mathrm{e}^{i\varphi_n} z^n$!

Démo : Références possibles : Une démonstration est faite dans *Probabilités pour les non-probabilistes*, mais ce n'est pas ma préférée. Celle qui suit est très inspirée par celle du Garet & Kurtzmann (exercice 106 p.355, corrigé p.459), ainsi que de la version de Benjamin Havret (poly de développements disponible sur sa page).

On commence par rappeler le résultat suivant :

Lemme 5.4 (Hadamard) **:**
Le rayon de convergence R de $\sum c_n z^n$ vérifie $\frac{1}{R} = \limsup_{n\infty} |c_n|^{1/n}$ avec les conventions classiques pour $\frac{1}{0}$ et $\frac{1}{\infty}$.

Passons à la démonstration du théorème 5.3 :

Étape 1 : Pour tout $z \in D(0,1)$, on introduit l'évènement (on justifie plus bas que c'en est bien un) :

$$A(z) := \left\{ \omega \in \Omega \mid \limsup_{n\infty} \left| \frac{f_\omega^{(n)}(z)}{n!} \right|^{1/n} < \frac{1}{1-|z|} \right\}.$$

D'après le lemme 5.4, ω appartient à $A(z)$ si et seulement si la série de Taylor de f_ω en z a un rayon de convergence qui excède la distance entre z et le cercle unité. Autrement dit, lorsque le disque de convergence de la série de Taylor de f_ω en z « déborde » un peu du disque unité.

On en déduit que pour tout $\xi \in \mathbf{S}^1$, ξ est régulier pour f_ω si et seulement si il existe un $r \in [0,1[$ tel que $\omega \in A(r\xi)$.
En effet :

- Si ξ est régulier pour f_ω, alors il existe $\rho > 0$ tel que f_ω se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(\xi, \rho)$.

  Alors le rayon de convergence de la série de Taylor de f_ω en $\left(1 - \frac{\rho}{3}\right)\xi$ est au moins égal à $\frac{2\rho}{3}$ (voir la figure suivante). En particulier, le domaine de convergence de la série de Taylor de f_ω en ce point « déborde » du disque unité. Donc $\omega \in A\left(\left(1 - \frac{\rho}{3}\right)\xi\right)$.

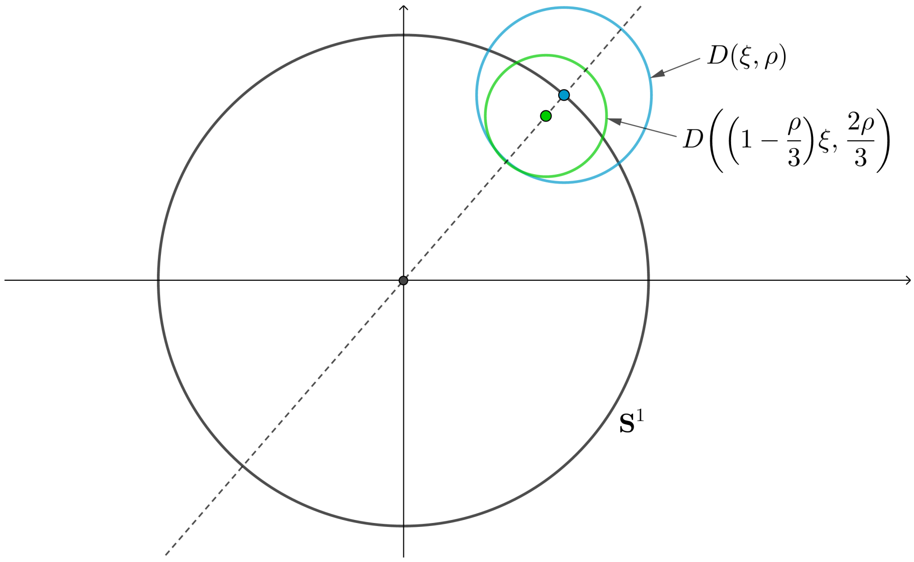

Figure 4. Si ξ est régulier pour f_ω alors $\omega \in A(r\xi)$ pour un certain $r \in [0,1[$.

- Réciproquement, s'il existe un $r \in [0,1[$ tel que $\omega \in A(r\xi)$, alors : la série de Taylor de f_ω en $r\xi$ à un rayon de convergence strictement supérieur à la distance au bord du disque unité. En particulier ξ est à l'intérieur du disque de convergence de cette série, donc comme une série entière est analytique, il y a un petit disque autour de ξ sur lequel f_ω se prolonge par une série entière. Comme une série entière est holomorphe, ξ est bien régulier pour f_ω.

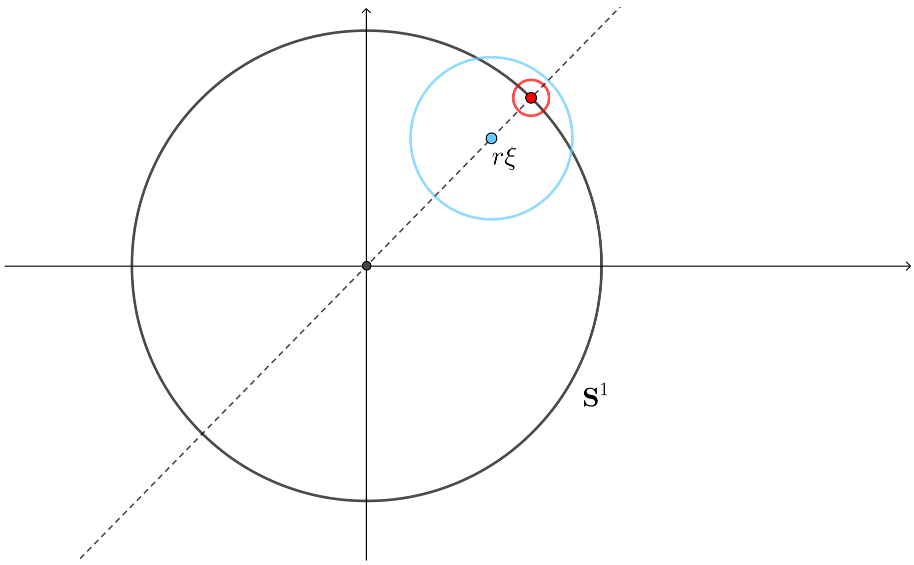

Figure 5. Si il existe $r \in [0,1[$ tel que $\omega \in A(r\xi)$ alors ξ est régulier pour f_ω.

Remarque :
Est-il clair que la série de Taylor définie sur le petit disque rouge prolonge bien f_ω ? Dans le doute je donne quelques arguments qui me réconfortent un peu, mais je suis preneur de toute explication plus directe. La série de Taylor de f_ω en $r\xi$ a un rayon de convergence $\rho > 1-r$ qui lui permet de déborder du disque unité (le disque $D(r\xi,\rho)$ est le disque bleu sur la figure ci-dessus). On note g_ω sa somme, définie sur $D(r\xi,\rho)$. Alors f_ω et g_ω coïncident sur $D(r\xi,1-r)$, qui admet un point d'accumulation, donc elles coïncident

sur tout $D(0,1) \cap D(r\xi, \rho)$. La série de Taylor de g_ω en ξ coïncide alors avec g_ω sur le petit disque rouge, donc avec f_ω sur l'intersection du petit disque rouge et du disque unité ouvert.

Étape 2 : Montrons que $\mathbf{P}\left(A(z)\right)$ ne dépend que de $|z|$.

Soit $r \in [0,1[$, et soit $\xi \in \mathbf{S}^1$. On veut montrer que $A(r\xi) = A(r)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, pour tout $z \in D(0,1)$, on a :

$$\begin{cases} f_\omega(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{i\theta_n(\omega)} z^n \\ f'_\omega(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} \mathrm{e}^{i\theta_{n+1}(\omega)} z^n \\ \qquad\vdots \\ f_\omega^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dots(n+k) a_{n+k} \mathrm{e}^{i\theta_{n+k}(\omega)} z^n \end{cases}$$

de sorte qu'à z fixé, la fonction

$$G_z \colon \omega \mapsto \limsup_{n\infty} \left| \frac{f_\omega^{(n)}(z)}{n!} \right|^{1/n}$$

est bien une fonction mesurable de ω. En effet, les θ_i sont mesurables, et ensuite on ne fait que composer par des fonctions boréliennes, puis prendre des limites et des lim sup de fonctions mesurables. Ainsi,

$$A(z) = G_z^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{1-|z|}\right[\right) \in \mathscr{F}.$$

Maintenant,

$$A(r) = \left\{ w \in \Omega, \quad \left| \limsup_{k\infty} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dots(n+k) a_{n+k} \mathrm{e}^{i\theta_{n+k}(\omega)} r^n}{k!} \right|^{1/k} < \frac{1}{1-r} \right\}$$

et

$$A(r\xi) = \left\{ w \in \Omega, \quad \left| \limsup_{k\infty} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dots(n+k) a_{n+k} \mathrm{e}^{i\theta_{n+k}(\omega)} \xi^n r^n}{k!} \right|^{1/k} < \frac{1}{1-r} \right\}.$$

Or $\left(\mathrm{e}^{i\theta_n}\right)_{n\in\mathbf{N}} \overset{\text{loi}}{=} \left(\mathrm{e}^{i\theta_n}\xi^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ car les θ_n sont iid de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$, donc

$$\mathbf{P}(A(r)) = \mathbf{P}(A(r\xi)).$$

Attention, l'indépendance est essentielle pour assurer l'égalité en loi des processus complets, et pas juste terme à terme. Ces deux processus suivent tous deux la loi $\mathcal{U}\left(\mathbf{S}^1\right)^{\otimes \mathbf{N}}$.

Étape 3 : On montre que $A(z)$ est un évènement asymptotique.

Notons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{F}_n := \sigma(\theta_n, \theta_{n+1}, \dots)$ et

$$\mathscr{F}_\infty := \bigcap_{n \geqslant 0} \mathscr{F}_n$$

Fixons un z dans $D(0,1)$ et un $N \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $k \geqslant N$,

$$\omega \mapsto f_\omega^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\dots(n+k) a_{n+k} \mathrm{e}^{i\theta_{n+k}(\omega)} z^n$$

est $\mathscr{F}_k$-mesurable (en tant que limite simple de fonctions $\mathscr{F}_k$-mesurables). Elle est donc $\mathscr{F}_N$-mesurable. Donc pour tout $n \geqslant N$,

$$\omega \mapsto \sup_{k \geqslant n} \left| \frac{f_\omega^{(k)}(z)}{k!} \right|^{1/k}$$

est $\mathscr{F}_N$-mesurable, comme sup de fonctions $\mathscr{F}_N$-mesurables. Donc

$$\omega \mapsto \limsup_{n\infty} \left| \frac{f_\omega^{(n)}(z)}{n!} \right|^{1/n}$$

est $\mathscr{F}_N$-mesurable, comme limite simple de fonction $\mathscr{F}_N$-mesurables à partir d'un certain rang. Ainsi, $A(z) \in \mathscr{F}_N$. Puisque N était quelconque, on a bien montré que $A(z) \in \mathscr{F}_\infty$.

Étape 4 : On montre que pour tout $z \in D(0,1)$, $\mathbf{P}(A(z)) = 0$.

D'après l'étape précédente, pour tout $z \in D(0,1)$, $\mathbf{P}(A(z)) \in \{0,1\}$. En effet, les θ_i sont indépendantes, donc on peut appliquer la loi du 0-1 de KOLMOGOROV pour les évènements asymptotiques associés.
Supposons, par l'absurde, qu'il existe un $z \in D(0,1)$ tel que $\mathbf{P}(A(z)) = 1$. On introduit les évènements

$$A(z,b) := \left\{ \omega \in \Omega \mid \limsup_{n\infty} \left| \frac{f_\omega^{(n)}(z)}{n!} \right|^{1/n} \leqslant \frac{b}{1-|z|} \right\}$$

pour tout $b \in]0,1[$. Par continuité croissante, on a :

$$\mathbf{P}(A(z)) = \lim_{b \to 1^-} \mathbf{P}(A(z,b)).$$

Puisque $\mathbf{P}(A(z)) = 1$, on trouve $b \in]0,1[$ tel que $\mathbf{P}(A(z,b)) \geqslant 1/2$. Or les mêmes arguments que précédemment montrent que $A(z,b)$ est aussi un évènement asymptotique, donc de probabilité égale à 0 ou 1. Ainsi, $\mathbf{P}(A(z,b)) = 1$.
On montre également qu'à b fixé, les $\mathbf{P}(A(z,b))$ ne dépendent que de $|z|$, et donc on a finalement trouvé un $b \in]0,1[$ et un $r \in [0,1]$ tels que :

$$\forall \xi \in \mathbf{S}^1,\ \mathbf{P}(A(r\xi, b)) = 1.$$

Maintenant, on extrait du recouvrement ouvert

$$\mathbf{S}^1 \subseteq \bigcup_{\xi \in \mathbf{S}^1} D\left(r\xi, \frac{1-r}{b}\right)$$

un sous-recouvrement fini :

$$\mathbf{S}^1 \subseteq \bigcup_{i=1}^m D\left(r\xi_i, \frac{1-r}{b}\right).$$

Alors pour tout ω dans $\bigcap_{i=1}^m A(r\xi_i, b)$, qui est un évènement presque-sûr (donc non vide !), tous les points de $\mathbf{S}^1$ sont réguliers pour f_ω. En effet, prenons $\omega \in \bigcap_{i=1}^m A(r\xi_i, b)$, et $\xi \in \mathbf{S}^1$. Alors il existe un $i \in [\![1,m]\!]$ tel que $\xi \in D\left(r\xi_i, \frac{1-r}{b}\right)$. Puisque $\omega \in A(r\xi_i, b)$, la série de Taylor de f_ω en $r\xi_i$ a un rayon de convergence au moins égal à $\frac{1-r}{b}$ (regarder la définition de l'évènement $A(z,b)$). Donc tous les points de $D\left(r\xi_i, \frac{1-r}{b}\right) \cap \mathbf{S}^1$ sont réguliers pour f_ω. En particulier, ξ l'est.

Bref, pour au moins un ω (en fait pour presque tous !), tous les points de $\mathbf{S}^1$ sont réguliers pour f_ω ce qui contredit la proposition 5.2. Cette contradiction conclut notre raisonnement par l'absurde, et on a bien montré que pour tout $z \in D(0,1)$, $\mathbf{P}(A(z)) = 0$.

Étape 5 : Conclusion !

D'après l'étape précédente, l'évènement

$$B := \bigcup_{\substack{r \in \mathbf{Q} \cap [0,1[\\ q \in \mathbf{Q}}} A\left(r\mathrm{e}^{2i\pi q}\right)$$

est négligeable (union dénombrable de négligeables). Sur son complémentaire, tous les $\mathrm{e}^{2i\pi q}$ sont singuliers (voir l'étape 1, et remarquer qu'on peut choisir r rationnel dans l'équivalence). Mais comme les $\mathrm{e}^{2i\pi q}$, $q \in \mathbf{Q}$ sont denses dans le cercle et que l'ensemble des points réguliers est un ouvert, on en déduit que tous les points du cercle sont singuliers. Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega \setminus B$, le cercle unité est une coupure pour f_ω, ce qui conclut.

$\square$

Remarque :
Si ce développement vous a donné envie de regarder des choses sur les séries aléatoires, voici deux chouettes exercices traités dans *Probabilités pour les non-probabilistes* :

- *Séries harmoniques de signe aléatoire*, à la page 649, où l'on s'intéresse à la convergence de $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$, où les ε_n sont des variables aléatoires indépedantes prenant les valeurs -1 et 1 (on tire à pile ou face le signe de chaque terme).
- *Rayon d'une série entière aléatoire*, à la page 651, où l'on montre que sous certaines hypothèses, le rayon de convergence d'une série aléatoire est presque sûrement constant, égal à 0, 1 ou $+\infty$.

Pour finir, citons sans démonstration un autre théorème qui peut faire l'objet d'un développement. Je crois qu'on peut en trouver une démonstration dans le ZUILY & QUEFFÉLEC. Il s'agit du théorème des lacunes d'OSTROWSKI-HADAMARD.

Théorème 5.5 :
Soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'entiers strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant \alpha$. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que le rayon de convergence de $\sum a_n z^{\lambda_n}$ soit égal à 1.
Alors $\mathbf{S}^1$ est une coupure pour la série $\sum a_n z^{\lambda_n}$.

6. Annexe

6.1. Une série entière est holomorphe

Dans un cours de fonctions holomorphes, un partie qui nous occupe longtemps est de montrer l'équivalence entre holomorphie et analyticité, le sens compliqué étant de montrer qu'une fonction holomorphe est analytique. En effet, on fait appel aux outils un peu nouveaux que sont les intégrales le long d'un chemin, pour aboutir aux célèbres formules de CAUCHY. Cependant, je trouve que l'autre sens, qui revient à montrer qu'une série entière est holomorphe, n'est pas complètement évident. La démonstration que je présente est très largement inspirée de celle lue dans *Topologie, calcul différentiel et variable complexe* de Jean SAINT-RAYMOND.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f la fonction définie sur $D(0, R)$ comme la somme de cette série entière. Fixons un $z_0 \in D(0, R)$, et montrons que f est holomorphe en z_0. C'est-à-dire, montrons que le taux de variation

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

converge vers un certain complexe ξ lorsque h tend vers 0 dans $\mathbf{C}$.

Soit r tel que $|z_0| < r < R$, et soit $\rho := r - |z_0| > 0$.

Pour tout $h \in \overline{D}(0, \rho)$, $z_0 + h \in \overline{D}(0, r) \subseteq D(0, R)$, donc $f(z_0 + h)$ est bien défini. De plus, on a :

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{a_n(z_0 + h)^n - a_n z_0^n}{h}}_{=:\ u_n(h)}.$$

Chaque fonction u_n se prolonge par continuité en 0, en posant $u_n(0) = n a_n z_0^{n-1}$ (on utilise juste le fait qu'un polynôme est holomorphe). Pour conclure, on aimerait donc passer à la limite quand h tend vers 0, et échanger la somme et la limite dans le terme de droite. Si on montre que la série des u_n converge uniformément sur $\overline{D}(0, \rho)$, on aura gagné !

On va montrer que cette série converge même normalement sur $\overline{D}(0, \rho)$. En effet, pour tout $h \in \overline{D}(0, \rho)$, on a :

$$\frac{a_n(z_0 + h)^n - a_n z_0^n}{h} = \frac{a_n}{h}(z_0 + h - z_0) \sum_{j=0}^{n-1} (z_0 + h)^j z_0^{n-1-j}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n(z_0 + h)^n - a_n z_0^n}{h} \right| &\leqslant |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} |z_0 + h|^j |z_0|^{n-1-j} \\ &\leqslant |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} r^j r^{n-1-j} \\ &= n|a_n| r^{n-1} \end{aligned}$$

et ce dernier terme est indépendant de $h \in \overline{D}(0, \rho)$ et est le terme général d'une série convergente, car $r < R$ (et $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence, comme on peut le voir avec la formule de HADAMARD pour le rayon de convergence, ou un peu plus manuellement. C'est aussi démontré dans la référence indiquée en début de preuve).

On a donc bien montré que la convergence de la série des u_n était normale sur $\overline{D}(0, \rho)$, donc uniforme. Ceci légitime l'interversion de la somme et de la limite, et on obtient :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{h \to 0} u_n(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

Ainsi, f est holomorphe en sur $D(0, R)$, et sa dérivée est bien la dérivée terme à terme de la série entière.

6.2. Une série entière est analytique

Ce fait découle du fait qu'une série entière est holomorphe, et de l'équivalence entre holomorphie et analyticité. Cependant ce résultat fait appel à toute la théorie de CAUCHY, il peut donc être bon de savoir qu'on peut montrer qu'une série entière est analytique par des moyens moins sophistiqués.

Proposition 6.1 :
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1 (juste pour alléger les notations, mais tout marche pareil en prenant un rayon R strictement positif). Soit f la fonction définie sur $D(0,1)$ comme la somme de la série entière :

$$\forall z \in D(0,1),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Alors f est analytique : c'est-à-dire développable en série entière au voisinage de tout point dans $D(0,1)$.

Démo : C'est celle trouvée dans ce (super[1]) polycopié de cours sur les fonctions holomorphes : https://www.math.u-psud.fr/~hulin/poly-holo.pdf (proposition 1.18, pages 10 et 11).
Je rajoute quelques détails.

Fixons un $z_0 \in D(0,1)$. On veut montrer que f est en fait développable en série entière autour de z_0. Qu'est-ce que ça veut dire exactement ? On veut montrer qu'il existe une suite (b_n) de nombres complexes (qui dépendent de z_0 bien sûr), tels que la série $\sum b_n z^n$ ait un rayon de convergence strictement positif, disons ρ, et que pour tout $z \in D(z_0, \rho)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n. \tag{1}$$

Bref, il y a quelque chose à démontrer, car on sait juste que f est globalement somme d'une série entière centrée en 0 (sur tout $D(0,1)$), mais ce n'est pas du tout immédiat que f est localement, au voisinage de z_0, la somme d'une série entière centrée en z_0.

- **Étape 1 :** *On devine qui seront les b_n.*

  Si une telle suite (b_n) existe, alors comme $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence disons $\rho > 0$, on a pour tout $z \in D(z_0, \rho)$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

  $$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+n)!}{k!} b_{k+n} (z-z_0)^k.$$

  (il suffit de dériver terme à terme l'égalité (1), ce qui est licite à l'intérieur du disque de convergence). En particulier, en évaluant en z_0, on obtient

  $$f^{(n)}(z_0) = n! b_n.$$

  Ainsi, il n'y a plus de suspense, si les b_n existent, ils n'ont d'autre choix que d'être égaux aux coefficients du développement de Taylor :

[1] Je ne suis pas allé jusqu'au bout, mais en tout cas le début, jusqu'à l'équivalence entre « holomorphe », « analytique », « satisfait la formule de Cauchy » et critère de Morera, m'a beaucoup plu !

$$b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

- **Étape 2 :** *On vérifie que la série* $\sum b_n z^n$ *a un rayon de convergence strictement positif.*

On montre que le rayon de convergence est au moins égal à la distance de z_0 au bord du disque, c'est à dire $1 - |z_0|$. Prenons donc $0 \leqslant r < 1 - |z_0|$ et montrons que la série de terme général $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n$ converge absolument.

Là encore, en dérivant terme à terme à l'intérieur du disque de convergence l'égalité

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

on montre facilement que :

$$f^{(n)}(z_0) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+n)!}{m!} a_{m+n} z_0^m,$$

d'où

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+n)!}{m!} |a_{m+n}||z_0|^m.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} r^n &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} |a_{m+n}||z_0|^m r^n \\ &= \sum_{N=0}^{+\infty} |a_N| \sum_{m+n=N} \binom{N}{n} r^n |z_0|^m \end{aligned}$$

où cette dernière égalité est due au théorème de sommation par paquets. En effet, comme on a mis des modules, on peut sommer dans l'ordre qu'on veut car tout est positif, et on choisit de partitionner $\mathbf{N}^2$ comme

$$\bigcup_{N=0}^{+\infty} \{(m,n) \in \mathbf{N}^2 \mid m+n = N\}.$$

Mais là ce qui est génial, c'est que la dernière somme intérieure est exactement $(r + |z_0|)^N$. Donc finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} r^n \leqslant \sum_{N=0}^{+\infty} |a_N| (r + |z_0|)^N$$

et cette dernière somme est finie car comme $r < 1 - |z_0|$, on a $r + |z_0| \in D(0,1)$ et donc la convergence absolue de $\sum a_n z^n$ sur $D(0,1)$ nous permet de conclure.

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} r^n < +\infty$$

pour tout $0 \leqslant r < 1 - |z_0|$, ce qui montre bien que la série entière

$$\sum \frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} z^n$$

a un rayon de convergence supérieur ou égal à $1 - |z_0|$.

NB : On a juste « supérieur ou égal ». Il peut arriver que la série de Taylor de f en z_0 ait un disque de convergence qui déborde de $D(0,1)$, rien ne l'interdit.

- **Étape 3 :** *On montre que sur un petit disque autour de z_0, on a bien l'égalité*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

D'après l'étape précédente, on sait que pour tout $z \in D(z_0, 1 - |z_0|)$, la somme suivante est bien définie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

On veut maintenant montrer qu'elle est égale à $f(z)$ sur ce disque. Là encore, on remplace $f^{(n)}(z_0)$ par

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+n)!}{m!} a_{m+n} z_0^m$$

(cf. le début de l'étape 2), et on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} a_{m+n} z_0^m (z - z_0)^n.$$

On utilise à nouveau le théorème de sommation par paquets, en sommant sur les $m+n = N$. Attention à bien mettre d'abord des valeurs absolues, montrer que la somme est finie, puis ensuite seulement faire la sommation par paquets sans les valeurs absolues. Mais en fait le calcul avec les valeurs absolues est le même qu'à l'étape 2, et on conclut vraiment de la même manière que la somme est finie. Bref,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{N=0}^{+\infty} a_N \underbrace{\sum_{m+n=N} \binom{N}{n} (z - z_0)^n z_0^m}_{=(z - z_0 + z_0)^N} = \sum_{N=0}^{+\infty} a_N z^N = f(z)$$

et on a fini !

□

7. Références

- Bertrand Hauchecorne, *Les contre-exemples en mathématiques.*
- Bernard Candelpergher, *Calcul intégral.*
- *Mathématiques MP, MP** de la collection Prépas sciences chez Ellipses.
- Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Analyse.*
- Zuily & Queffélec, *Analyse pour l'agrégation.*
- Choimet & Queffélec, *Analyse mathématique. Grands théorèmes du vingtième siècle.*
- Nicolas Tosel : *Rampes et théorèmes taubériens*, paru dans la RMS 128-4.
- Briane & Pagès, *Théorie de l'intégration.*
- W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.*
- Garet & Kurtzmann, *De l'intégration aux probabilités.*
- Développements de Benjamin Havret (poly de développements disponible sur sa page : http://www.normalesup.org/~havret/).
- Walter Appel, *Probabilités pour les non-probabilistes.*
- Jean Saint-Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe.*
- Cours sur les fonctions holomorphes de Dominique Hulin, disponible sur sa page web : https://www.math.u-psud.fr/~hulin/.