

Jour 1 : Modélisation option A

Tirage : Le texte que j'ai choisi est décrit très en détail en-dessous. L'autre texte tournait autour de physique statistique, avec des histoires de collisions de particules et d'états stationnaires. Je ne l'ai pas choisi car en parcourant le texte je ne voyais pas beaucoup de convergences en loi ou ps à illustrer. . .

Description du texte :

Le texte portait sur les tests d'indépendance. On regarde un n -échantillon Z_1, \dots, Z_n de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$. On se demandait comment tester, à partir d'une réalisation des Z_i , s'il était crédible de penser qu'elles étaient bien des observations de variables iid. Le texte évoquait comme motivation la méthode de Monte-Carlo, où simuler des variables aléatoires iid est important (ou encore en cryptographie).

Hypothèse (H_0) : Les Z_i sont iid de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Hypothèse (H_1) : (H_0)^c.

Une première partie portait sur la p -valeur. Mais la définition était rappelée / motivée / détaillée (je ne savais pas ce que c'était en arrivant). Le texte disait à peu près ça : On se donne $\varphi: \{0, 1\}^m \rightarrow \mathbf{R}$, et on considère la statistique $S = \varphi(Z_1, \dots, Z_n)$. On suppose que la fonction de répartition de S est connue, on la note F_0 . On se donne un seuil α (en pratique de l'ordre de 10^{-3}). On note :

$$v_\alpha := \inf\{x \in \mathbf{R} \mid F_0(x) \geq \alpha/2\}$$

et

$$w_\alpha := \sup\{x \in \mathbf{R} \mid 1 - F_0(x) \geq \alpha/2\}$$

On montre que

$$s \notin [v_\alpha, w_\alpha] \iff 2 \min(F_0(s), 1 - F_0(s)) < \alpha$$

(si je me souviens bien, je ne sais plus trop où étaient les inégalités larges / strictes, mais ça doit pouvoir se retrouver).

Ceci incite à considérer la variable aléatoire $p := 2 \min(F_0(S), 1 - F_0(S))$, qu'on appelle la p -valeur. Cette p -valeur vérifie la propriété intéressante suivante : Sous (H_0), on a :

$$\mathbf{P}(p < \alpha) \leq \alpha$$

Autrement dit, sous l'hypothèse (H_0), la statistique p (que l'on fabrique à partir des observations et de la connaissance de F_0) a une probabilité très faible de prendre une valeur très petite. Ceci mène à la règle de décision suivante :

Si p_{obs} (la valeur de p lorsqu'on a mis nos observations dedans) est strictement plus petite que α , on rejette (H_0) (au risque d'erreur α qui est très petit), et sinon on ne peut pas rejeter (H_0).

Cependant, cette règle de décision nous fait parfois rejeter (H_0) alors qu'on a juste eu la malchance de tomber sur une réalisation de proba très faible qui conduit à une valeur exceptionnellement petite de p . On peut donc essayer de calculer plusieurs fois la p -valeur pour voir si elle prend suffisamment souvent des valeurs trop petites pour légitimer ce rejet de (H_0). Si par exemple F_0 est continue, on va pouvoir faire un test de Kolmogorov-Smirnov. En effet, on peut montrer que si X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est continue, alors

la variable aléatoire $2 \min(F(X), 1 - F(X))$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Ainsi, si on suppose que F_0 est continue avec les notations ci-dessus, la variable p suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, et donc en simulant plusieurs échantillons et en tirant plusieurs valeurs p_1, \dots, p_N de la p -valeur, on va pouvoir faire un test de Kolmogorov-Smirnov avec pour loi cible la loi uniforme (qui est bien à fonction de répartition continue).

Dans le cas où F_0 n'est pas continue, on peut envisager un test du χ^2 . Cependant le texte évoquait ces deux manières de pousser plus loin le test de la p -valeur, sans se contenter d'une seule réalisation, mais ne détaillait pas et passait à d'autres tests.

Une deuxième partie présentait le test du nombre de 1. Sous l'hypothèse (H_0), si on note $S_n := \sum_{k=1}^n Z_k$, on a $\frac{2S_n - n}{\sqrt{n}}$ qui converge en loi vers une $\mathcal{N}(0, 1)$. Ceci conduit à considérer la p -valeur

$$p := 2 \min \left(\Phi \left(\frac{2S_n - n}{\sqrt{n}} \right), 1 - \Phi \left(\frac{2S_n - n}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On fait ici l'abus d'identifier la loi de $\frac{2S_n - n}{\sqrt{n}}$ à une $\mathcal{N}(0, 1)$, afin d'obtenir une fonction de répartition qui est bien continue.

Une troisième partie introduisait le test des séries. Là, le principe était de compter les nombres de séries de 1 et de 0 qui apparaissaient dans notre observation. Par exemple si on observe 00111011000011, on a 6 séries en tout. Plus formellement, posons $Y_k := \mathbf{1}_{Z_k \neq Z_{k+1}}$ et considérons la statistique

$$V_n := 1 + \sum_{k=1}^{n-1} Y_k$$

Alors sous (H_0) les Y_i sont iid de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et donc on peut à nouveau appliquer un TCL et suivre les mêmes idées que dans le test précédent pour construire un test basé sur la p -valeur.

Ensuite, j'ai sauté un long passage, dont une partie consistait à expliquer comment tester l'hypothèse (\tilde{H}_0) : *Les Z_i sont iid de loi de Bernoulli de paramètre p lorsque p ne vaut pas $1/2$.* En effet, dans le test des séries précédents, l'indépendance vient du fait que le paramètre est $1/2$, on ne peut pas l'appliquer à des Bernoulli non-équitables.

Enfin (et c'est la raison pour laquelle j'ai sauté un long passage avant), la dernière partie nous faisait fabriquer une chaîne de Markov qui trompait les tests précédents ! L'idée est de simuler X_0 de loi uniforme sur $\{0, 1\}^m$, puis avec probabilité t on définit X_1 comme un autre tirage uniforme et indépendant, et avec probabilité $1 - t$ on dit que $X_1 = X_0$.

Ainsi, si t est grande, on a une forte probabilité de simuler à nouveau une uniforme sur $\{0, 1\}^m$. Si on fait passer les tests précédents à la concaténation de X_0, \dots, X_n , le test verra une suite de nm caractères dans $\{0, 1\}$, qui aura l'air iid ! En effet, il y a une très forte probabilité pour que ça soit une uniforme sur $\{0, 1\}^m$ suivie d'une uniforme sur $\{0, 1\}^m$ etc.

Questions posées : Précisez un peu comment mettre en place le test de Kolmogorov-Smirnov, comment scilab simule des chaînes de Markov, précisez le processus indépendant dans l'écriture de la chaîne de Markov $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$, démontrez tel résultat du texte (l'indépendance des Y_k), donnez l'énoncé du théorème ergodique, et plus généralement si on a pas une chaîne de Markov (j'ai répondu que je connaissais de nom le théorème de Birkhoff, mais que je ne saurais pas dire grand chose d'autre sur un théorème général sur l'ergodicité.), question de la simulation d'une loi qqc à partir d'une uniforme, et après dans le cas de variables de Bernoulli,

quelle est l'inverse généralisée ? Pourquoi dit-on que (H_0) est l'hypothèse privilégiée ? En pratique est-ce que l'hypothèse de fonction de répartition continue est satisfaite par la statistique S ?

Remarques générales : Il y avait 4 personnes dans le jury, dont une chargée de descendre le tableau blanc sur lequel les simulations étaient projetées, et une autre chargée de la télécommande pour le vidéoprojecteur. Ils étaient très réactifs, j'avais à peine le temps d'annoncer que j'allais montrer une simulation, et tout était déjà prêt. On ne perd donc aucun temps de ce côté là, ce qui est plutôt un gain par rapport aux soucis de temps de chauffe du projecteur etc. qu'on rencontrait parfois pendant la préparation. Sinon le jury est aussi bienveillant que le dit le rapport de jury, ils essayaient vraiment de faire dire des choses, disaient que ce n'était pas grave si on ne savait pas. . . Dans mon cas il n'y avait quasiment qu'une seule personne qui posait des questions, mais peut-être qu'elle était statisticienne et les autres plus probabilistes. Le tableau était assez grand (c'était un tableau blanc où l'on écrivait au feutre). Je n'ai pas eu besoin d'effacer pendant les 35 minutes, et ils me laissaient toujours effacer lorsque je demandais durant la phase de questions.

Pendant la préparation j'ai eu un coup de stress car en scrollant, l'ordinateur a changé de bureau, sauf que je n'ai pas compris, donc je croyais que Scilab s'était fermé brutalement, et que j'avais perdu mon code. Enregistrer très régulièrement permet de se rassurer je pense. Finalement je n'ai rien perdu, mais j'ai passé 3 minutes assez peu agréables.

Pour rassurer les futurs agrégatifs, j'ai passé un temps fou à essayer de retrouver l'inverse généralisée de la fonction de répartition d'une Bernoulli (et oui . . .), mais le jury ne s'est pas énervé, m'a aidé à le faire petit à petit, je me sentais mal mais ils ne m'ont pas mis de pression. Malgré cette belle preuve de maladresse, je n'ai pas eu une mauvaise note.

Jour 2 : Algèbre et géométrie

Couplage : Utilisation des nombres complexes en géométrie contre déterminant. J'ai choisi déterminant. J'avais travaillé la leçon nombres complexes en géométrie, et mes développements étaient peut-être plus sympas, mais je me suis dit que j'avais réfléchi à cette leçon seulement cette année, tandis que j'ai plus l'habitude d'utiliser les déterminants, donc je me disais qu'il serait plus facile de répondre à des questions ou de montrer du recul.

Description rapide du plan : J'ai rendu un plan découpé comme suit :

1. Définition du déterminant en algèbre linéaire : l'espace des formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ce qui conduit à la définition du déterminant en base \mathcal{B} d'une famille de n vecteurs. Puis la formule avec la somme sur les permutations (en signalant qu'elle s'étend sans problème quand on est à coefficients dans un anneau commutatif), la définition du déterminant d'une application linéaire, d'une matrice, les méthodes de calcul (développement par rapport à une ligne ou une colonne principalement, je n'ai pas eu la place de parler de pivot de Gauss). La référence principale que j'ai utilisée est le GRIFONE. Cas où le corps de base est \mathbf{R} ou \mathbf{C} : continuité du déterminant, conséquence : l'ensemble des matrices inversibles forme un ouvert.
2. Déterminants de matrices à coefficients dans un anneau commutatif. Cayley-Hamilton, résultants : le fait que le résultant reste dans l'idéal engendré par les 2 polynômes, que dans un anneau factoriel, la nullité du résultant équivaut à l'existence d'un facteur irréductible commun, le résultant de deux polynômes homogènes est homogène. . . (avec pour références le ULMER *Anneaux, corps, résultants*, et le GOZARD pour le développement).
3. Utilisation des déterminants en géométrie. Avec les conditions d'alignement de points / de concours de droites en coordonnées barycentrique, et le développement sur la conique

des 5 points (référence : EIDEN : *Géométrie analytique classique*). Puis l'interprétation du déterminant comme volume (GRIFONE : J'y ai découvert la preuve, pas si simple et plutôt jolie !). Le théorème de changement de variable et une mini application à l'identification de lois en proba : Si X suit une $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $Y = X^2$ suit une loi du χ^2 à un degré de liberté.

Regrets : Je n'ai pas mis l'interprétation des coordonnées barycentriques en termes d'aires orientées de petits triangles, qui était peut-être une plus jolie application que les conditions de concours et d'alignement. Je n'ai pas non plus mis de déterminants classiques (circulants, Vandermonde, Gram). Mais bon la place est limitée donc ce ne sont pas de vrais regrets car les 3 pages étaient remplies de choses qui à mon sens avaient vraiment leur place.

Développements proposés : Un théorème sur la façon dont le résultant joue avec les racines de polynômes (théorème IX.49 et corollaire IX.50 du livre *Théorie de Galois* d'Ivan GOZARD) et la conique des 5 points (avec la discussion sur l'unicité si 4 des 5 points ne sont jamais alignés, et la non-dégénérescence si 3 des 5 points ne sont jamais alignés). Le jury a choisi les résultats. On m'a demandé de répéter un argument, et d'expliquer une différence entre la formule annoncée dans le plan et celle montrée au tableau (j'avais juste fait rentrer un signe dans un produit, provoquant la disparition d'un terme en $(-1)^{mn} \dots$). J'ai mis longtemps à comprendre que c'était juste ça qu'ils voulaient dire, je croyais qu'ils pointaient une erreur.

Questions / discussion autour du plan :

- A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, est-ce que ce résultat est vrai pour des matrices à coefficients dans un anneau ? Sinon comment adapter ?
- Le déterminant de $f \in \mathcal{L}(E)$ ne dépend pas de la base ? Et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$?
- Démonstration de $\det(AB) = \det(A)\det(B)$? Il y a eu beaucoup de discussion autour de cette question et de la précédente. En fait dans les cours classiques d'algèbre linéaire, on montre d'abord que le déterminant d'une application linéaire ne dépend pas de la base, en utilisant comme argument central le fait que les formes n -linéaires alternées forment un ev de dimension 1. Puis on montre que $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$ assez facilement une fois qu'on sait que ça ne dépend pas de la base. Cependant j'avais plutôt en tête une démonstration où on démontre d'abord $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ par un calcul un peu fastidieux sur les sommes sur les permutations (qui a l'avantage de rester vrai quand les matrices sont à coefficients dans un anneau commutatif), et on en déduit la non-dépendance vis à vis du choix d'une base, en mettant les matrices de passage à droite et à gauche... Bref, je sentais qu'ils attendaient une autre démonstration que celle que j'avais (plus ou moins) en tête, et je n'arrivais pas à leur donner, c'était un peu loin dans ma mémoire. Résumons : être très au clair sur le fait que le déterminant d'une application linéaire de E dans E ne dépend pas du choix de la base, c'est-à-dire

$$\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)).$$

Ca donnerait sans aucun doute une bien meilleure impression au jury.

- Du chipotage sur la définition du résultant, bien dire que f et g sont de degré exactement m et n pour que la matrice de Sylvester soit de taille $(m+n) \times (m+n)$.
- Le résultant ça permet de détecter si des polynômes sont premiers entre eux, mais niveau complexité, c'est mieux de calculer un résultant ou de faire l'algorithme d'Euclide ?
- Dans la proposition sur le déterminant et le volume du parallélépipède engendré par n vecteurs, comment définit-on le volume si ce n'est par le déterminant ?

Exercices posés :

- Montrer qu'une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$ n'est jamais inversible
- Que pouvez vous dire du déterminant d'une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$? Je savais juste dire qu'il était positif, mais je ne savais pas plus, on est passés à autre chose sur un sympathique « vous avez le droit de ne pas savoir enfin ! »
- Expliquez que le discriminant est une fonction polynomiale en les coefficients de la matrice, et pourquoi c'est intéressant ? (le discriminant de la matrice voulait dire : le discriminant de son polynôme caractéristique). En particulier qu'est-ce qu'on peut dire d'une matrice dont le discriminant est non nul ? Est-ce qu'à partir de là on peut retrouver que les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$? Montrer que les matrices à discriminant non nul forment un ouvert dense.

Ressenti : Un peu déçu que le jury n'ait jamais posé de questions sur ma partie géométrie, que je préférerais à la partie résultants. Les questions ont beaucoup tourné autour des matrices à coefficients dans un anneau, quelles propriétés habituelles restent vraies, lesquelles ne marchent plus. Beaucoup de questions autour de la dépendance par rapport au choix d'une base des notions évoquées.

Jour 3 : Analyse et probabilités

Couplage : Fonctions spéciales (Mon impasse !) contre fonctions LEBESGUE-intégrables. LEBESGUE l'emporta.

Description rapide du plan : J'ai rendu un plan découpé comme suit :

1. Construction de l'intégrale au sens de LEBESGUE. Je suis parti du tout début (du coup c'était un peu long, je ne sais pas si c'était un très bon choix), tribu, tribu image, tribu image réciproque. Puis applications mesurables, fonctions étagées, et le lemme clef d'approximation des fonction mesurables positives par des fonctions étagées. Enfin la notion de mesure, l'existence et l'unicité de la mesure de Lebesgue (admise), puis enfin la définition de l'intégrale des fonctions étagées par rapport à une mesure, puis celle de l'intégrale des fonctions mesurables positives. Le théorème de Beppo Levi qui permet d'étendre les propriétés de linéarité, croissance... Et j'ai fini cette longue première partie par les fonctions à valeurs réelles ou complexes (où tout se ramène aux parties positives / négatives / réelles / imaginaires).
2. Théorèmes de convergence. Par manque de place j'ai juste énoncé le théorème de convergence dominée, et mis en remarque que les théorèmes de régularité sous l'intégrale en découlaient.
3. Espaces L^p , $1 \leq p < +\infty$: Les inégalités de Holder et de Minkowski, le fait que les \mathcal{L}^p ne sont pas des evn, donc on quotiente pour fabriquer les L^p . Ces derniers sont complets (théorème de Riesz-Fisher). Densité des fonction continues à support compact (c'est à partir de là qu'il est important d'avoir exclu le cas $p = +\infty$), application à la continuité des translations qui est utilisée dans le théorème de Fejér. Théorème de changement de variable, utilisé pour les espaces de Bergman.

Regrets : J'ai peut-être accordé trop de place à la partie construction de l'intégrale, mais en même temps ça me rassurait d'avoir les résultats propres sous les yeux, et de les revoir pendant la préparation. Du coup mon plan s'est accéléré sur la fin, ne me laissant pas la place de parler

de régularisation par convolution, ce qui est un peu dommage puisque je l'avais révisé récemment... M'enfin.

Développements proposés : Le théorème de Fejér L^p et les espaces de Bergman. Le jury a choisi Bergman. Il y a eu quelques questions autour du développement, notamment la distance de K à la frontière de U est bien atteinte, strictement positive... Comme je parlais de distance entre un fermé et un compact, c'est parti sur la notion d'adhérence et la caractérisation séquentielle de l'adhérence dans le cas métrique. Montrer l'équivalence. J'ai montré un sens, on est passés à autre chose. Ils m'ont demandé de préciser la partie où on identifie la limite L^2 et la limite pour la CVUSTC¹.

Questions / discussion autour du plan :

- Vous avez exclu le cas $p = +\infty$ de la partie espaces L^p . Quels résultats restent vrais, lesquels ne le sont plus ? Je me suis rendu compte après coup qu'il était possible de vraiment justifier ce choix que j'avais plutôt fait par manque de place. En effet, la définition de l'espace L^∞ ne met pas en jeu d'intégrale par rapport à une mesure !
- Savez vous s'il y a des inclusions entre les L^p ? J'ai répondu oui la décroissance dans le cas où la mesure est finie, et j'ai fait la démo, après ils ont demandé des contre-exemples dans la cas infini, j'ai parlé de $1/\sqrt{x}$ qui est intégrable au voisinage de 0 mais pas de carré intégrable. Mais c'est plutôt pour montrer que les inclusions dans le cas fini sont strictes, parce que je me mettais sur $]0, 1]$, donc je ne répondais pas trop à la question sur le cas infini en fait. Mais ils avaient l'air de vouloir passer rapidement si je ne disais pas de contre-exemple rapidement, donc on est passés.

Exercices posés :

- On se place dans un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) et on considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions mesurables de X dans \mathbf{R} , et f une fonction mesurable de X dans \mathbf{R} . Montrer l'équivalence entre :
 - $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 - Il existe un $A \in \mathcal{A}$, de mesure pleine, tel que f_n converge uniformément vers f sur A
- On considère l'espace $X := \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1]), f(0) = f(1) = 0\}$, que l'on munit de la norme

$$\|f\|_X := \sqrt{\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2}.$$

- Montrer que pour tout $f \in X$, $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_2$
- On définit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$u_n(x) := \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}}$$

Les u_n sont bien dans X . Montrer que cette suite de fonctions ne peut pas converger dans $(X, \|\cdot\|_X)$.

¹convergence uniforme sur tout compact

Remarques globales :

On est assez libres de se déplacer à l'étage des salles de préparation, c'est agréable de ne pas avoir à lever la main pour aller aux toilettes ou prendre une nouvelle feuille de brouillon. Les valises de livres sont montées avec un ascenseur, donc il faut vraiment qu'elles soient extrêmement lourdes pour que ça pose problème. La notre devait faire dans les 20 kilos je pense, et il n'y a eu aucun souci. Il peut y avoir des bavardages, par exemple si quelqu'un a un souci avec l'ordinateur pendant la préparation de l'épreuve de modélisation, quelqu'un vient à son secours, et ça peut discuter, donc il faut peut-être prévoir de quoi se boucher les oreilles. Mais ce que je retiens principalement, c'est la bienveillance des jurys, qui tentent vraiment de nous faire dire ce qu'on sait, et ne n'insistent pas sur nos points faibles jusqu'à ce qu'on rende les armes.