LEÇONS D'ANALYSE ET PROBABILITÉS

Pour chaque leçon, les deux premiers développements sont ceux que je comptais présenter, les suivants sont d'autres développements qui, par un hasard des recasages, se trouvent avoir leur place dans la leçon (mais peut-être un peu moins). J'ai mis en italique quelques autres idées qui m'avaient traversé l'esprit, mais qui ne faisaient finalement pas partie de ma liste de développements. Les liens bleus renvoient à la fin du document, où j'ai tenté d'indiquer les références utilisées pour chaque développement, ainsi que quelques commentaires.

201 - Espaces de fonctions. Exemples et applications.

- Théorèmes de Montel et d'Osgood
- Espaces de Bergman
- Équirépartition modulo 1

202 - Exemples de parties denses et applications.

- Théorème de Fejér
- Espaces de Bergman
- Densité des polynômes orthogonaux

203 - Utilisation de la notion de compacité

- Théorème d'Hadamard-Lévy
- Théorème de la sphère chevelue
- Théorème de Lévy (parce qu'en fait on montre des résultats de compacité pour la convergence étroite)
- *Sous-groupes compacts de* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ *?*

204 - Connexité. Exemples et applications.

- Théorème d'Hadamard-Lévy
- Théorème de la sphère chevelue
- Surjectivité de $\exp\colon \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$

205 - Espaces complets. Exemples et applications.

- Théorème de Lax-Milgram et application à une EDP
- Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé
- Espaces de Bergman

207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

- Théorèmes de Hahn-Banach
- Théorème de Steinhaus
- Densité des polynômes orthogonaux (on prolonge une transformée de Fourier !)

208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

- Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé
- Théorème de Lax-Milgram et application à une EDP

209 - Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

- Théorème O de Littlewood
- Théorème de Fejér
- Densité des polynômes orthogonaux

213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

- Espaces de Bergman
- Théorème de Lax-Milgram et application à une EDP
- Densité des polynômes orthogonaux

214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

- Théorème d'Hadamard-Lévy
- Théorème de la sphère chevelue
- Extrema liés et méthode de Monte-Carlo

215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

- Théorème d'Hadamard-Lévy
- Théorème de la sphère chevelue
- Extrema liés et méthode de Monte-Carlo

219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

- Extrema liés et méthode de Monte-Carlo
- Algorithme du gradient à pas optimal

220 - Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

- Théorème d'Hadamard-Lévy
- Condition de Kalman
- Évoquer l'Équation de la chaleur sur le cercle, parce que même si c'est une EDP, on montre en cours de route qu'une certaine équation différentielle est satisfaite par les coefficients de Fourier.

221 - Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

- Condition de Kalman
- Équivalent du nombre de zéros d'une solution d'une équation différentielle

222 - Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

- Équation de la chaleur sur le cercle
- Théorème de Lax-Milgram et application à une EDP

223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

- Équirépartition modulo 1
- Équivalent d'une suite récurrente
- Un résultat de grandes déviations, en application des $\limsup$ et $\liminf$.
- *Convergence ps des sous-martingales bornées dans* L^1

224 - Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

- Équivalent d'une suite récurrente
- Équivalent du nombre de zéros d'une solution d'une équation différentielle
- Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^d$

226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

- Équivalent d'une suite récurrente
- Convergence des méthodes itératives
- Algorithme du gradient à pas optimal (mais attention, comme le fait remarquer Rémi, ce n'est pas $u_{n+1} = f(u_n)$ mais $u_{n+1} = f_n(u_n)$ donc peut-être pas le mettre en développement).
- *Convergence d'une suite de polygones*

228 - Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

- Équation de la chaleur sur le cercle
- Théorème de Lévy (en passant du temps sur le lemme de Helly, quitte à ne pas aller jusqu'au résultat final)

229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

- Un résultat de grandes déviations
- Théorème de Lévy (En appuyant bien sur le lemme de Helly)
- *Glivenko-Cantelli*

230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

- Théorème O de Littlewood
- Équivalent d'une suite récurrente
- Proportion d'entiers premiers entre eux

233 - Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

- Algorithme du gradient à pas optimal
- Convergence des méthodes itératives
- *Méthode de Gauss-Seidel*

234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

- Espaces de Bergman
- Théorème de Fejér
- Densité des polynômes orthogonaux
- *Convergence ps des sous-martingales bornées dans* L^1

235 - Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

- Équation de la chaleur sur le cercle
- Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^d$

236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

- Probabilité qu'une matrice 2×2 soit diagonalisable
- Extrema liés et méthode de Monte-Carlo
- Au pire la Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^d$ en insistant bien sur les changements de variable polaire / sphérique.
- *Méthodes de rejet ?*

239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

- Équation de la chaleur sur le cercle
- Inversion de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbf{R})$
- Densité des polynômes orthogonaux
- Théorème de Lévy

241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

- Théorèmes de Montel et d'Osgood
- Théorème de Steinhaus

243 - Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

- Théorème de Steinhaus
- Théorème O de Littlewood

245 -Fonctions holomorphes sur un ouvert de C. Exemples et applications.

- Espaces de Bergman
- Théorèmes de Montel et d'Osgood
- Théorème de Steinhaus

246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

- Théorème de Fejér
- Équation de la chaleur sur le cercle

250 - Transformation de Fourier. Applications.

- Densité des polynômes orthogonaux
- Inversion de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbf{R})$
- Théorème de Lévy (mais attention, le résultat est en plein dans la leçon, mais la méthode que je fais n'utilise pas de transformée de Fourier en fait, donc c'est moyennement un développement)

253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

- Algorithme du gradient à pas optimal
- Théorèmes de Hahn-Banach
- Un résultat de grandes déviations

260 - Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

- Problème de la ruine du joueur
- Un résultat de grandes déviations

261 - Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

- Théorème de Lévy
- Un résultat de grandes déviations

262 - Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

- Théorème de Lévy
- Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^d$
- Théorème de Steinhaus (au moins à évoquer, parce que je trouve que la loi du 0-1 c'est un théorème limite)

264 - Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

- Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^d$
- Problème de la ruine du joueur

265 - Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales. *Impasse*
Mais c'est une impasse un peu regrettée. Je n'avais pas pensé à des développements qui iraient bien dedans, et il était un peu tard dans l'année pour en rajouter deux. Mais je pense qu'on peut dire plein de jolies choses, et faire un plan très personnel.

Références (principales) utilisées :

- Théorèmes de Montel et d'Osgood : un TD de *Fonctions holomorphes et fonctions spéciales* de M1. Une version rédigée est disponible sur ma page web.
- Espaces de Bergman : un TD de *Fonctions holomorphes et fonctions spéciales* de M1, mais on peut trouver à peu près les mêmes démonstrations dans la version de Corentin Kilque `https://www.math.univ-toulouse.fr/~ckilque/`. Il y a une version de ce développement dans *Analyse pour l'agrégation de Mathématiques, 40 développements* de Bernis & Bernis.
- Équirépartition modulo 1 : *Oraux X-ENS, Analyse 2* p.47 pour le critère de Weyl. *Thèmes d'analyse* d'Alessandri et Exbrayat pour des compléments, des applications... Attention, dans la démonstration du critère de Weyl, il y a un argument toujours dit très rapidement dans les versions que j'ai vues, et qui ne me semble vraiment pas clair. Je montrais donc le critère en affaiblissant un peu une des conditions, comme le faisait Laura Gay `https://sites.google.com/site/lauragaymath/agregation/developpements` (regarder la partie sur les développements abandonnés en cours de route). Si quelqu'un sait m'expliquer comment enlever la condition $f(0) = f(1)$, je suis preneur !
- Théorème de Fejér : *Analyse pour l'agrégation* de C.Zuily & H. Queffélec.
- Densité des polynômes orthogonaux : un exercice d'*Objectif Agrégation* de Beck, Malick & Peyré. Assez facile à retenir, une fois qu'on a vu les étapes, tout se démontre naturellement ! C'est un développement très classique, je pense qu'il est utile de l'avoir vu même si on en fait pas un développement.
- Théorème d'Hadamard-Lévy : *Analyse pour l'agrégation* de C.Zuily & H. Queffélec mais 2$^{\text{e}}$ édition ! L'édition est importante ici (en tout cas pour moi), car dans les éditions suivantes il y a un argument qui semble utiliser une propriété plus forte de continuité du flot, alors que dans la seconde édition, on utilise juste la continuité, à T fixé,

de $x_0 \mapsto x(T, x_0)$ (autrement dit, la continuité à T fixé par rapport à la donnée initiale), ce qui se démontre sans problème avec le lemme de Gronwall. Une version sur internet : sur la page d'Adrien Fontaine http://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/Adrien.Fontaine/agregation3.html. C'est un développement que je trouve assez long et difficile. Il peut-être bon d'avoir réfléchi à une fonction pour laquelle il est difficile de voir que c'est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme, mais qui est assez clairement propre, pour montrer que ce théorème a une utilité pratique.
Thomas a rédigé une version de ce développement, je ne l'ai pas lue mais je suis sûr que c'est une excellente référence : sa page est ici http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tcava767

- Théorème de la sphère chevelue : Jean Saint-Raymond, *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*, dans l'appendice D sur les théorèmes de points fixes. C'est un peu long, donc j'aurais admis la partie où l'on montre qu'on peut se ramener à un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de la sphère. J'espère le taper un jour.

- Théorème de Lévy : Patrick Billingsley *Probability and measure*. La preuve y est beaucoup plus facile (je trouve) que dans *Probabilités 2* de Jean-Yves Ouvrard, où il y a beaucoup de subtilités dues au fait qu'il se place avec des mesures bornées, par forcément toutes des mesures de probabilité, et donc les convergences vague, étroite et faible ne sont pas le mêmes... J'admettais le fait que la fonction caractéristique caractérise la loi (mais comme me l'a fait remarquer Thomas, c'est « juste » par inversion de Fourier dans $\mathscr{S}'$). Ensuite le développement reste très long, donc il faut choisir ce que l'on démontre. Dans une leçon sur les fonctions monotones, le coeur du développement doit être le lemme de Helly, et on peut juste l'appliquer pour extraire une sous-suite qui converge faiblement d'une suite tendue de mesures. Dans une leçon de convergence de variables aléatoires, on peut démontrer le lemme de Helly (il ne faut quand même pas l'admettre, c'est lui qui fait tout), admettre les deux lemmes de compacité pour la convergence faible, et montrer le théorème de Lévy. Il faut aller vite malgré tout, mais on montre un beau résultat, aux applications époustouflantes ! Le TCL découle presque directement du théorème de Lévy. Á nouveau, Thomas a rédigé une version de ce développement que ne l'ai pas lue mais je suis sûr que c'est une excellente référence : sa page est ici http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tcava767

- Surjectivité de exp: $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$: la version présentée par Antoine en leçon, que je suppose très inspirée d' *un max de Maths* de M. Zavidovique.

- Théorème de Lax-Milgram et application à une EDP : polycopié *Méthodes hilbertiennes* de Karine Beauchard https://w3.ens-rennes.fr/math/people/karine.beauchard/

- Théorèmes de l'application ouverte et du graphe fermé : cours d'*Analyse fonctionnelle* de M1, pas de références papier, mais je ne doute pas de leur existence, je n'ai pas cherché. Je n'aurais pas pensé à présenter ces théorèmes en développement si je ne les avais pas vus dans les développements de Benjamin Havret (merci pour l'idée !).

- Théorèmes de Hahn-Banach : cours d'*Analyse fonctionnelle* de M1.

- Théorème de Steinhaus : rédigé dans le document sur les séries entières. Quelques références possibles : Garet & Kurtzmann : *de l'intégration aux probabilités* (exercice 106 p.355, corrigé p.459), ainsi que de la version de Benjamin Havret (poly de développements disponible sur sa page http://www.normalesup.org/~havret/).

- Équation de la chaleur sur le cercle : version de Benjamin Havret (poly de développements disponible sur sa page http://www.normalesup.org/~havret/). Développement assez long, il faut sûrement adapter les parties que l'on présente à la leçon. Pour les leçons plutôt orientées intégrales à paramètres, on peut bien détailler les interversions du début du développement, et se contenter de traiter le cas $\mathcal{C}^2$ à la fin. Dans des leçons plutôt EDP, j'aurais eu tendance à expédier très rapidement les interversions du début, pour avoir le temps de bien faire la fin (la convolution avec le noyau de la chaleur).

- Théorème O de Littlewood : rédigé dans le document sur les séries entières. Quelques références possibles : l'article de Nicolas TOSEL : *Rampes et théorèmes taubériens*, paru dans la RMS 128-4 (pour la preuve que je présentais en développement), ou alors GOURDON *Analyse* ou CHOIMET & QUEFFÉLEC pour une autre démonstration.

- Extrema liés et méthode de Monte-Carlo : développement 100% fait par Tibo (merciii), donc je n'ai pas de référence. Il y a des démonstrations du théorème des extrema liés un peu partout, et pour la partie méthode de Monte-Carlo, ce qu'on faisait est connu sous le nom de méthode de stratification. Une remarque assez importante : si on fait en développement le théorème des extrema liés en admettant la caractérisation du plan tangent dans le cas d'une sous-variété donnée par une équation, il faut bien dire ce que l'on admet. Parce qu'en fait c'est cette caractérisation qui fait toute la démonstration, donc un jury pourrait être déçu de voir une démonstration admettant ce résultat, si on ne l'a pas prévenu. Par contre si on dit que l'on admet ça, et qu'on donne ensuite des applications du théorème, je pense qu'il n'y a pas de problème.

- Algorithme du gradient à pas optimal : *Analyse pour l'agrégation de Mathématiques, 40 développements* de BERNIS & BERNIS

- Condition de Kalman : dans un *Oraux X-ENS*, mais lequel ? Je ne sais plus. C'est l'exercice 12 du complément sur les EDO de Kévin LE BALC'H, dont les notes sont disponibles ici : `https://sites.google.com/view/kevinlebalch/accueil/enseignement`. C'est un développement un peu léger sans doute, mais je n'étais pas un fou d'équations différentielles, et au moins on peut prendre le temps de bien expliquer. J'imaginais que ça pouvait donner un bon moment de mathématiques appliquées, en présentant un problème physique un peu inventé qui rentrerait dans le cadre de cet exercice.

- Équivalent du nombre de zéros d'une solution d'une équation différentielle : Version de Corentin KILQUE `https://www.math.univ-toulouse.fr/~ckilque/`, tirée du ZUILY & QUEFFÉLEC.

- Équivalent d'une suite récurrente : *Analyse pour l'agrégation de Mathématiques, 40 développements* de BERNIS & BERNIS. Permet de rompre la lassitude provoquée par l'étude trop souvent répétée de la suite $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Finalement, on fait la même chose, mais en expliquant d'où vient la suite auxiliaire, et en pouvant l'appliquer à d'autres fonctions que sin.

- Un résultat de grandes déviations : j'espère rédiger une version. Je l'ai lu dans *Probability and random processes* de GRIMMETT & STIRZAKER. J'ai découvert plus tard que le même résultat était démontré dans *exercices de probabilités* de COTTREL, GENON-CATALOT, DUHAMEL & MEYRE (exercice 5.14 p.163, « Théorème de Chernoff »).

- Marche aléatoire sur $\mathbf{Z}^d$: version de Corentin KILQUE `https://www.math.univ-toulouse.fr/~ckilque/` à peu de choses près. Merci aussi à Émilie, qui m'avait envoyé sa version, et qui m'a fait gagner beaucoup de temps en me racontant ce développement. Je comptais admettre les résultats de chaînes de Markov, notamment le fait que la récurrence de 0 équivaut à la divergence de la série des $\mathbf{P}(S_n = 0)$, ou encore le fait que tous les états sont de même nature pour une chaîne irréductible. Les démonstrations ne sont vraiment pas

simples, et donc je préférais les admettre clairement, et dire que le développement consistait plutôt en l'étude de la convergence d'une série. Mais bon ça reste un développement plutôt option A, car on s'expose fortement à des questions sur les chaînes de Markov. De plus, il y a quelques questions qui se posent assez naturellement à l'issue de ce développement, il peut être bon d'y avoir songé. Par exemple, pour $d \leqslant 2$, la chaîne est récurrente, donc on revient presque sûrement en 0 (et même une infinité de fois), quel est le temps moyen de la première excursion ? Déjà, est-ce que ce temps est intégrable ?
Thomas a rédigé une version de ce développement, je ne l'ai pas lue mais je suis sûr que c'est une bonne référence : sa page est ici http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tcava767

- Convergence des méthodes itératives : G. Allaire & S.M. Kaber : *Algèbre linéaire numérique*.

- Proportion d'entiers premiers entre eux : *Oraux X-ENS Algèbre 1*, page 156. J'ajoutais une partie optionnelle sur pourquoi on raisonne en terme de « proportion asymptotique » et pas avec une vraie probabilité de piocher un couple d'entiers premiers entre eux. En fait, on ne peut pas, car il n'existe pas de mesure de probabilité sur $(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}))$ qui ferait ce qu'on attend d'elle : c'est-à-dire telle que $\mathbf{P}(2\mathbf{N}) = 1/2$, $\mathbf{P}(3\mathbf{N}) = 1/3\ldots$ C'est fait dans *Un max de Maths* de M. Zavidovique. On utilise la divergence de la série des inverses des nombres premiers. Il y a plusieurs démonstrations de ce résultat dans *Un max de Maths*, mais j'ai une préférence pour la démonstration qui utilise l'écriture de ζ avec le produit eulérien, comme c'est fait dans le Gourdon *Analyse* (problème 17, page 282, mais bon cela varie peut-être avec les éditions). De toute façon, c'est un résultat à admettre dans ce développement. Je ne sais pas si c'est réalisable niveau temps, mais bon je me disais que je montrais le résultat de l'exercice d'*Oraux X-ENS*, et que le reste me servait de roue de secours si je présentais trop vite et qu'il me restait quelques minutes.

- Probabilité qu'une matrice 2×2 soit diagonalisable : RMS 124-3 p.94, en rajoutant la preuve du lemme qui dit que le lieu des zéros d'un $P \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ est de mesure nulle dans $\mathbf{R}^n$. Par contre la suite du développement est un calcul d'intégrale, pas des plus passionnants. J'avais appris ce développement parce que j'aimais bien le résultat démontré (vous ne devinerez jamais la probabilité cherchée !), et qu'il est original, mais finalement on passe du temps à faire un calcul, ce n'est peut-être pas le top du top.

- Inversion de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbf{R})$: cours de *Distributions et analyse de Fourier* de L3, mais la preuve est classique, on peut par exemple regarder la version d'Arnaud Girand http://math.webgirand.eu/agreg.html, dont j'ai aimé les commentaires sur la durée du développement et les suggestions de rajouts. On peut par exemple détailler pourquoi $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ est bien stable par transformée de Fourier, ou alors montrer la formule de Plancherel comme conséquence de la formule d'inversion.

- Problème de la ruine du joueur : *Probabilités 2* de Jean-Yves Ouvrard, page 394. Cette version utilise des martingales, le théorème de Doob, et un théorème d'arrêt (mais dans un cas relativement simple). Comme les martingales ne sont pas au programme du tronc commun, c'est peut-être plutôt un développement d'option A... Cependant il y a des démonstrations sans martingales ! Voir par exemple *Analyse pour l'agrégation de Mathématiques, 40 développements* de Bernis & Bernis (je crois).

- *Convergence ps des sous-martingales bornées dans* L^1 : Patrick Billingsley[1] *Probability and measure*. Thomas a rédigé une version de ce développement, je ne l'ai pas lue mais je suis sûr que c'est une bonne référence : sa page est ici http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~tcava767

[1]point culture : je découvre en cherchant l'orthographe de son nom, que ce monsieur a été acteur dans de nombreuses pièces de théâtre, et quelques films et téléfilms. Voilà.

- *Sous-groupes compacts de* $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$: développements de Benjamin Havret (pdf disponible sur sa page http://www.normalesup.org/~havret/).

- *Méthode de Gauss-Seidel* : G. Allaire & S.M. Kaber : *Algèbre linéaire numérique*. Des calculs pas évidents à retenir à mon goût, c'est pour cela que je ne le présentais finalement pas.