Feuille 1. bis

Exercice 1 (Prolongement de l'exercice 6 de la feuille 1)

Si $(G,.)$ est un groupe, on appelle dual de G le groupe

$$\widehat{G} := \{\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times \text{ tq } \chi \text{ est un morphisme de groupes}\}$$

(il est muni du produit $(\chi_1, \chi_2) \longmapsto \left| \begin{array}{l} \chi_1\chi_2 : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ \quad g \longmapsto \chi_1(g)\chi_2(g) \end{array} \right.$)

Les éléments de $\widehat{G}$ sont appelés les caractères de G.

1) Vérifier que $\widehat{G}$ est un groupe abélien.
2) Montrer que si G est cyclique, alors $\widehat{G}$ est isomorphe à G.
3) Montrer que si G et H sont deux groupes, il existe un isomorphisme naturel entre $\widehat{G \times H}$ et $\widehat{G} \times \widehat{H}$.

4) Montrer que si G et G' sont deux groupes isomorphes, alors $\widehat{G} \simeq \widehat{G'}$.

5) En déduire, en admettant le théorème de structure des groupes abéliens finis, que tout groupe abélien fini est isomorphe à son dual.

6) Montrer que tout groupe abélien fini est canoniquement isomorphe à son bidual.

7) En utilisant l'exercice 6 de la feuille 1, montrer que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(G est toujours supposé abélien fini).