

---

CC 2 - Estimation statistique et Intervalle de confiance

---

**Exercice 1 Autour de la loi de Laplace (13pts)**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle de fonction de densité pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f_{\theta}(x) = C \exp(-2|x|/\theta),$$

avec  $\theta > 0$  un paramètre inconnu et  $C$  une constante dépendant de  $\theta$ . On se place dans le cadre de  $n$  observations  $(X_1, \dots, X_n)$  i.i.d.

**Partie 1 : Construction de nos estimateurs**

- (1pt) Décrire le modèle statistique de cet exercice et pour  $\theta > 0$ , montrer que  $C = 1/\theta$ .
- (2pts) Calculer l'espérance et la variance de la variable  $X$  sous  $Q_{\theta}$ .  
*Indication : on pourra utiliser la symétrie de la densité pour simplifier les calculs.*
- (1pt) Déterminer un estimateur  $\hat{\theta}_{MM}$  par la méthode des moments.
- (2pts) Montrer que l'estimateur de maximum de vraisemblance est

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

**Partie 2 : Propriétés de l'estimateur de maximum de vraisemblance**

- (1pt) Montrer que l'EMV est sans biais.
- (1pt) Montrer que l'EMV est fortement consistant.
- (1pt) Déterminer le risque quadratique de  $\hat{\theta}_{MV}$ .  
*Indication : on pourra remarquer que  $|X|^2 = X^2$ .*
- (2pts) En calculant l'information de Fisher du modèle, déterminer si l'EMV est efficace.

**Partie 3 : Une application de cette distribution**

La distribution de Laplace est couramment utilisée pour modéliser le rendement d'un actif financier. Supposons que notre rendement en pourcentage soit représenté par la variable aléatoire  $Y$ , définie comme  $Y = 3 + X$ , où la densité de  $X$  est  $f_{\theta}$ .

- (1pt) Voici l'historique des rendements de notre investissement :

2.5	2.9	3.2	2.8	3.5	3.1	2.8	4
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---

Estimer le paramètre  $\theta$  en utilisant l'estimateur  $\hat{\theta}_{MV}$ . Nous ne procéderons pas aux calculs, mais nous donnerons une expression explicite de l'estimation.

- (1pt) Pour  $\theta > 0$ , calculer la probabilité  $Q_{\theta}(Y < 2)$ . En déduire une expression explicite de la probabilité que notre rendement soit inférieur à 2%.

## Exercice 2 À la recherche du boson de Higgs (7pts)

Selon Wikipédia, "le boson de Higgs est une particule élémentaire dont l'existence permet d'expliquer la brisure de l'interaction unifiée électrofaible en deux interactions par l'intermédiaire du mécanisme de Brout-Englert-Higgs-Hagen-Guralnik-Kibble et d'expliquer ainsi pourquoi certaines particules ont une masse et d'autres n'en ont pas". Afin d'identifier ce boson, les physiciens provoquent la collision de plusieurs particules au sein du Grand Collisionneur de Hadrons (LHC). Cette collision génère une énergie théorique de  $\mu$  GeV, une énergie théorique qui diffère selon que l'on suppose l'existence ou non du boson de Higgs. Nous proposons ici une procédure statistique visant à déterminer si l'absence de ce boson est conforme à nos observations.

1. (2pts) On sait que les appareils de mesure du LHC suivent une loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  avec  $\sigma^2 = 1/10000$  et  $\mu$  l'énergie théorique de la collision. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cadre des observations i.i.d. ainsi que sa loi exacte.
2. (2pts) Construire un intervalle de confiance bilatéral du paramètre  $\mu$  de niveau de confiance  $1 - \alpha$ .
3. (1pt) D'après la théorie, si le boson de Higgs n'existe pas, l'énergie mesurée par cette expérience doit valoir  $\mu_0 = 125$  GeV. Énoncer les hypothèses de cette expérience et proposer un test statistique.
4. (1pt) Après 121 mesures, on observe une moyenne empirique de l'énergie  $\bar{x} = 125.03$  GeV. Pour être sûr de ne pas rejeter à tort l'hypothèse nulle, les physiciens ont pris un  $\alpha = 0.01$ . Remplacer toutes les variables par leurs valeurs numériques. On ne fera pas le calcul pour déterminer l'intervalle de confiance évalué.  
On admet que  $\mu_0$  n'appartient pas à l'intervalle de confiance évalué. Que conclure ?
5. (1pt) Commenter le titre suivant d'un article paru dans *Le Monde* :

**Le boson de Higgs découvert avec 99 % de certitude!!**