Feuille TD 1 : Rappel de probabilités

Exercice 1.1

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_θ définie par

$$f_\theta(x) = (1-\theta)\mathbf{1}_{[-1/2,0]}(x) + (1+\theta)\mathbf{1}_{]0,1/2]}(x),$$

où θ est un paramètre réel tel que $|\theta| \neq 1$.

1. Quelles conditions doit vérifier θ pour que f_θ soit bien une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$?

2. Calculer l'espérance de X.

3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité f_θ. Soit U_n et V_n les variables aléatoires définies par

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{]-\infty,0]}(X_i) \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(X_i)$$

3. 1. Montrer que U_n et V_n suivent des lois binomiales dont on précisera les valeurs des paramètres.

3. 2. Calculer $\mathbf{E}[U_n], \mathbf{E}[V_n]$ et en déduire $\mathbf{E}[(V_n - U_n)/n]$.

3. 3. Calculer $\mathbf{E}[U_n V_n]$ et $\operatorname{cov}(U_n, V_n)$.

3. 4. Montrer que la quantité suivante tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini,

$$\mathbf{V}\left[\frac{V_n - U_n}{n}\right].$$

Exercice 1.2

Soit X la variable aléatoire réelle de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \quad (\lambda > 0) \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi des variables suivantes : $\lambda X, 1/X, X^2, \sqrt{X}$.

Exercice 1.3

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire dont les variables marginales sont indépendantes identiquement distribuées (échantillon), chacune de fonction de répartition notée F.

1. Déterminer la loi de $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$, et celle de $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

2. Dans le cas d'un couple de variables aléatoires, déterminer la loi conjointe de

$$(\max\{X_1, X_2\}, \min\{X_1, X_2\})$$

Exercice 1.4
Soit un échantillon, de taille n : $X_1, \cdots, X_n$ *i.i.d* de loi parente la loi uniforme $X \sim \mathcal{U}([0,\theta])$ avec θ un paramètre positif.
1. En utilisant la fonction de répartition de X, montrer que celle de la loi $Y = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i$ est donnée par

$$F_Y(y) = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n \quad \text{pour} \quad y \in [0,\theta] \quad \text{et} \quad F_Y(y) = 1 \quad \text{si} \quad y \geqslant \theta.$$

2. En déduire la densité de probabilité f_Y de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 1.5 Quantile d'une mesure de probabilité
Soit F une fonction de répartition. Pour $\alpha \in (0,1)$, on appelle quantile d'ordre α, la quantité

$$q_\alpha(F) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) \geqslant \alpha\}.$$

On le note souvent $F^{\leftarrow}(\alpha)$.
1. Montrer que $F(F^{\leftarrow}(\alpha)) \geqslant \alpha$ et $F^{\leftarrow}(F(t)) \leqslant t$.
2. Dans le cas où F est strictement croissante, montrer que ces inégalités sont des égalités et donc que $F^{-1} = F^{\leftarrow}$.