Université de Pau et des Pays de l'Adour — **Semestre printemps 2023–2024**

L3 Math — Introduction à la Statistique

Feuille TD 2 : Théorie de l'estimation et information de Fisher Correction

---

Exercice 2.1

Soient $\theta > -1$ et X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)(\theta+2)(1-x)x^\theta & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $X_1, \cdots, X_n$ un échantillon *i.i.d.* de la loi X. Ici, θ est un paramètre inconnu que l'on souhaite estimer à l'aide de $(X_1, \cdots, X_n)$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer deux estimateurs de θ par la méthode des moments.

Exercice 2.2

Prenons le modèle $((\mathbb{R}^+)^n, (\mathbb{P}_{\theta=(a,b,c)}^{\otimes n})_{a,b,c>0})$ tel que si $X \sim \mathbb{P}_\theta$, on a

$$\mathbb{E}[X] = b, \ \operatorname{Var}(X) = 2a^2 b \text{ et } \mathbb{E}[X^3] = 3\frac{a^2}{b}c.$$

Déterminer un estimateur de θ^* par la méthode des moments.

Exercice 2.3 Optimisation du risque

Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires i.i.d. de loi de Uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta \in \mathbb{R}^+$ inconnu. On considère les estimateurs

$$\hat{\theta}_m = 2\bar{X}_n \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_{MV} = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

1. Écrire le modèle statistique de cet exercice.
2. Expliquer la logique de construction de ces estimateurs.
3. Discuter du biais de $\hat{\theta}_{MV}$.

Pour $\theta > 0$, on a $X_i < \theta$ $\mathbb{P}_\theta$ p.s. car l'événement $\mathbb{P}_\theta(X_i = \theta) = 0$. Donc $\mathbb{P}_\theta$-p.s., $\hat{\theta}_{MV} < \theta$ et donc $\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{MV}] < \theta$.

4. Calculer le biais, la variance et le risque quadratique de $\hat{\theta}_m$.

Soit $\theta > 0$, on a

$$\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_m] = \mathbb{E}_\theta[2\bar{X}_n] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta[X_i] = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \theta/2 = \theta.$$

Donc l'estimateur est sans biais. Pour la variance, on calcul aussi directement par l'indépendance des observations

$$\operatorname{Var}(\hat{\theta}_m) = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) = \frac{4n\theta^2}{12n^2} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

Par la décomposition biais/variance du risque, on sait que

$$\mathcal{R}(\hat{\theta}_m, \theta) = b_n(\theta)^2 + \operatorname{Var}(\hat{\theta}_m) = \frac{\theta^2}{3n}.$$

5. Calculer la fonction de répartition $\hat{\theta}_{MV}$ et montrer que la densité de $\hat{\theta}_{MV}$ est donnée par

$$f_{\hat{\theta}_{MV}}(x) = n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}\mathbb{1}_{]0,\theta[}(x)$$

La fonction de répartition d'un max a été fait dans le TD1. Pour déterminer, il faut dériver la fonction de répartition ET vérifier que l'intégrale de la dérivée permet de retrouver la fonction de répartition !

6. Déduire de la question précédente l'espérance, la variance de $\hat{\theta}_{MV}$ et le risque quadratique de $\hat{\theta}_{MV}$.

Ainsi pour $\theta > 0$,

$$\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{MV}] = \int_0^\theta x f_{\hat{\theta}_{MV}}(x)\ \mathrm{d}x \text{ et } \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{MV}^2] = \int_0^\theta x^2 f_{\hat{\theta}_{MV}}(x)\ \mathrm{d}x.$$

Avec la décomposition biais/variance et les formules

$$b_n(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{MV}] - \theta \text{ et } \mathrm{Var}(\hat{\theta}_{MV}) = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{MV}^2] - \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{MV}]^2,$$

on obtient que

$$\mathcal{R}(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

7. Donner une constante c dépendant de n telle que $\tilde{\theta} = c\hat{\theta}_{MV}$ soit sans biais.

Le calcul de la question précédente donnait

$$\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{MV}] = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Par linéarité de l'espérance, il faut donc prendre $c = \frac{n+1}{n}$.

8. Calculer la variance et le risque quadratique de $\tilde{\theta}$.

Pour ce nouvel estimateur, le biais est nul et

$$\mathrm{Var}(\tilde{\theta}) = c^2\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{MV}).$$

En faisant le calcul, on obtient

$$\mathcal{R}(\tilde{\theta}, \theta) = \frac{\theta^2}{(n+2)n},$$

toujours à l'aide de la décomposition biais/variance du risque.

9. Comparer les risques quadratiques des estimateurs $\hat{\theta}_m, \hat{\theta}_{MV}$ et $\tilde{\theta}$.

On vient de calculer

$$\mathcal{R}(\hat{\theta}_m, \theta) = \frac{\theta^2}{3n},\ \mathcal{R}(\hat{\theta}_{MV}, \theta) = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \text{ et } \mathcal{R}(\tilde{\theta}, \theta) = \frac{\theta^2}{(n+2)n}.$$

10. Plus généralement, on considère un estimateur $\bar{\theta}$ de la forme $\alpha\hat{\theta}_{MV}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

10. 1. Calculer le risque quadratique de $\bar{\theta}$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on rappelle que le risque quadratique s'écrit

$$\mathcal{R}(\bar{\theta}, \theta) = b(\bar{\theta})^2 + \mathrm{Var}_\theta(\bar{\theta}).$$

Il suffit donc de calculer le biais et la variance,

$$\mathbb{E}_\theta(\bar{\theta}) = \mathbb{E}_\theta[\alpha\hat{\theta}_{MV}] = \alpha\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_{MV}] = \frac{\alpha n}{n+1}\theta,$$

donc le biais est $b(\bar{\theta}) = \mathbb{E}_\theta(\bar{\theta}) - \theta = \left(\frac{\alpha n}{n+1} - 1\right)\theta = \frac{(\alpha-1)n+1}{n+1}\theta$.
Pour la variance, on a

$$\mathrm{Var}_\theta(\bar{\theta}) = \alpha^2\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \alpha^2\frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2},$$

donc le risque quadratique vaut

$$\mathcal{R}(\bar{\theta},\theta) = \frac{[(1-\alpha)n+1]^2\theta^2}{(n+1)^2} + \frac{\alpha^2 n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+2}\alpha^2 - \frac{2n}{n+1}\alpha + 1\right)\theta^2.$$

10. 2. Calculer la valeur de α qui minimise ce risque quadratique.

Il s'agit d'un polynôme de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a > 0$, il atteint donc son minimum en $X = \frac{-b}{2a}$, donc le risque est minimisé pour

$$\alpha = \frac{2n}{n+1}\frac{n+2}{2n} = \frac{n+2}{n+1}.$$

10. 3. Conclure.

Dans la question 7, nous avions multiplié l'EMV par $c = \frac{n+1}{n}$. Cela a permis de faire disparaître le biais et a fait diminuer le risque. Mais nous venons de voir que le risque peut être encore diminué si on multiplie l'EMV par $\alpha = \frac{n+2}{n+1}$. On peut vérifier que cet estimateur est biaisé mais possède un risque minimal !

Exercice 2.4 Quelques calculs sur le modèle gaussien

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Les 4 premiers moments de cette loi sont donnés par

$$\mathbb{E}[X] = \mu,\ \mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 + \mu^2,\ \mathbb{E}[X^3] = 3\mu\sigma^2 + \mu^3,\ \mathbb{E}[X^4] = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4.$$

1. On suppose ice que σ^2 est connu.
   1. 1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ.
   1. 2. Calculer l'information de Fisher du n échantillon et conclure.
2. On suppose maintenant qye μ est connu.
   2. 1. Calculer l'EMV de σ^2.
   2. 2. Calculer l'information de Fisher et conclure.

Exercice 2.5 Estimation de la hauteur d'une crue

La hauteur maximale en mètre de la crue annuelle d'un fleuve est une variable aléatoire X de densité, pour $x \geqslant 0$:

$$f(x) = \frac{x}{a}e^{-\frac{x^2}{2a}}$$

où $a > 0$ est un réel inconnu. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \cdots, X_n$ un échantillon *i.i.d.* de même loi X.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{a}^{MV}$ de a.

Pour $a > 0$ et des observations $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$L_n(x_1, \dots, x_n; a) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{a} e^{-\frac{x_i^2}{2a}} = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{a^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2a}},$$

et donc en passant au logarithme,

$$\log L_n(x_1, \dots, x_n; a) = \sum_{i=1}^n \log x_i - n \log a - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2a}.$$

En dérivant par rapport à la variable a, on obtient

$$\partial_a \log L_n(x_1, \dots, x_n; a) = -\frac{n}{a} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2a^2}.$$

En faisant une étude de variation de la fonction, on trouve un maximum en

$$\hat{a}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2n}.$$

2. **Application :** une crue supérieure à 6 mètres serait catastrophique. Pendant 8 ans, on a observé les hauteurs de crue du fleuve en mètres. Les résultats sont :

2.5	2.9	1.8	0.9	1.7	2.1	2.2	2.8

Donner une estimation de a et une estimation de la probabilité d'avoir une catastrophe une année donnée.

Exercice 2.6 Robustesse d'un estimateur

Soit T une statistique définie en tant que fonctionnelle. Une fonctionnelle est une application qui prend comme argument une distribution de probabilité et donne en image une valeur numérique ou vectorielle. Pour une mesure F, on définit la fonction d'influence de T en F évalué en x par

$$\mathrm{FI}(T, F, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T((1-\varepsilon)F + \varepsilon\delta_x) - T(F)}{\varepsilon}.$$

Un estimateur sera dit *robuste* si cette quantité est bornée en $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la moyenne empirique et la médiane empirique sont des statistiques pouvant être écrites à l'aide d'une fonctionnelle.

2. Soit T_{moy} la fonctionnelle associée à la moyenne empirique, montrer que

$$\mathrm{FI}(T_{moy}, F, x) = x - T(F_{moy}).$$

En déduire que la moyenne empirique n'est pas robuste.

3. Pour étudier la fonction d'influence de T_{med}, on se restreint aux mesures de probabilités ayant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On notera f la densité de la mesure F. On supposera que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans la suite, on fera coïncider la mesure F avec sa fonction de répartition.

3. 1. Rappeler les propriétés de la fonction de répartition d'une telle mesure. En déduire que $T_{med}(F) = F^{-1}(1/2)$ pour ces mesures.

3. 2. Vérifier que pour $x = T_{med}(F)$, on a $\mathrm{FI}(T_{med}, F, x) = 0$.

3. 3. Montrer que pour $x > T_{med}(F)$,

$$\mathrm{FI}(T_{med}, F, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F^{-1}\left(\frac{1}{2(1-\varepsilon)}\right) - F^{-1}(1/2)}{\varepsilon} = \frac{1}{2f(T_{med}(F))}.$$

3. 4. Montrer un résultat analogue pour $x < T_{med}(F)$. En déduire que la médiane est un estimateur robuste.

Exercice 2.7 Le problème du char d'assaut allemand

Le problème du char d'assaut allemand est nommé d'après son application par les Alliés à l'estimation du nombre de chars d'assaut produits par l'Allemagne. On suppose que ces chars sont numérotés de la manière suivante : $s+1, s+2, \ldots, s+N$. Pour simplifier le problème, on suppose que le paramètre s est connu et vaut 0. Il faut ainsi estimer que le paramètre inconnu N. Pour faire ceci, les Alliés possèdent n observations (différentes) $X_1, \ldots, X_n$ des numéros de série de ces chars. Cela revient à tirer aléatoirement n nombres entre 1 et N sans remise. On range de manière croissante cet échantillon pour obtenir

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}.$$

Pour $k \in 1, \ldots, n$, on peut montrer que $X_{(k)}$ suit une loi hypergéométrique négative. On admettra l'espérance, la variance et la covariance de ces variables

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_{(k)}] = \frac{k(N+1)}{n+1} \\ \mathrm{Var}(X_{(k)}) = \frac{k(n+1-k)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)} \\ \mathrm{Cov}(X_{(k)}, X_{(l)}) = \frac{k(n+1-l)(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)} \text{ pour } k \leqslant l \end{cases}$$

1. Donner le modèle de ce problème.

2. Après avoir donnée une interprétation de l'estimateur, déterminer l'espérance et la variance des trois estimateurs suivants

    2. 1. $\hat{N}_1$ =2(médiane de l'échantillon)-1

    2. 2. $\hat{N}_2 - X_{(n)} = X_{(1)} - 1$

    2. 3. $\hat{N}_3 - X_{(n)} = \frac{1}{n}[(X_{(1)} - 1) + (X_{(2)} - X_{(1)} - 1) + \ldots + (X_{(n)} - X_{(n-1)} - 1)]$.

En déduire le meilleur estimateur.

Cette méthode mathématique a vraiment été utilisée pendant la guerre et a été plus performante que les services de renseignements !

Mois	Estimation statistique	Estimation par les services de renseignements	Selon les archives allemandes
Juin 1940	169	1 000	122
Juin 1941	244	1 550	271
Août 1942	327	1 550	342

Exercice 2.8 Estimation bayésienne

Le cadre bayésien consiste à munir l'espace des paramètres Θ d'une mesure de probabilité Π, appelée loi a priori. Ainsi le paramètre est une variable aléatoire $\boldsymbol{\theta}$, de loi Π. Le cadre s'écrit de la manière suivante

$$\boldsymbol{\theta} \sim \Pi \text{ et } X_1, \ldots, X_n \sim \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}^{\otimes n}.$$

L'idée est d'adapter cette loi a priori à l'aide de nos observations $x_1, \ldots, x_n$ avec la formule de Bayes. Nous allons comparer l'approche bayésienne et inférentielle dans le cas simple de la pièce équilibrée ou pas. Dans cette exemple, l'ensemble $\Theta = [0, 1]$ est muni d'une loi Π et

$$X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{B}(\boldsymbol{\theta})^{\otimes n}.$$

1. Donner l'EMV dans le cas inférentiel.

2. Dans cette question, nous allons calculer un exemple d'estimateur dans le cas bayésien

2. 1. Supposons que nous ayons plutôt confiance au fait que la pièce soit équilibrée, nous allons donc définir comme loi a priori,

$$p_{\boldsymbol{\theta}}(\theta) = c\theta(1-\theta)\mathbb{1}_{\{\theta\in[0,1]\}}, \text{ avec c>0.}$$

Déterminer c et dessiner cette densité. Est-ce une bonne modélisation de notre a priori ?

2. 2. À l'aide de la formule de Bayes, montrer que

$$p_{\boldsymbol{\theta}|x_1,\ldots,x_n}(\theta) = \frac{\theta(1-\theta)\prod_{k=1}^{n}\theta^{x_k}(1-\theta)^{1-x_k}}{\displaystyle\int_0^1 t^{n\overline{x}_n+1}(1-t)^{n-n\overline{x}_n+1}\ \mathrm{d}t}, \text{ pour } \theta\in[0,1].$$

2. 3. Déterminer argmax $p_{\boldsymbol{\theta}|x_1,\ldots,x_n}(\theta)$. Donner une interprétation de cet estimateur et comparer le à l'EMV.

3. Montrer que loi a priori uniforme sur $[0,1]$ revient à faire de l'estimation classique. Est-ce surprenant ?

Exercice 2.9

Soit $X_1,\ldots,X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. On rappelle que la loi géométrique de paramètre p est à support dans $\mathbb{N}^*$ et vérifie

$$\mathbb{P}(X_1 = x) = (1-p)^{x-1}p, \quad x\in\mathbb{N}^\star$$

On a de plus

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{p} \quad \text{ et } \quad \mathrm{Var}[X_1] = \frac{1-p}{p^2}$$

On cherche à estimer le paramètre $\lambda = 1/p$.

1. Écrire le modèle statistique de cet exercice.
2. Exprimer la vraisemblance du modèle en fonction de λ et en déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}$. Que retrouve-t-on ?
3. Calculer la borne de Cramer-Rao du modèle considéré.
4. L'estimateur $\hat{\lambda}$ est-il efficace ?

Exercice 2.10 Retour sur le modèle du TD 1

Soit $([-1/2,1/2]^n, \mathbb{P}_\theta^{\otimes n})$ un modèle statistique tel que, pour tout $\theta\in]-1,1[$, $\mathbb{P}_\theta$ désigne la loi de densité

$$f_\theta(x) = (1-\theta)\mathbb{1}_{[-1/2,0[}(x) + (1+\theta)\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x).$$

On note $(X_1,\cdots,X_n)$ un échantillon *i.i.d.* de loi $\mathbb{P}_\theta$ et $s(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x_i)$.

1. Calculer la loi de $s(X_1,\cdots,X_n)$.

Pour $1\leqslant i\leqslant n$ et $\theta\in(-1,1)$, la variable $\mathbb{1}_{[0,1/2]}(X_i)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $(1+\theta)/n$ donc cette somme de n variables **indépendantes** suivant une loi de Bernoulli de même paramètre suit $\mathcal{B}(n,(1+\theta)/2)$.

2. Déterminer la quantité d'information de Fisher du modèle.

Comme on travaille dans un modèle avec des observations indépendantes, on sait que pour $\theta \in (-1,1)$ et $n \geqslant 1$,

$$I_n(\theta) = nI_1(\theta).$$

On rappelle aussi la définition de l'information de Fisher

$$I_1(\theta) = \mathrm{Var}_\theta(\partial_\theta \log L_1(X_1;\theta)).$$

Ici pour $x \in [-1/2, 1/2]$, on a

$$\log L_1(x;\theta) = \log\left(1+\theta\left(\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x) - \mathbb{1}_{[-1/2,0[}(x)\right)\right) = \log\left(1+\theta\left(2\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x)-1\right)\right),$$

d'où en dérivant par rapport à θ,

$$\partial_\theta \log L_1(x;\theta) = \frac{2\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x)-1}{1+\theta\left(2\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x)-1\right)}.$$

Donc la variable aléatoire $Y = \partial_\theta \log L_1(X_1;\theta)$ peut prendre que deux valeurs

$$\begin{cases} \frac{-1}{1-\theta}, & \text{avec probabilité } (1-\theta)/2 \\ \frac{1}{1+\theta}, & \text{avec probabilité } (1+\theta)/2 \end{cases}$$

Cette variable est centrée donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_\theta(Y) &= \mathbb{E}_\theta[Y^2] \\
&= \frac{1}{(1-\theta)^2}\frac{1-\theta}{2} + \frac{1}{(1+\theta)^2}\frac{1+\theta}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\theta} + \frac{1}{1+\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{(1-\theta)(1+\theta)} = \frac{1}{1-\theta^2}.
\end{aligned}$$

Donc l'information de Fisher de ce modèle est

$$I_n(\theta) = \frac{n}{1-\theta^2},$$

on voit que lorsque $\theta \approx 1$ ou -1, cette information est très grande.

3. Calculer l'estimateur $\hat{\theta}^{MV}$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Pour $n \geqslant 1, \theta \in (-1,1)$ et des observations $x_1, \dots, x_n \in [-1/2, 1/2]$, on a

$$\log L_n(x_1,\dots,x_n;\theta) = \sum_{i=1}^n \log\left(1+\theta\left(2\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x_i)-1\right)\right),$$

d'où en dérivant par rapport à θ,

$$\partial_\theta \log L_n(x_1,\dots,x_n;\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{2\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x_i)-1}{1+\theta\left(2\mathbb{1}_{[0,1/2]}(x_i)-1\right)} = s(x_1,\dots,x_n)\frac{1}{1+\theta} - (n - s(x_1,\dots,x_n))\frac{1}{1-\theta},$$

car l'intérieur de la somme ne peut prendre que deux valeurs différentes. Ainsi, cette dérivée se réécrit

$$\partial_\theta \log L_n(x_1,\dots,x_n;\theta) = \frac{2s(x_1,\dots,x_n)}{(1+\theta)(1-\theta)} - \frac{n}{1-\theta}.$$

D'où un point critique en

$$\begin{aligned}
\partial_\theta \log L_n(x_1,\ldots,x_n;\theta) = 0 &\iff \frac{2s(x_1,\ldots,x_n)}{(1+\theta)(1-\theta)} = \frac{n}{1-\theta} \\
&\iff \frac{2s(x_1,\ldots,x_n)}{n} = 1+\theta \\
&\iff \frac{2s(x_1,\ldots,x_n)-n}{n} = \theta
\end{aligned}$$

On peut vérifier qu'avant ce point, la dérivée est positive et après négative, il s'agit donc bien d'un maximum, donc

$$\hat{\theta}^{MV} = \frac{2s(X_1,\ldots,X_n)-n}{n}$$

4. L'estimateur $\hat{\theta}^{MV}$ est-il sans biais ?

On rappelle que $s(X_1,\ldots,X_n) \sim \mathcal{B}(n,(1+\theta)/2)$ d'où

$$\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}^{MV}] = \frac{n(1+\theta)-n}{n} = \theta,$$

donc l'estimateur est sans biais.

5. Vérifier que $\hat{\theta}^{MV}$ est un estimateur fortement consistant consistant.

Comme les variables $\mathbb{1}_{[0,1/2]}(X_i)$ sont indépendantes et identiquement distribuées, on a par la Loi des Grands Nombres,

$$s(X_1,\ldots,X_n)/n \overset{Q_\theta-p.s.}{\longrightarrow} (1+\theta)/2,$$

d'où par continuité des opérations usuelles,

$$\hat{\theta}^{MV} \overset{Q_\theta-p.s.}{\longrightarrow} \theta.$$