

**Feuille TD 3 : Intervalle de confiance et test statistique**

**Exercice 3.1 Durée vie d'une ampoule**

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}^{MV}$  du paramètre  $\theta$ , au vu d'observations  $x_1, \dots, x_n$  obtenues par un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  régi par une loi exponentielle  $\mathcal{E}(\theta)$ ,  $\theta > 0$ , i.e.

$$f_{\theta}(x) = \theta e^{-\theta x}, \text{ pour } x > 0.$$

2. **Application :** la durée de vie (en heures) d'un certain type d'ampoule est modélisée par une loi exponentielle de paramètre  $\theta^*$  inconnu. On a testé la durée de vie d'un échantillon de 30 de ces ampoules et on a obtenu les résultats suivants :

5153.89	667.51	249.14	289.22	1529.90	1398.49	1611.51	1016.90
1284.25	1426.83	487.94	527.57	1681.54	1414.59	880.41	1847.25
60.64	2240.23	986.03	981.95	794.00	157.77	147.75	505.42
1168.15	287.22	33.26	2377.38	732.37	923.60		

La moyenne de cet échantillon est  $\bar{x} = 1095.424$ . Donner une estimation de  $\theta^*$  au vu des résultats obtenus.

3. Construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\theta$ .

**Exercice 3.2 Paramètres d'un intervalle de confiance**

La quantité de liquide dans un flacon est supposée suivre une loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , où  $\sigma = 1.5\text{mL}$ , et  $\mu$  inconnue. On effectue une mesure sur 40 flacons, et on obtient une moyenne observée de 357 ml.

1. Donner un IC à 95% de  $\mu$ . On appelle *marge d'erreur* d'un intervalle de confiance  $I$  la quantité

$$d = (\sup I - \inf I)/2.$$

2. Dans la question précédente, ce sont le nombre d'observations  $n$  et le niveau  $\alpha$  qui ont déterminé la marge  $d$ . Sans changer  $n$ , trouver un niveau permettant d'avoir une marge  $d = 0.375$ .

3. Maintenant, on souhaite avoir un IC de niveau de confiance  $\alpha = 0.01$  et une marge d'erreur faible avec  $d = 0.1\text{mL}$ . Déterminer le nombre d'observations ?

**Exercice 3.3**

On considère  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d suivant la même loi de densité :

$$f(x, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{pour } x \geq 0$$

où  $\sigma > 0$ . Cette loi est appelée loi de Rayleigh notée  $\mathcal{R}(\sigma^2)$ . Dans cet exercice, on cherche à étudier des estimateurs de  $\theta = \sigma^2$  obtenus par la méthode des moments.

1. Soit  $X \sim \mathcal{R}(\sigma^2)$ . Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}.$$

On rappelle que  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Dans la suite, on admettra que  $\mathbb{E}(X^2) = 2\sigma^2$ ,  $\mathbb{E}(X^3) = 3\sqrt{\frac{\pi\sigma^6}{2}}$  et  $\mathbb{E}(X^4) = 8\sigma^4$ .

2. Déterminer un estimateur  $\hat{\theta}^{MM}$  de  $\theta$  par la méthode des moments en considérant le moment d'ordre 1.

3. À l'aide de la normalité asymptotique de  $\bar{X}_n$ , déterminer un intervalle de confiance asymptotique de  $\theta$  de niveau de confiance  $1 - \alpha$ .

4. Montrer que

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}^{MM}) = \frac{4 + \pi(n-1)}{n\pi} \theta.$$

Que peut-on en déduire ?

Le calcul pour déterminer si  $\hat{\theta}^{MM}$  est un estimateur efficace de  $\theta$  est trop compliqué. On décide alors de déterminer un nouvel estimateur  $\bar{\theta}^{MM}$  de  $\theta$  par la méthode des moments mais en considérant le moment d'ordre 2.

5. Déterminer  $\bar{\theta}^{MM}$ .

6. Déterminer un nouvel intervalle de confiance asymptotique de  $\theta$  de niveau de confiance  $1 - \alpha$ .

7. Étudier le biais de  $\bar{\theta}^{MM}$ .

8.  $\bar{\theta}^{MM}$  est-il efficace ?

### Exercice 3.4

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon *i.i.d* de loi parente  $X \sim \mathcal{I}(\theta)$  dont la densité de probabilité est donnée par, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta x^2} e^{-\frac{1}{\theta x}}$$

où  $\theta > 0$  est un paramètre inconnu.

1. Écrire le modèle statistique de l'échantillon. On admet que ce modèle est régulier.

2. Montrer, à l'aide d'un changement de variable adapté, que  $\mathbb{E}(X) = +\infty$ . Que peut-on en déduire pour la construction d'un estimateur de  $\theta$  par la méthode des moments ?

3. Montrer que  $\mathbb{E}(\frac{1}{X}) = \theta$  (*Indication : on pourra effectuer un changement de variable et une intégration par partie.*)

4. En déduire un estimateur  $\hat{\theta}^{MM}$  de  $\theta$  par la méthode des moments.

5. Montrer que  $\text{Var}(\frac{1}{X}) = \theta^2$ .

6. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de  $\theta$  d'un niveau de confiance  $1 - \alpha$  où  $\alpha \in ]0, 1[$ . On tâchera d'obtenir l'intervalle de confiance le plus précis possible.

7. Montrer que, pour tout  $\theta > 0$ ,  $I_n(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$  où  $I_n(\theta)$  est la quantité d'information de Fisher du modèle statistique de l'échantillon.

8.  $\hat{\theta}^{MM}$  est-il un estimateur efficace de  $\theta$  ?

### Exercice 3.5

exercice de tests avec ontervalle bilatéral

### Exercice 3.6 Vrai et Faux simultanément ?

On se place dans le modèle de  $n$  lancers de pièce indépendants ( $\{0, 1\}^n, (\mathbb{P}_\theta^{\otimes n})_{\theta \in (0,1)}$ ), où  $\mathbb{P}_\theta$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\theta$ . On choisit la convention où Pile correspond à un succès. On

souhaite tester l'hypothèse

$$(H_0) : "\theta = 0.43" \text{ contre } (H_1) : "\theta = 0.58".$$

1. Écrire une procédure de test de niveau  $\alpha = 5\%$  avec l'estimateur  $\bar{X}_n$ .
2. Après  $n = 100$  lancers, on observe 50 Piles. Que conclure ?
3. Inverser les hypothèses  $(H_0)$  et  $(H_1)$ , qu'elle est la nouvelle conclusion ?

### Exercice 3.7

Un négociant en vin s'intéresse à la contenance des bouteilles d'un producteur soupçonné par certains clients de frauder. Il souhaite s'assurer que cette contenance respecte bien en moyenne la limite légale de 75cL. À cet effet, il mesure le contenu de 10 bouteilles prises au hasard et obtient les valeurs suivantes (en cL) :

73.2	72.6	74.5	75	75.5	73.7	74.1	75.8	74.8	75
------	------	------	----	------	------	------	------	------	----

On suppose que la contenance des bouteilles (en cL) suit une loi gaussienne d'espérance  $\theta$  inconnue, d'écart-type connu égal à 1.

1. Écrire le modèle statistique associé.
2. Le négociant décide de tester l'hypothèse

$$(H_0) : "\theta = 75" \text{ contre } (H_1) : "\theta < 75".$$

Quel point de vue le négociant adopte-t-il en choisissant ces hypothèses ? Justifier précisément la réponse.

3. Construire, à l'aide d'une règle de décision intuitive basée sur la moyenne empirique, un test de niveau 1% de  $(H_0)$  contre  $(H_1)$ . Quelle est la conclusion de ce test ?
4. Le négociant veut pouvoir détecter, avec une probabilité élevée (99%), une contenance moyenne de 74.8cL tout en gardant un test de niveau 1%. Que doit-il faire ?

### Exercice 3.8 Peut-on retarder sa mort ?

On prétend couramment que les mourants peuvent retarder leur décès jusqu'à certains événements importants. Pour tester cette théorie, Philips et King (1988, article paru dans *The Lancet*, prestigieux journal médical) ont collecté des données de décès aux environs d'une fête religieuse juive. Sur 1919 décès, 922 (resp. 997) ont eu lieu la semaine précédente (resp. suivante). Comment utiliser de telles données pour tester cette théorie grâce à un test asymptotique ?

### Exercice 3.9 Test sur le support d'une loi uniforme

Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires i.i.d. de loi de Uniforme sur  $[0, \theta]$  avec  $\theta \in \mathbb{R}^+$  inconnu. On rappelle que l'EMV de ce modèle est

$$\hat{\theta}_{MV} = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Nous avons déjà dit que ce modèle n'est pas régulier et donc le comportement asymptotique de cet estimateur n'est pas gaussien. Dans la suite, on cherche à tester l'hypothèse

$$(H_0) : "\theta = 1" \text{ contre } (H_1) : "\theta > 1".$$

1. On propose le test suivant : on rejette  $(H_0)$  lorsque  $\hat{\theta}_{MV} > c$  ( $c$  constante donnée). Calculer la fonction de puissance.
2. Quelle valeur prendre pour  $c$  pour obtenir un niveau de 5% ?
3. Si  $n = 20$  et que la valeur observée de  $\hat{\theta}_{MV}$  est 0.96, que vaut la  $p$ -value ? Quelle conclusion tirer sur  $(H_0)$  ? Même question pour l'observation  $\hat{\theta}_{MV} = 1.04$ .