Université de Pau et des Pays de l'Adour | **Semestre printemps 2023–2024**
L3 Math | Introduction à la Statistique

Sujet blanc - Estimation et test statistique

Exercice 1 Estimation d'un paramètre pour une loi discrète

Soit X une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée par pour tout $x \in \mathbb{N}^*$

$$f(x;\theta) = \mathbb{P}_\theta(X = x) = \frac{\theta^{x-1}}{(\theta+1)^x}$$

où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. On dispose d'un échantillon $X_1, ..., X_n$ $i.i.d$ de loi parente X et on souhaite déterminer un estimateur de θ.

1. Écrire le modèle statistique de l'échantillon considéré.
2. Vérifier que X suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{1+\theta}$. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer $\hat{\theta}_{MM}$ un estimateur de θ par la méthode des moments en considérant le moment d'ordre 1.
4. Étudier le biais de $\hat{\theta}_{MM}$.
5. Montrer la normalité asymptotique de l'estimateur $\hat{\theta}_{MM}$ de θ.
6. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de θ de niveau de confiance $1-\alpha$.
7. Écrire la fonction vraisemblance L_n associée à l'échantillon considéré.
8. Montrer que pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ et $\theta > 0$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\log L_n(x_1, \ldots, x_n; \theta)) = \frac{n(\bar{x} - 1 - \theta)}{\theta(\theta+1)}$$

où $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

9. En déduire que $\hat{\theta}_{MV}$ l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ est identique à $\hat{\theta}_{MM}$.

On définit $\hat{\theta} = \hat{\theta}_{MM} = \hat{\theta}_{MV}$.

10. Vérifier que $\hat{\theta}$ est consistant.
11. Calculer la quantité d'information de Fisher du modèle de l'échantillon. $\hat{\theta}$ est-il efficace ?

Exercice 2 Réussite d'un examen

On souhaite s'assurer que les élèves aient bien compris le cours de Statistique, i.e. que leurs notes soient centrées autour d'une note **strictement supérieure à 10**. Pour simplifier la modélisation, on suppose que la note d'un élève suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et que les différentes copies sont indépendantes. On cherche à tester la valeur de m lorsque la variance σ^2 est **inconnue**

1. Choisir une alternative de l'hypothèse nulle

$$(H_0) : \text{"}m = 10\text{"}.$$

2. Proposer une procédure de test pour tester les hypothèses précédentes. Bien justifier le choix de la zone de rejet et le comportement **non asymptotique** sous (H_0) de la statistique

$$T_n = \sqrt{n} \times \frac{\bar{X}_n - 10}{\sqrt{S_n^2}}.$$

3. Avec un échantillon de taille $n = 23$, la moyenne du CC2 est de 10.2 pour un écart-type de 2.7. On observe ici $T_n = 0.36$, quelle est la conclusion de votre test avec un seuil de 5% ?