Théorème de Hadamard-Lévy

Références : C. Zuily et H. Queffelec, *Elements d'analyse*, 2ème édition – M. Zavidovique, *Un max de maths.*

Leçons : 203, 204, 214, 215, 220.

Définition 1

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite propre si et seulement si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(K)$ est compact. Ceci équivaut à $\|f(x)\| \underset{\|x\|\to+\infty}{\to} +\infty$.

L'objectif du développement est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2 (*Théorème d'inversion globale de Hadamard-Lévy*)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Il y a équivalence entre :

1. *f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$.*
2. *f est propre et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration : ($\Rightarrow$) Supposons que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$. En différentiant la relation $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, on obtient par le théorème des fonctions composées que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d(f^{-1})_{f(x)} \circ df_x = \mathrm{Id}$, ce qui assure l'inversibilité de la différentielle en tout point. Pour le caractère propre, il suffit de remarquer que si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors $f^{-1}(K)$ est un compact comme image du compact K par l'application continue f^{-1}.

($\Leftarrow$) **Étape 1 :** Supposons maintenant que f est une application propre et dont la différentielle est inversible en tout point. Cette dernière hypothèse permet d'appliquer le théorème d'inversion locale à f ce qui assure que f est localement un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Il s'agit donc de montrer que f est bijective, on pourra ainsi utiliser le théorème d'inversion globale. On se donne $y \in \mathbb{R}^n$ et on cherche à montrer que y admet un unique antécédent par f, c'est-à-dire que Card $(f^{-1}(\{y\})) = 1$. Quitte à poser $g = f - y$, qui vérifie les mêmes hypothèses que f, on se ramène à étudier le nombre d'antécédents de 0 par f.

Étape 2 : L'idée est alors simple : il s'agit de trouver un flot le long duquel f décroît vers 0. Pour cela, on pose :

$$F : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto -(df_x)^{-1}.f(x) \end{array} \right. .$$

Il s'agit d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ puisqu'on a supposé f de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi on considère le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y' & = F(y) \\ y(0) & = q \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. .$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que ce problème admet une unique solution maximale qu'on note $\varphi(., q)$ définie sur un intervalle maximal $[0, T^*[$. Voyons maintenant en quoi le choix de cette fonction F permet d'atteindre l'objectif qu'on s'est fixé. On considère l'application

$$t \in [0, T^*[\mapsto g(t) := f \circ \varphi(t, q).$$

Cette application est $\mathcal{C}^1$ et vérifie :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T^*[, \quad g'(t) &= df_{\varphi(t,q)}.\partial_t \varphi(t, q) \\ &= df_{\varphi(t,q)}.(-(df_{\varphi(t,q)})^{-1}.f(\varphi(t, q))) \\ &= -g(t). \end{aligned}$$

Ainsi par unicité de la solution, on en déduit que :

$$\forall t \in [0, T^*[, \ f(\varphi(t, q)) = e^{-t} f(q).$$

En particulier, on en déduit que le flot $\varphi(., q)$ est à valeurs dans $f^{-1}(\overline{B}(0, \|f(q)\|))$ qui est compact puisque f est propre. Le théorème de sortie de tout compact assure que la solution φ est globale, c'est-à-dire que $T^* = +\infty$. De plus comme le flot est à valeurs dans un compact, on en déduit qu'il existe $y \in \mathbb{R}^n$ et une sous-suite $(t_k)_k$ strictement croissante vers $+\infty$ telle que :

$$\varphi(t_k, q) \underset{k \to +\infty}{\to} y.$$

On déduit alors, par continuité de f, que $f(y) = 0$ puisque $g(t_k) \to 0$. On a donc l'existence d'un antécédent de 0 pour f (ce qui montre la surjectivité de f). Il s'agit maintenant de montrer que cet antécédent est unique.

Étape 3 : On remarque que les équilibres du système différentiel introduit sont exactement les zéros de f. Nous allons voir qu'ils sont asymptotiquement stables. Pour cela appliquons le théorème d'inversion locale en y. On dispose de U^y un voisinage de y dans $\mathbb{R}^n$ et de $B^y := B(0, \delta_y)$ tel que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U^y sur B^y. Supposons qu'il existe t_0 tel que $\varphi(t_0, q) \in U^y$. Montrons que l'on a :

$$\{t \in [t_0, +\infty[, \ \varphi(t, q) \in U^y\} = \{t \in [t_0, +\infty[, \ \varphi(t, q) = (f_{|U^y})^{-1}(e^{-t} f(q))\}.$$

L'inclusion directe vient du fait que $f(\varphi(t_0, q)) = e^{-t_0} f(q) \in B^y$ et comme la norme décroît quand t augmente, $f(\varphi(t, q)) = e^{-t} f(q) \in B^y$, pour tout $t \geq t_0$. En appliquant $(f_{|U^y})^{-1}$, on obtient l'inclusion directe. L'inclusion réciproque est claire.

Le premier ensemble est ouvert comme pré-image d'un ouvert par l'application continue $\varphi(., q)$. Le second est fermé comme pré-image de 0 par l'application continue $\varphi(t, q) - f_{|U^y}^{-1}(e^{-t} f(q))$. Comme les ensembles sont égaux, il s'agit d'un ouvert fermé non vide, donc égal à $[t_0, +\infty[$, par connexité de ce dernier ensemble. En laissant tendre t vers $+\infty$ dans l'égalité : $\varphi(t, q) = f_{|U^y}^{-1}(e^{-t} f(q))$, on obtient que :

$$\varphi(t, q) \underset{t \to +\infty}{\to} y,$$

puisque y est le seul 0 de f dans U^y. Or dans l'étape 2, on a fait converger le flot vers y à extraction près, on en déduit qu'en fait il converge globalement vers y lorsque t tend vers $+\infty$.

Étape 4 : On utilise un argument de connexité pour conclure. Posons, pour $y \in f^{-1}(\{0\})$:

$$W^y := \left\{ q \in \mathbb{R}^n, \ \varphi(t, q) \underset{t \to +\infty}{\to} y \right\}.$$

Dans les étapes précédentes, on a vu que :

$$(*) \quad \mathbb{R}^n = \bigcup_{y \in f^{-1}(\{0\})} W^y.$$

En effet, la trajectoire issue de n'importe quelle donnée initiale converge vers un 0 de f.

Montrons que les W^y sont des ouverts non vides. Le caractère non vide provient du fait que $y \in W^y$, puisque y est un équilibre du système différentiel. Pour le caractère ouvert, on reprend le voisinage U^y de y obtenu à l'étape 2 par le théorème d'inversion locale. On dispose de $\eta_y > 0$, tel que $B(y, 2\eta_y) \subset U^y$. Soit $q \in W^y$, on dispose de $T > 0$ tel que $\varphi(T,q) \in B(y, \eta_y)$. De plus, la continuité du flot par rapport à la donnée initiale assure qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\|q - q'\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(T,q) - \varphi(T,q')\| < \eta_y.$$

L'inégalité triangulaire assure alors que pour $\|q - q'\| < \delta$, on a : $\varphi(T,q') \in B(y, 2\eta_y) \subset U^y$. L'étape 3 assure alors que :

$$\varphi(t,q') \underset{t \to +\infty}{\to} y.$$

Ainsi $B(q,\delta)$ est inclus dans W^y, qui est donc ouvert. L'égalité $(*)$ ainsi que la connexité de $\mathbb{R}^n$ assurent que :

$$\text{Card } f^{-1}(\{0\}) = 1,$$

ce qui achève la preuve.

□

Remarque 3.

1. *Le théorème reste vrai dans le cas où f est seulement supposée de classe $\mathcal{C}^1$ mais la preuve est plus compliquée (on ne peut pas directement utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz avec le lemme de sortie de tout compact).*
2. *On peut se demander d'où vient l'EDO qu'on introduit. En fait on peut l'interpréter comme une version continue de la méthode de Newton, en interprétant y' comme $u_{n+1} - u_n$ (dérivée discrète).*
3. *La continuité du flot par rapport à la donnée initiale à temps fixé résulte facilement du lemme de Gronwall.*

Annexe

Donnons une application de ce théorème. Je ne suis pas sûr mais ça doit se trouver sur le site de J. Lafontaine.

Application 4. *Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, pour tout $L \in GL_n(\mathbb{R})$ si :*

$$\|a\| < \epsilon, \quad \textit{et} \quad \|L - Id\| < \epsilon,$$

alors il existe un difféomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que :

- $\forall \|x\| < 1, \quad f(x) = Lx + a.$
- $\forall \|x\| > 2, \quad f(x) = x.$

Autrement dit f est un isomorphisme affine autour de 0 et f est l'identité assez loin de 0.

Démonstration : On note $\|.\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. On considère une fonction plateau $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[-1, 1]$ et 0 sur $[-2, 2]^C$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = x + g(\|x\|^2)(Lx + a - x).$$

Cette application est clairement C^1 et propre car c'est l'identité en dehors d'une boule compacte. La différentielle de f est clairement inversible en x si $\|x\| < 1$ ou si $\|x\| < 2$. Soit maintenant x tel que $1 \leq \|x\| \leq 2$. Un calcul montre que pour $h \in \mathbb{R}^n$:

$$df_x.h = h + g(\|x\|^2)(Lh - h) + 2\langle x, h\rangle g'(\|x\|^2)(Lx + a - x).$$

Notons $M = \|g'\|_\infty.$, on a :

$$\|df_x - \mathrm{Id}\| \leq (1 + 4M)\|L - \mathrm{Id}\| + 4M\|a\|.$$

Ainsi si L est assez proche de Id et si a est assez proche de 0, on a :

$$\|df_x - \mathrm{Id}\| < 1,$$

ce qui entraîne classiquement que $df_x \in GL_n(\mathbb{R})$ (série de Neumann). Le théorème de Hadamard-Lévy permet de conclure. $\square$