Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

Références : H. Dym et H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals* – `https://www.math.univ-toulouse.fr/~ckilque/documents_agregation/developpements_individuels/marche_aleatoire.pdf`

Leçons : 260, 262, 264

Commençons par introduire quelques notations. On se donne $d \geq 1$ un entier et on note $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit $(X_i)_i$ une suite de variables aléatoire iid de loi uniforme sur $\{\pm e_1, \ldots, \pm e_d\}$. On définit alors la marche aléatoire isotrope par :

$$\begin{cases} S_0 &= 0 \\ S_n &= \sum_{k=1}^{n} X_k \end{cases}.$$

Il s'agit d'une chaîne de Markov homogène. On s'intéresse à la classification des états de cette chaîne.

Définition 1

Soit $k \in \mathbb{Z}^d$. On définit le nombre de visites d'un état par :

$$N_k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{S_n = k}.$$

Théorème 2

On a la dichotomie suivante :

- *Si $d \geq 3$, alors :*

$$\mathbb{E}(N_0) < +\infty.$$

  De plus :

$$|S_n| \to +\infty \quad ps.$$

  On dit que la marche aléatoire est transiente.

- *Si $d \in \{1, 2\}$, alors :*

$$\mathbb{E}(N_0) = +\infty.$$

  De plus, $N_0 = +\infty$ ps. On dit que l'état 0 (ou la marche aléatoire puisqu'elle est irréductible et donc tous les états le seront) est récurrent.

Démonstration :

- **Étape 1 :** D'après Fubini-Tonelli, on a :

$$\mathbb{E}(N_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0),$$

puisqu'on ne peut revenir en 0 qu'en un nombre pair de pas ($|S_n|_1 = n[2]$).

- **Étape 2 :** On note ϕ la fonction caractéristique de X_1 et ϕ_{S_n} la fonction caractéristique de S_n. Remarquons déjà que par hypothèse, on a :

$$\forall n,\, \phi_{S_n} = \phi^n.$$

On note également :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad |x|_1 := |x_1| + \cdots + |x_d|.$$

Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi_{S_n}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |k|_1 \leq n} \mathbb{P}(S_n = k) e^{it.k},$$

la linéarité de l'intégrale assure alors que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \phi_{S_n}(t)\, dt &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |k|_1 \leq n} \mathbb{P}(S_n = k) \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{it.k}\, dt \\ &= \mathbb{P}(S_n = 0)\, , \text{par un simple calcul de l'intégrale en utilisant Fubini.} \end{aligned}$$

- **Étape 3 :** On donne maintenant une expression explicite de la fonction caractéristique ϕ dans notre cas. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi(t) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^{d} (e^{it.e_k} + e^{-it.e_k}) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} cos(t_k) \in [-1, 1].$$

- **Étape 4 :** On peut maintenant donner une expression intégrale de la quantité $\mathbb{E}(N_0)$ qui nous intéresse pour la classification de l'état 0 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \phi^{2n}(t)\, dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1 - \phi^2(t)}\, dt, \end{aligned}$$

d'après Fubini-Tonelli.

- **Étape 5 :** Étudions maintenant l'intégrale. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1-\phi^2(t)}$ est continue sur $[-\pi, \pi]^d \backslash \{(0, \dots, 0)\} \cup \{(\pm\pi, \dots, \pm\pi)\}$, dont y est localement intégrable. L'étude de l'intégrabilité en un point de l'ensemble $\{(\pm\pi, \dots, \pm\pi)\}$ se ramène à celle en 0 par périodicité. Or on a le développement limité suivant :

$$\begin{aligned}\phi(t) &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}(1 - \frac{t_k^2}{2} + o(|t_k|^2)) \\ &\underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{\|t\|_2^2}{2d} + o(\|t\|^2)\end{aligned}$$

On déduit alors que :

$$\frac{1}{1-\phi^2(t)} \underset{t\to 0}{=} \frac{d}{\|t\|^2} + o\left(\frac{1}{\|t\|^2}\right).$$

Or par intégration des fonctions radiales (voir à la fin du développement pour le détail), la fonction $t \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\} \mapsto \frac{1}{\|t\|_2^2}$ est intégrable en 0 si et seulement si $r \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{r^2}r^{d-1}$ est intégrable en 0 donc si et seulement si $d \geq 3$. On déduit que :

$$\mathbb{E}(N_0) < +\infty \Leftrightarrow d \geq 3.$$

- **Étape 6 :** On conclut dans le cas $d \geq 3$. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbb{E}(N_k) < +\infty$, sachant qu'on a le résultat pour $k = 0$ d'après ce qui précède. Soit $k \in \mathbb{Z}^d$ et $l = |k|_1$. En considérant un cas particulier (faire des pas dans chaque direction successivement par exemple), on a :

$$\mathbb{P}(S_l = -k) \geq \frac{1}{(2d)^l}.$$

On a alors pour tout $n > l$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = 0) &\geq \mathbb{P}(S_n = 0, S_l = -k) \\ &= \mathbb{P}(S_l = -k, S_n - S_l = k) \\ &= \mathbb{P}\left(S_l = -k, \sum_{j=l+1}^{n} X_j = k\right) \\ &= \mathbb{P}(S_l = -k)\mathbb{P}(S_{n-l} = k) \quad \text{(caractère iid des } X_i) \\ &\geq \frac{1}{(2d)^l}\mathbb{P}(S_{n-l} = k)\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à sommer sur n pour avoir le résultat. On déduit donc que presque sûrement :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d,\ N_k < +\infty.$$

On a successivement :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|S_n| \to +\infty) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{A\in\mathbb{N}}\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq n_0}\{|S_n|_1 \geq A\}\right) \\ &= \lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n_0\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq n_0}\{|S_n|_1 \geq A\}\right), \quad \text{par continuité décroissante de la probabilité} \\ &= \lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}\left(\liminf_n\{|S_n|_1 \geq A\}\right) \\ &= \lim_{A\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{|k|_1<A}\{N_k < +\infty\}\right) \\ &= 1, \quad \text{comme intersection d'événements presque-sûrs.}\end{aligned}$$

- **Étape 7 :** On conclut dans le cas $d \in \{1,2\}$, i.e $\mathbb{E}(N_0) = +\infty$. On note T le dernier temps d'atteinte de 0 :

$$T = \sup\{n \geq 0,\, S_n = 0\}.$$

T est bien défini car l'ensemble en question contient 0 donc est non vide. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T < +\infty) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0,\, \forall k > n,\, S_k \neq 0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0,\, \forall k > n,\, S_k - S_n \neq 0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\mathbb{P}(T = 0).
\end{aligned}$$

Puisque par hypothèse :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty,$$

on a nécessairement $\mathbb{P}(T = 0) = 0$, donc : $\mathbb{P}(T < +\infty) = 0$. Or on a l'égalité des événements suivants :

$$(T = +\infty) = \limsup_n \{S_n = 0\} = (N_0 = +\infty),$$

on a bien $N_0 = +\infty$ presque sûrement.

$\square$

Annexe

-Preuve du résultat utilisé d'intégration des fonctions radiales

On pourra trouver dans le livre de O. Garet et A. Kurtzmann : *De l'intégration aux probabilités.*

Proposition 3

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$. Alors la fonction $\phi \circ \|.\|$ est intégrable si et seulement si la fonction $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^{d-1}\phi(t)$ est intégrable. De plus on a l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\|x\|)\, dx = V \int_{\mathbb{R}^+} \phi(t)\, d\, t^{d-1}\, dt,$$

Où on note V le volume de la boule unité pour la norme $\|.\|$.

Démonstration : On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. D'après le lemme de transfert, la fonction $\phi \circ \|.\|$ est intégrable par rapport à λ_d si et seulement si ϕ est intégrable par rapport à la mesure image m de λ_d par $\|.\|$. On aura alors dans ce cas :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\|x\|)\, dx = \int_{\mathbb{R}^+} \phi(t)\, dm(t).$$

Il nous reste à identifier m. Soit $a > 0$, on a par définition :

$$\begin{aligned} m([0,a]) &= \lambda_d(B(0,a)) \\ &= \lambda_d(a\, B(0,1)) \\ &= a^d \lambda_d(B(0,1)) \quad \text{(par propriété d'échelle de la mesure de Lebesgue)} \\ &= a^d V \\ &= \int_{[0,a]} V d t^{d-1}\, dt \end{aligned}$$

Puisque les intervalles de la forme $[0,a]$ engendrent la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ et forment une famille stable par intersections finies, on déduit du lemme d'identification des mesures (conséquences des résultats sur les classes monotones) que m est la mesure à densité $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto V d t^{d-1}$: le résultat suit du lemme de transfert. □

-Quelques résultats sur la classification des états d'une chaîne de Markov.

Cela peut être utile pour avoir un peu de recul sur ce qu'on manipule mais je ne pense pas que ce soit nécessaire pour faire le développement ! On peut parler de tout cela dans les leçons 230, 241, 243 (quand on aime les probas, on ne compte pas !)

Définition 4

Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov homogène d'espace d'états E dénombrable et soit $x \in E$.

- *x est dit récurrent si $\mathbb{P}_x(\tau_x < +\infty) = 1$, où $\mathbb{P}_x$ est une probabilité sous laquelle notre chaîne de Markov part de l'état x et :*

$$\tau_x = \inf\{n \geq 1,\, X_n = x\}.$$

- *x est dit transient si $\mathbb{P}_x(\tau_x < +\infty) < 1$.*

Définition 5

Soient $s \in [0,1]$, $x, y \in E$. On définit :

- $U(x,y,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_x(\tau_y = n) s^n$ *et donc* $U(x,y) = \mathbb{P}_x(\tau_y < +\infty)$.
- $G(x,y,s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_n = y) s^n$ *et donc* $G(x,y) = \mathbb{E}_x(N_y)$ *où* $N_y = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n = y}$.

x est donc récurrent si et seulement si $U(x,x) = 1$.

Lemme 6

Soient $s \in [0,1[$ et $x \in E$. On a :

$$G(x,x,s) = 1 + G(x,x,s)U(x,x,s).$$

Démonstration : On a successivement :

$$\begin{aligned}
G(x,x,s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_n = x)s^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_n = x)s^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_x(X_n = x \, , \, \tau_x = k) \right) s^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_x(X_1, \dots, X_{k-1} \neq x, \; X_k = x, \; X_n = x) \right) s^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_x(X_1, \dots, X_{k-1} \neq x, \; X_k = x)\mathbb{P}_x(X_n = x | X_k = x) \right) s^n \quad \text{(prop. de Markov)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_x(\tau_x = k)\mathbb{P}_x(X_{n-k} = x) \right) s^n \\
&= 1 + G(x,x,s)U(x,x,s) \quad \text{(par produit de Cauchy).}
\end{aligned}$$

□

Corollaire 7

x est récurrent si et seulement si $G(x,x) = +\infty$.

Démonstration : Soit $s \in [0,1[$, on a :

$$G(x,x,s) = \frac{1}{1 - U(x,x,s)}.$$

En laissant tendre s vers 1 (par convergence monotone), on a l'équivalence voulue. □

Remarquons qu'on a étudié la fonction G dans le développement.

Définition 8

On définit :

- $H(x,y) = \mathbb{P}_x(\limsup(X_n = y)) = \mathbb{P}_x(X_n = y$ *pour une infinité de* $n) = \mathbb{P}_x(N_y = +\infty)$.
- $H^{(m)}(x,y) = \mathbb{P}_x(X_n = y$ *pour au moins* m *entiers* $n \geq 1)$

Énonçons enfin la loi de type $0-1$, qu'on a redémontrée dans le développement.

Proposition 9

- *x est récurrent si et seulement si $H(x,x)=1$*
- *x est transient si et seulement si $H(x,x)=0$.*

Lemme 10

Soient $m \geq 1$, $x, y \in E$, alors :

$$H^{(m+1)}(x,y) = U(x,y)H^{(m)}(y,y).$$

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned}
H^{(m+1)}(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\tau_y = k\,,\, X_n = y \text{ pour au moins m entiers } n \geq k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\tau_y = k)\mathbb{P}_x(X_n = y \text{ pour au moins m entiers } n \geq k+1 | \tau_y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\tau_y = k)\mathbb{P}_x(X_n = y \text{ pour au moins m entiers } n \geq k+1 | X_k = y) \quad \text{(Markov)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\tau_y = k)\mathbb{P}_y(X_n = y \text{ pour au moins m entiers } n \geq 1) \\
&= U(x,y)H^{(m)}(y,y).
\end{aligned}$$

□

On peut maintenant démontrer la proposition.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que :

$$H^{(1)}(x,x) = \mathbb{P}_x(\tau_x < +\infty) = U(x,x).$$

La lemme précédent permet alors de montrer par récurrence que :

$$\forall m \geq 1,\ H^{(m)}(x,x) = (U(x,x))^m.$$

On obtient le résultat voulu en laissant tendre m vers $+\infty$ puisque :

$$H^{(m)}(x,x) \underset{m \to +\infty}{\to} H(x,x),$$

par continuité décroissante des probabilités. □

-Étude plus fini du temps de retour en 0 de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$.

Il est classique que :

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n},$$

car l'événement est déterminé de manière unique par les n instants où la marche va à droite. On peut donc calculer la fonction G :

$$\forall s \in [0, 1[,\ G(0, 0, s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} s^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} \quad \text{(développement en série des fonctions puissances).}$$

D'après un lemme précédent :

$$\forall s \in [0, 1[,\ U(0, 0, s) = 1 - \frac{1}{G(0, 0, s)} = 1 - \sqrt{1 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(2n - 1)} s^{2n},$$

en utilisant le développement en série des fonctions puissances. Cela assure que pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(\tau_0 = 2n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n(2n - 1)}.$$

De plus par convergence monotone :

$$\mathbb{E}(\tau_0) = \lim_{s \to 1^-} \frac{dU(0, 0, s)}{ds} = +\infty.$$

Le temps de retour en 0 est fini presque sûrement (puisque 0 est récurrent) mais n'est pas intégrable (on dit que 0 est récurrent nul).

Remarque 11. - *Selon la vitesse à laquelle on va, on peut passer l'étape 6 ou 7, par exemple en énonçant seulement le résultat de transience en dimension supérieure à* 3 *dans le développement.*

- *Dans le cas où la marche n'est pas symétrique sur* $\mathbb{R}$*, la loi forte des grands nombres implique la divergence presque-sûre vers* $\pm\infty$ *selon que la marche a tendance à aller vers la gauche ou la droite.*