Leçon 250:
Transformée de Fourier. Applications.

Thomas COURANT

Mars 2024

Table des matières

0 Introduction

La transformée de Fourier est une extension pour les fonctions non périodiques des séries de Fourier. Elle a pour objectif d'étudier une fonction comme une moyenne de fonctions trigonométriques de toutes fréquences. Elle a été introduite en 1822 par Joseph Fourier avec les séries de Fourier pour pouvoir résoudre l'équation de la chaleur. Aujourd'hui, elle a des applications dans des domaines très variés des mathématiques.
Dans ce rapport nous allons commencer par définir la transformée de Fourier dans différents espaces fonctionnels et voir quelques-unes de ses propriétés importantes. Puis dans une deuxième partie, nous nous intéresserons à certains principes d'incertitudes qui ont pour objectif de quantifier la relation entre la concentration d'une fonction et l'étalement de sa transformée de Fourier. Nous utiliserons aussi la transformée de Fourier pour résoudre un certain nombre d'équations aux dérivées partielles dont l'équation des cordes ou l'équation de Schrödinger. Puis pour finir, nous nous intéresserons aux applications de la transformée de Fourier en probabilités avec les fonctions caractéristiques.

1 Transformation de Fourier dans différent espaces fonctionnels

1.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

[Amr08]
Pour définir la transformée de Fourier, l'hypothèse la plus naturelle est de supposer la fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Nous allons donc commencer par étudier la transformée de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R})$.

Définition 1.1.1
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit la transformée de Fourier de f comme la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{C}$ définie par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, \mathrm{d}x.$$

On commence par montrer que $\hat{f}$ est bien définie et on regarde son comportement en $\pm\infty$.

Lemme 1.1.1 (Riemann-Lebesgue)
Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ est bien définie et on a :

$$\lim_{|\xi|\to 0} \hat{f}(\xi) = 0.$$

On peut maintenant donner la transformée de Fourier pour certaines fonctions intégrables.

Exemple 1.1.1

1. *Pour une fonction indicatrice, on a avec $a < b$:*

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{\left(\mathbb{1}_{[a,b]}\right)}(\xi) = 2\frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}\xi\right)}{\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a+b)\xi/2}.$$

2. *Pour la densité de poisson, on a :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\right)}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

3. *Pour la gaussienne on a avec $a > 0$ un paramètre :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{\left(\mathrm{e}^{-ax^2}\right)}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Remarque 1.1.1
Les fonctions indicatrices sont intégrables mais pas leur transformée de Fourier, on observe donc que la transformée de Fourier n'opère pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

Théorème 1.1.1
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{C}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$.

Dans la suite on notera $\mathscr{C}_O(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 en $\pm\infty$, on peut reformuler le théorème précédent.

Corollaire 1.1.1.1
L'application transformée de Fourier :

$$\mathscr{F} : \begin{array}{ccc} \left(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_1\right) & \longrightarrow & (\mathscr{C}_0(\mathbb{R}), \|.\|_\infty) \\ u & \longmapsto & \hat{u} \end{array},$$

est une application linéaire et continue.

En munissant $L^1(\mathbb{R})$ du produit de convolution et $\mathscr{C}_O(\mathbb{R})$ du produit usuel on obtient deux algèbres. Un résultat important est que $\mathscr{F}$ est un morphisme d'algèbre, c'est la proposition suivante :

Proposition 1.1.1
Pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}.$$

Corollaire 1.1.1.2
Il n'existe pas d'éléments neutres pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Un autre résultat important c'est la formule de dualité.

Proposition 1.1.2 (Formule de dualité)
Pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il reste une question, c'est de comprendre si $\mathscr{F}$ est injectif ou surjectif. Pour répondre à cette question, nous allons montrer le théorème suivant qui permet d'inverser la transformée de Fourier sous certaines conditions.

Théorème 1.1.2 (Formule d'inversion)
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\, d d\xi.$$

Corollaire 1.1.2.1
La transformée de Fourier $\mathscr{F} : : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ est injective.

Exemple 1.1.2
La formule d'inversion nous permet aussi de calculer certaines transformées de Fourier, par exmple on obtient que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathscr{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|\xi|}. \tag{1.1.1}$$

Mais $\mathscr{F}$ n'est pas surjective, c'est le résultat suivant.

Proposition 1.1.3
L'application $\mathscr{F} : : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

La formule nous permet aussi d'affiner le lien entre transformée de Fourier et convolution en donnant une réciproque à la proposition 1.1.1.

Proposition 1.1.4
Soient $f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et de plus :

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\hat{f} * \hat{g}.$$

Il nous reste plus qu'à voir le lien entre dérivée et transformée de Fourier, ce qui nous sera très utile pour la résolution d'EDP.

Proposition 1.1.5
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et tel que $\frac{\partial f}{\partial x} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(\xi) = \mathrm{i}\xi\widehat{(xf(.)}(\xi).$$

Proposition 1.1.6
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, telle que $x : \longmapsto xf(x)$ soit dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa dérivée est bornée sur $\mathbb{R}$ donnée par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi}(\xi) = -\mathrm{i}\widehat{(xf)}(\xi).$$

1.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

[Amr08]
La transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas complètement satisfaisante, en effet elle a valeur dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ qui n'est pas complet, n'est pas surjective et de plus elle n'est pas toujours inversible. C'est pour cela qu'on a besoin de l'étendre à d'autre espaces fonctionnels. Un bon moyen est d'utiliser la formule de Plancherel-Parseval qui permet d'étendre la transformée de Fourier en une isométrie, à une constante multiplicative près, de $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 1.2.1 (Formule de Plancherel-Parseval)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et dans ce cas on a :

$$\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Remarque 1.2.1
En terme de produit scalaire la formule de Plancherel-Parseval s'écrit :

$$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

On utilise maintenant la densité de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ pour pourvoir étendre la transformée de Fourier à $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 1.2.2
L'application linéaire continue injective

$$\mathscr{F}: \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \hat{u} \end{array},$$

s'étend en une unique application linéaire continue injective (que l'on note toujours $\mathscr{F}$) :

$$\mathscr{F}: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}).$$

Cette application est la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$, de plus on a toujours l'égalité de Plancherel-Parseval :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|\mathscr{F}(f)\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Pour la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ nous n'avons plus de formule exacte pour la calculer mais on a le lien suivant avec la formule intégrale.

Proposition 1.2.1
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a le résultat suivant :

$$\lim_{A \to +\infty} \|f - \varphi_A\|_{L^2} = 0 \quad et \quad \lim_{A \to +\infty} \|\hat{f} - \psi_A\|_{L^2} = 0,$$

où on a posé

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \varphi_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x \quad et \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

De plus on retrouve la même formule de dualité que pour la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$. C'est la proposition suivante.

Proposition 1.2.2 (Formule de dualité)
Pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\mathscr{F}(f)g$ et $f\mathscr{F}(g)$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}(f)g\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\mathscr{F}(g)\,\mathrm{d}x.$$

Il ne nous reste plus qu'à étudier les propriétés d'injectivité et de surjectivité de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$, c'est l'objectif du théorème suivant.

Théorème 1.2.3
La transformée de Fourier

$$\mathscr{F}: L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}).$$

est un isomorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$*, d'inverse* $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\mathscr{F}}$.

On s'intéresse maintenant aux valeurs propres et vecteurs propres de la transformée de Fourier. Pour cela, nous allons introduire les polynômes et les fonctions de Hermite.

Définition 1.2.1 (Polynômes de l'Hermite)
On définit pour $n \in \mathbb{N}$ *les polynômes de Hermite par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = \mathrm{e}^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)(x).$$

On peut maintenant définir les fonctions de Hermite.

Définition 1.2.2
On définit pour $n \in \mathbb{N}$ *les fonctions de Hermite par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n(x) = C_n H_n(x)\, \mathrm{e}^{-x^2/2},$$

où c_n *est une constante positive telle que* $\|h_n\|_2 = 1$.

Pour finir on peut énoncer le théorème de réduction de la transformée de Fourier sur L^2.

Théorème 1.2.4
La famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base hilbertienne de* $L^2(\mathbb{R})$ *et de plus pour* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\mathscr{F}(h_n) = (-1)^n \sqrt{2\pi}\, h_n.$$

1.3 Tansformée de Fourier et classe de Schwartz

[Amr08] et [Li13].
Un autre moyen pour étendre la transformée de Fourier à d'autres espaces fonctionnels est de le faire par dualité. Pour celas nous avons besoin de trouver l'espace le "plus petit" possible stable par la transformée de Fourier. C'est l'objectif de cette partie en s'intéressant à la classe de Schwartz.

Définition 1.3.1 (Classe de Schwartz)
On appelle classe de Schwartz, $\mathscr{S}(\mathbb{R})$*, l'ensemble des fonctions* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{C}$ *telles que :*

1. f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*,*
2. f *est à décroissante rapide c'est à dire :*

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l f}{\partial x^l} \right| < +\infty.$$

Dans la proposition suivante, on regroupe les différentes propriétés de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ qui découlent directement de sa définition.

Proposition 1.3.1
On a les résultats suivants :

1. $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel.*

2. *On a les inclusions suivantes :*

$$\forall p \in [1,+\infty], \quad \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}).$$

3. *$\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation :*

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

4. *$\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est stable par produit :*

$$\forall f,g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad fg \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

5. *$\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est stable par produit par un polynôme :*

$$\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}),\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad x^k f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

6. *$\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est stable par convolution :*

$$\forall f,g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Exemple 1.3.1
Soit $P \in \mathrm{C}[X]$ et $a > 0$ alors on a :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathrm{C} \\ x & \longmapsto & P(x)\,\mathrm{e}^{-ax^2} \end{array} \quad \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Un point important c'est la stabilité de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ par la transformée de Fourier, c'est le point de la proposition suivante.

Proposition 1.3.2
Pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Remarque 1.3.1
La transformée de Fourier est bien définie sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ car on a l'inclusion $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

La question que l'on se pose c'est si on a une continuité de la transformée de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, pour cela il faut munir $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ d'une topologie, c'est l'objectif de la proposition suivante.

Proposition 1.3.3
On munit $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ d'une faille de semi-norme $(q_{k,l})_{k,l\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\forall k,l \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad q_{k,l}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x) \right|. \tag{1.3.1}$$

Ceci permet de munir $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ d'une distance (donc d'une topologie) donnée par :

$$\forall f,g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad d(f,g) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+n}} \frac{q_{k,l}(f-g)}{1+q_{k,l}(f-g)}.$$

Ainsi $(\mathscr{S}(\mathbb{R}), d)$ est un espace vectoriel topologique complet.

Remarque 1.3.2
On remarque que grâce à la famille de semi-norme on a l'équivalence suivante pour une suite $(f_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ donnée :

$$f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } \mathscr{S}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \forall k,l \in \mathbb{N},\ q_{k,l}(f_n - f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On peut donc maintenant énoncer le théorème important de cette partie :

Théorème 1.3.1
L'application transformée de Fourier :

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}: & \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \hat{f} \end{array},$$

est un isomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$*, d'inverse* $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\mathscr{F}}$*.*
En d'autres termes, on a pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *et pour tout* $x, \xi \in \mathbb{R}$ *:*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x \quad \textit{et} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

1.4 Transformée de Fourier dans les distributions tempérées

La stabilité de la classe de Schwartz par la transformée de Fourier permet de la définir par dualité sur l'ensemble des distributions tempérées, en particulier cela permet de définir une transformée de Fourier sur les espaces L^p pour tout $p \in [1, \infty[$.

Définition 1.4.1
On définit les distributions tempérées $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ *comme l'ensemble des formes linéaires continues* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *dans* C*. C'est à dire* $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ *si* $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{C}$ *est une application linéaire et qu'il existe une constante* $C > 0$*net* $n \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \left|\langle T, \varphi \rangle\right| \le C \sum_{k,l \le n_0} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l f}{\partial x^l}(x) \right|$$

L'intérêt des distributions tempérées c'est que pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mathbb{R})$ s'injecte dedans, c'est la proposition suivante.

Proposition 1.4.1
Pour tout $p \in [1, +\infty]$*,* $L^p(\mathbb{R})$ *s'injecte continument dans* $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ *grâce à l'application :*

$$\begin{array}{rccc} i: & L^p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \begin{array}{rccc} T_f: & \mathscr{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{C} \\ & \varphi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \end{array}.$$

On peut maintenant définir la transformée de Fourier pour les distributions de tempérées.

Définition/Théorème 1.4.1
Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$*, on définit la transformée de Fourier de* T*, notée* $\mathscr{F}(T)$*, la forme linéaire sur* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *définit par :*

$$\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \mathscr{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathscr{F}(\varphi) \rangle.$$

De plus $\mathscr{F}(T) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$*.*

Exemple 1.4.1
On a par exemple, $\mathscr{F}(\delta_0) = \frac{1}{2\pi}$ *et* $\mathscr{F}(1) = \sqrt{2\pi}\delta_0$

Remarque 1.4.1
Pour tout $p \in [1, +\infty]$*,* $L^p(\mathbb{R})$ *s'injecte dans* $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ *on vient donc de finir la transformée de Fourier sur* $L^p(\mathbb{R})$ *comme étant l'application :*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{F}_p: & L^p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \mathscr{F}(T_f) \end{array}.$$

Il reste à vérifier qu'elle coïncide bien avec la transformée de Fourier sur L^1 et sur L^2, pour cela il suffit de montrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{\varphi}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Qu'on a déjà montrée pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$ grâce au formule de dualité.

De plus la transformée de Fourier ce comporte aussi bien sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ que sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ c'est le théorème suivant.

Théorème 1.4.1
La transformée de Fourier sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ est bijective, bi-continue et d'inverse $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\mathscr{F}}$.

2 Principe d'incertitude et résolutions d'EDP

2.1 Principe d'incertitude

[Amr08]
Un point important de la transformée de Fourier et l'inversion entre local/global pour f et $\hat{f}$. En effet si une fonction est "concentrée" alors sa transformée de Fourier est "étalée". Le but de cette sous-partie est de quantifier ce principe en présentant certaines propriétés, on les appelle des principes d'incertitudes. Le premier, très connu pour ces applications en physique quantique, est le principe d'incertitude ou inégalité d'Heisenberg.

Théorème 2.1.1 (Inégalité de Heisenberg)
Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \geq \frac{\pi}{2}\left\|f\right\|_2^4.$$

Démonstration. Si $xf \notin L^2(\mathbb{R})$ ou $\xi\hat{f} \notin L^2(\mathbb{R})$ alors l'inégalité est vraie.
On pose donc

$$H_1^1(\mathbb{R}) = \left\{f \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; xf \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } \xi\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\right\}.$$

Et on veut montrer l'inégalité pour $f \in H_1^1(\mathbb{R})$.
Etape 1 : On commence par la montrer dans le cas où $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Tour d'abord, il est clair que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ alors il est clair que $f \in H_1^1(\mathbb{R})$, de plus on sait aussi que l'on a :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(\xi) = -\mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi).$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} x^2 \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = &\int_{\mathbb{R}} x^2 \left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f'}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \\
=&2\pi\left\|xf\right\|_2^2 \left\|f'\right\|_2^2 && \text{par l'égalité de Perseval,} \\
\geq&2\pi\left[\mathrm{Re}\left(xf(x)\overline{f'(x)}\right)\right]^2 && \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwartz.}
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\,\mathrm{d}x\right) =&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} xf(x)\overline{f'(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} xf'(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x \\
=&\frac{1}{2}\left[x\left|f(x)\right|^2\right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} xf'(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} xf'(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x \\
=&-\frac{1}{2}\left\|f\right\|_2^2,
\end{aligned}$$

où la deuxième ligne vient d'une intégration par partie et pour la dernière ligne on utilise le fait que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ donc $x\left|f(x)\right|^2 \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi on obtient donc bien l'inégalité voulue :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\left|f(x)\right|^2 \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi \geq \frac{2\pi}{4}\|f\|_2^4 = \frac{\pi}{2}\|f\|_2^4.$$

Maintenant pour $f \in H_1^1(\mathbb{R})$ on veut montrer le résultat par densité. Pour cela on définit une produit scalaire sur $H_1^1(\mathbb{R})$ comme ceci :

$$\forall f, g \in H_1^1(\mathbb{R}), \quad \langle f, g\rangle_{H_1^1} = \int_{\mathbb{R}} f\overline{g} + \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}x.$$

On remarque que $\left(H_1^1(\mathbb{R}), \langle ., .\rangle_{H_1^1}\right)$ est une espace de Hilbert la norme associée étant :

$$\forall f \in H_1^1(\mathbb{R}), \quad \|f\|_{H_1^1} = \sqrt{\|f\|_2^2 + \|xf\|_2^2 + \|\xi\hat{f}\|_2^2}.$$

Etape 2 :Montrons que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $H_1^1(\mathbb{R})$ pour $\|.\|_{H_1^1}$.

Sous-étape 1 : Soit $f \in H_1^1(\mathbb{R})$ on commence par montrer qu'on peut approcher f par des fonctions à support compact. C'est à dire montrons qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $H_1^1(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est à support compact et :

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_1^1} f.$$

Pour cela on note $\chi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

1. $\chi(0) = 1$;
2. $0 \leq \chi \leq 1$;
3. $\operatorname{supp}(\chi) \subset [-1, 1]$.

On note donc pour $n \in \mathbb{N}$, $\chi_n = \chi\left(\frac{\cdot}{n}\right)$, et on remarque que l'on a par convergence dominée :

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|\chi_n g - g\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, on a $\chi_n g \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CVS}} g$ et $|\chi_n g| \leq |g| \in L^2(\mathbb{R})$.
En particulier en notant $f_n = f\chi_n$ comme $f, xf \in^2(\mathbb{R})$ on a :

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f \quad \text{et} \quad xf_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} xf.$$

De plus, il est clair que f_n est à support compact.
Il nous reste à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\xi\hat{f}_n \in L^2(\mathbb{R})$ et $\xi\hat{f}_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \xi f$, pour cela on remarque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
\xi\hat{f}_n(\xi) &= \frac{1}{2\pi}\xi\left(\hat{f} * \widehat{\chi_n}\right)(\chi)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (\xi - y)\hat{f}(\xi - y)\widehat{\chi_n}(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi - y)y\widehat{\chi_n}(y)\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left(y\hat{f}\right) * \widehat{\chi_n}\right)(\xi) + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\left(\hat{f} * \widehat{\chi_n'}\right)(\xi) \qquad \text{car } \widehat{\chi_n'}(y) = -\mathrm{i}\,y\widehat{\chi_n}(y).
\end{aligned}$$

Ainsi $\xi\hat{f}_n \in L^2(\mathbb{R})$.
De plus $y\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ donc il existe $g \in L^2(\mathbb{R})$ tel que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\hat{g}(y) = y\hat{f}(y)$, ainsi on a :

$$\left(y\hat{f}\right) * \widehat{\chi_n} = \hat{g} * \widehat{\chi_n} = 2\pi\widehat{g\chi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 2\pi\hat{g} = 2\pi\xi\hat{f}(\xi).$$

En effet $g\chi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} g$ et $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est une application continue.
Pour l'autre terme on remarque que :

$$\hat{f} * \widehat{\chi'_n} = \widehat{f\chi'_n}.$$

Et on a :

$$\chi'_n = \frac{1}{n}\chi'\left(\frac{\cdot}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CVS}} 0 \quad \text{d'où} \quad f\chi'_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CVS}} 0.$$

De plus $|f\chi'_n| \leq |f| \, \|\chi'\|_\infty$ qui est L^2 donc par convergence dominée :

$$f\chi'_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0 \quad \text{d'où} \quad \widehat{f\chi'_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0.$$

Ainsi on obtient bien que :

$$\xi\hat{f}_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \xi f \quad \text{donc} \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_1^1} f$$

Sous-étape 2 : Soit $f \in H_1^1(\mathbb{R})$ à support compact, montrons que l'on peut approcher f par une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $H_1^1(\mathbb{R})$.
On note $R > 1$ tel que $\text{supp}(f) \subset [-R+1, R-1]$ et on considère $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty$ une approximation de l'unité, c'est à dire :

1. $\text{supp}(\varphi) \subset [-1, 1]$,
2. $\varphi \geq 0$,
3. $\int_\mathbb{R} \varphi \, \mathrm{d}x = 1$.

Et pour finir on définit pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n = n\varphi(n.)$.
On sait déjà que pour tout $g \in L^2$, $g * \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} g$ et que $g * \varphi_n \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$ en définissant $f_n = f * \varphi$:

1. $\text{supp}(f_n) \subset [-R+1-\frac{1}{n}, R-1+\frac{1}{n}] \subset [-R, R]$,
2. $f_n \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset H_1^1(\mathbb{R})$,
3. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} f$.

Montrons que $xf_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} xf$:

$$\int_\mathbb{R} x^2 \left|_n(x) - f(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \int_{-R} Rx^2 \left|f_n(x) - f(x)\right|^2 \mathrm{d}x \leq R^2 \left\|f_n - f\right\|_2^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Montrons que $\xi\widehat{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \xi\hat{f}$.
On remarque que l'on a $\widehat{f_n} = \widehat{f * \varphi_n} = \hat{f}\widehat{\varphi_n}$ ainsi :

$$\int_\mathbb{R} \xi^2 \left|\widehat{f_n}(\xi) - \hat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi = \int_\mathbb{R} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1\right|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Or on a $\varphi_n = n\varphi(n.)$ donc :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi_n}(\xi) = \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \hat{\varphi}(0) = \int_\mathbb{R} \varphi = 1.$$

Ainsi on a pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1\right|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De plus on a la domination suivante :

$$\begin{aligned}
\xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1\right|^2 &\leq \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|\left\|\widehat{\varphi_n}\right\|_\infty + 1\right|^2 \\
&\leq \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \left|\left\|\varphi_n\right\|_1 + 1\right|^2 \\
&= 2\xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \in L^1.
\end{aligned}$$

D'où par convergence dominé $\xi\widehat{f_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \xi\hat{f}$ ainsi on a bien :

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_1^1} f.$$

Etape 3 : Soit $f \in H_1^1(\mathbb{R})$ alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{H_1^1} f$.
Or par la première étape on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|xf_n\|_2^2 \left\|\xi\widehat{f_n}\right\|_2^2 \geq \frac{\pi}{2}\|f_n\|_2^4.$$

Ce qui donne par passage à la limite :

$$\|xf\|_2^2 \|\xi\hat{f}\|_2^2 \geq \frac{\pi}{2}\|f\|_2^4.$$

Remarque 2.1.1
On a les cas d'égalité pour $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-ax^2}$ où $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. De plus l'inégalité reste vraie en toute dimension.

On présente deux autres principes d'incertitudes.

Proposition 2.1.1
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp}(f)$ et $\operatorname{supp}(\hat{f})$ soient bornées alors f est nulle presque partout.

Démonstration. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset [-M, M]$ et $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-K, K]$. Comme $\operatorname{supp}(f)$ est borné, $f \in L^1(\mathbb{R})$, de même pour $\hat{f}$. On utilise la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \int_{-M}^{M} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}t.$$

On pose $B = \{z \in \mathbb{C}; |\mathfrak{Im}(z)| < 1\}$ et on définit sur B, $h : z \longmapsto \int_{-M}^{M} f(t)e^{-\mathrm{i}zt}\,\mathrm{d}t$, on a :

1. Pour tout $t \in [-M, M]$, $z \longmapsto f(t)e^{-izt}$ est holomorphe sur B.
2. Pour tout $z \in B$ et pour tout $t \in [-M, M]$ on a :

$$\left|f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt}\right| = \left|f(t)\right|\mathrm{e}^{\mathfrak{Im}(z)t} \leq \left|f(t)\right| e^{|\mathfrak{Im}(z)|M} \leq \left|f(t)\right| e^{M} \text{ et } f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ainsi par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, h est bien défini et holomorphe sur B. Or $h(\mathbb{R}\setminus[-K, K]) = \hat{f}(\mathbb{R}\setminus[-K, K]) = 0$ et B est connexe donc par le principe des zéros isolés $h = 0$ ainsi $\hat{f} = 0$ donc par injectivité de la transformée de Fourier, $f = 0$ presque partout.

Le dernier résultat de cette sous-partie sera le théorème de Paley-Weiner.

Théorème 2.1.2 (Paley-Weiner)
Soit $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-R, R]$. Alors il existe une fonction holomorphe $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\hat{\varphi} = F_{|\mathbb{R}}$ et on a l'estimation suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \exists C_N > 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ |F(z)| \leq C_N\left(1 + |z|^{-N}\right)\mathrm{e}^{R|\mathrm{Im}(z)|}.$$

Réciproquement soit $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant l'inégalité alors il existe $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset [-R, R]$ et $\hat{\varphi} = F_{|\mathbb{R}}$.

2.2 Résolution d'EDP

La transformée de Fourier à été historiquement introduite pour résoudre des EDP, c'est ce que nous faisons dans cette partie en résolvant un certain nombre d'équation classique.

Problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur : [Amr08]

On se donne une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et on cherche les fonctions u de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, & \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*; \\ u(x,0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}; \\ \sup\limits_{y \geq 0} \displaystyle\int_R \left| u(x,y) \right| \mathrm{d}x < +\infty. \end{cases}$$

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.2.1
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe une unique fonction $u \in \mathscr{C}^2\left(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\right)$ qui vérifie :

1. *Le laplacien de u est nul, c'est à dire :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

2. *u vérifie la condition initiale dans le sens où pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\lim_{u(x,y) \to y} 0 = f(x).$$

3. *Pour tout $y > 0$, on a $u(.,y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(.,y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(.,y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(.,y) \in L^1(\mathbb{R})$.*
4. *L'application $y :\ y \longrightarrow u(.,y)$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $L^1(\mathbb{R})$ est bornée, c'est à dire :*

$$\sup_{y>0} \int_R \left| u(x,y) \right| \mathrm{d}x < +\infty.$$

De plus la solution est donnée par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} f(s) \frac{y}{\pi\left(y^2 + (x-s)^2\right)} \mathrm{d}s,$$

qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Équation des cordes vibrantes : [Amr08]

On se donne un réel a strictement positif, deux fonctions f et g dépendantent de l'espace et on cherche les fonctions u dépendantes du temps et de l'espace, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}; \\ u(0,x) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ce système modélise une corde infinie qui vibre, avec comme configuration initiale f et que l'on perturbe en 0 avec g. On a le théorème d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 2.2.2
Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ tel que $f,\ f',\ f'' \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ tel que $g,\ g' \in L^1(\mathbb{R})$. Il existe une unique fonction $u \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \bigcap \mathscr{C}^2\left(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\right)$ qui vérifie :

1. *u est solution de l'équation des cordes vibrantes :*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0.$$

2. *u vérifie les conditions initiales :*

$$u(0,x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. *Pour $t > 0$, on a $u(t,.)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(t,.)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,.)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,.)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,.) \in L^1(\mathbb{R})$.*
4. *Pour $\xi \in \mathbb{R}$, l'application $t \longmapsto \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi$ est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour $t > 0$:*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

De plus la solution est donnée par :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Remarque 2.2.1
Dans le cas où $g = 0$, la solution est simplement :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},\ u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right].$$

On a simplement au cours du temps la propagation de deux ondes, l'une vers $+\infty$ et une vers $-\infty$.

Équation de Schrödinger : [Rau]

On se donne une fonction f dépendante de l'espace et on cherche une fonction u dépendante du temps et de l'espace qui vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mathrm{i}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2; \\ u(x,0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ce problème vient de la mécanique quantique et nous allons le résoudre pour une fonction f dans la classe de Schwartz, c'est le théorème suivant.

Théorème 2.2.3
Equation de Schrödinger
Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors il existe une unique fonction $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ tel que :

1. *u est une solution de l'équation de Schrödinger :*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mathrm{i}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

2. *Avec f comme donnée intiale :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x,0) = f(x).$$

3. *De plus $t \longmapsto u(.,t)$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, ainsi pour tout $T \leq 0$:*

$$\forall k,l \leq 0,\ M_{k,l}^T := \sup_{|t|\geq T}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^k\frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x,t)\right| < +\infty.$$

De plus la solution est donnée par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R},\ u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^2 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi,$$

qui est de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration. On raisonne par analyse/synthèse.
Analyse :
Soit $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ une telle solution. On sait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u(.,t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on peut donc prendre sa transformée de Fourier selon x que l'on note :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{u}(\xi,t) = \int_R u(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

On fixe $\xi \in \mathbb{R}$, montrons que $u(\xi,.) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.
Pour cela on applique le théorème de dérivation sous l'intégrale. On fixe $T > 0$ et on raisonne sur $]-T,T[$, on a :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, $t \longmapsto u(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-T,T[$.
2. Pour $t \in]-T,T[$ donnée, $x \longmapsto u(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} \in L^1(\mathbb{R})$ car $u(.,t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
3. On a la domination suivante pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]-T,T[$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\right| &= \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| \\ &= \frac{1}{1+|x|^2}\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| + \left|x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right|\right) \\ &\leq \frac{M_{0,2}^T + M_{2,2}^T}{1+|x|^2}\end{aligned}$$

Et $x \longmapsto \frac{M_{0,2}^T + M_{2,2}^T}{1+|x|^2} \in L^1(\mathbb{R})$ et ne dépendant pas de t.

Ainsi par le théorème de dérivation sous l'intégrale $u(\xi,.) \in \mathscr{C}^1(]-T,T[)$ pour tout $T > 0$ donc on a bien $u(\xi,.) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. De plus pour $\xi \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{i}\left(\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(.,t)}\right)(\xi) \\ &= -\mathrm{i}\xi^2\hat{u}(\xi,t) && \text{car } u(.,t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Ainsi à $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, $\hat{u}(\xi,.)$ vérifie l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi,t) = -\mathrm{i}\xi^2\hat{u}(\xi,t) & \forall t \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(\xi,0) = \displaystyle\int_R f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(\xi)\end{cases}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on a existence et unicité de la solution qui est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\xi^2}.$$

Ainsi par inversion de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (ou $L^2(\mathbb{R})$) on a le résultat voulue :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R},\ u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^2 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Synthèse :
On pose pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_R \hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^2 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale et ainsi on montre que u est bien définie et que $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. En effet on se donne $T > 0$ et on montre que $u \in \mathscr{C}^\infty(]-T,T[\times\mathbb{R})$. Pour cela on se donne $P(X,Y) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m p_{kj} X^i Y^j \in \mathrm{C}[X,Y]$ et on remarque que l'on a la domination suivante :

$$\left|P(\xi,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\xi}\,\hat{f}(\xi)\right| \geq \sum_{k=0}^n C_k \left|\xi^k \hat{f}(\xi)\right|,$$

où pour $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, on a $C_k = \sup_{t\in]-T,-T[} \left|\sum_{j=0}^m p_{kj}\,t^j\right|$ qui est une constante. De plus $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ donc pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\xi \longmapsto C_k \left|\xi^k \hat{f}(\xi)\right| \in L^(\mathbb{R})$.
Or pour $k,l \in \mathbb{N}$, il existe $P_{k,l} \in \mathrm{C}[X,Y]$ tel que :

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l}\left(\hat{f}(\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi^2 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\xi}\right)(\xi) = P_{k,l}(\xi,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\xi}\,\hat{f}(\xi)$$

Grâce à la domination, on peut appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale et on a bien que $u \in (]-T,T[\times\mathbb{R})$ pour tout $T > 0$ donc $u \in \mathscr{C}^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$.
De plus on a pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\xi}\,\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\xi}\,\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Donc u est bien solution de l'équation de Schrödinger et vérifie la condition initiale car par inversion de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\xi}\,\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x).$$

Comme pour $t \in \mathbb{R}$, on a $\xi \longmapsto \hat{f}(\xi)e^{-\mathrm{i}\,t\xi^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ (car $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$) et que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier, $u(.,t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
L'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi_f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{R}) \\ & t & \longmapsto & u(.,t) \end{array},$$

est bien définie.
Il nous reste à montrer qu'elle est continue.
On fixe $t \in \mathbb{R}$ et il suffit de montrer que :

$$u(.,t+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} u(.,t) \text{ dans } \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Or $\mathscr{F} :\ u \longmapsto \hat{u}$ est un homéomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ donc il est équivalent de montrer que :

$$\hat{u}(.,t+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \hat{u}(.,t) \text{ dans } \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

C'est à dire que si on note $g : \xi, t \longmapsto \hat{f}(\xi)e^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}$, il nous suffit de montrer que :

$$g(.,t+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} g(.,t) \text{ dans } \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

On fixe $k,l \in \mathbb{N}$ et il nous faut montrer que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\xi^k \frac{\partial^l g}{\partial \xi^l}(\xi,t+h) - \xi^k \frac{\partial^l g}{\partial \xi^l}(\xi,t)\right| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Or pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a :

$$\left|\xi^k \frac{\partial^l g}{\partial \xi^l}(\xi,t+h) - \xi^k \frac{\partial^l g}{\partial \xi^l}(\xi,t)\right| \leq \sum_{\mu=0}^{l}\left|\left(P_\mu(t+h,\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t+h)\xi^2} - P_\mu(t,\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\right)\frac{\partial^\mu \hat{f}}{\partial \xi^\mu}(\xi)\right|,$$

où pour tout $\mu \in [\![0\,;\,l]\!]$, $P_\mu \in \mathbb{C}[X,Y]$.
Or pour $\mu \in [\![0\,;\,l]\!]$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}\left|\left(P_\mu(t+h,\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t+h)\xi^2}-P_\mu(t,\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\right)\frac{\partial^\mu \hat{f}}{\partial\xi^\mu}(\xi)\right| &\leq \left|\left(P_\mu(t+h,\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t+h)\xi^2}-P_\mu(t,\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t+h)\xi^2}\right)\frac{\partial^\mu \hat{f}}{\partial\xi^\mu}(\xi)\right| \\ &\quad+\left|\left(P_\mu(t,\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t+h)\xi^2}-P_\mu(t,\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\right)\frac{\partial^\mu \hat{f}}{\partial\xi^\mu}(\xi)\right| \\ &\leq \left|\left(P_\mu(t+h,\xi)-P_\mu(t,\xi)\right)\frac{\partial^\mu \hat{f}}{\partial\xi^\mu}(\xi)\right| \\ &\quad+\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t+h)\xi^2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\right|\left|P_\mu(t,\xi)\frac{\partial^\mu \hat{f}}{\partial\xi^\mu}(\xi)\right|.\end{aligned}$$

Or P_μ étant polynomiale en t, si on note d_μ son degré en t on a,

$$P_\mu(t+h,\xi)-P_\mu(t,\xi)=\sum_{j=0}^{d_\mu} h^j\,\frac{1}{j!}\,\frac{\partial^j P_\mu}{\partial t^j}(t,\xi).$$

Et par le théorème des accroissements finis en t on obtient

$$\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t+h)\xi^2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\right|\leq h\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|-\mathrm{i}\xi^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\right|=h\xi^2.$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\left(P_\mu(t+h,\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(t+h)\xi^2}-P_\mu(t,\xi)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\xi^2}\right)\frac{\partial^\mu \hat{f}}{\partial\xi^\mu}(\xi)\right| &\leq \sum_{j=0}^{d_\mu} h^j\,\frac{1}{j!}\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\frac{\partial^j P_\mu}{\partial t^j}(t,\xi)\frac{\partial^\mu \hat{f}}{\partial\xi^\mu}(\xi)\right| \\ &\quad+h\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\xi^2 P_\mu(t,\xi)\frac{\partial^\mu \hat{f}}{\partial\xi^\mu}(\xi)\right| \\ &\quad\xrightarrow[h\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

Les sup étant finis car P_μ est polynomiale et $\hat{f}\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$.
On obtient bien que

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\xi^k\frac{\partial^l g}{\partial\xi^l}(\xi,t+h)-\xi^k\frac{\partial^l g}{\partial\xi^l}(\xi,t)\right|\xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

d'où le résultat.

Un point important, c'est que l'on remarque qu'on a conservation de la norme L^2 de la solution au cours du temps. Ceci n'est pas étonnant, physiquement $|u(.,t)|^2$ modélise l'évolution de la densité de probabilité de présence d'une particule en l'absence de potentiel, il est donc normal d'observer que la norme L^2 se conserve au cours du temps.

Proposition 2.2.1
Avec les même notations du théorème on a :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \left\|f\right\|_2=\|u(.,t)\|_2.$$

Remarque 2.2.2
On a même plus, pour tout $s>$, la norme $H^s(\mathbb{R})$ de f est conservée au cours du temps. Ceci permet de donner un sens à des solutions générales de l'équation de Schrödinger dans le cas ou la donnée initiale f n'est pas plus dans la classe de Schwartz mais dans $H^s(\mathbb{R})$.

Exemple 2.2.1
Dans le cas où f est une gaussienne, c'est à dire il existe $a>0$ tel que $f(x)=\mathrm{e}^{-ax^2/2}$ alors la solution est donnée par :

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}^2,\ u(x,t)=(1+2a\mathrm{i}\,t)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-ax^2/(2+8a^2t^2)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a^2tx^2/(1+4a^2t^2)}.$$

2.3 Formule sommatoire de Poisson

[Gou20]
Une autre application de la transformée de Fourier est le calcul de séries. Ceci est possible grâce à la formule sommatoire de Poisson qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.3.1
Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $C > 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f(x)\right| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{\alpha}} \quad et \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| < +\infty.$$

Alors

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

Une application de cette proposition est l'étude la fonction theta de Jacobi.

Proposition 2.3.2
On définit la fonction Θ de Jacbi comme suit :

$$\Theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ t & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi t n^2} \end{array}.$$

Alors Θ vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

3 Utilisation des fonctions caractéristiques en probabilité

[Ouv09]
L'objectif ici va être d'étendre la transformée de Fourier aux mesures finies sur $\mathbb{R}$, ceci va nous permettre d'introduire la notion de fonction caractéristique pour une mesure de probabilité et de voir différentes applications de cette fonction.

Définition 3.0.1 (Fonction caractéristique)
Soit X une variable aléatoire de loi P_X alors on appelle fonction caractéristique l'application $\varphi_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{C}$ définit par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\right].$$

Exemple 3.0.1
Si X suit une loi de Cauchy de paramètre 1 alors on a

$$\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{-|t|}.$$

La fonction caractéristique ne dépend que de la loi de la variable aléatoire par définition, elle caractérise même la loi, c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3.0.1
Deux variables aléatoires qui ont les même fonction caractéristique ont la même loi.

On peut aussi faire le lien entre la fonction caractéristique d'un variable aléatoire et la transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 3.0.1
Soit X une variable aléatoire telle que $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R})$ alors X admet une densité f donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t.$$

L'intérêt aussi de la fonction caractéristique c'est qu'elle se comporte bien avec l'indépendance. C'est le point de la proposition suivante.

Proposition 3.0.2
Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes alors on a $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$.

Pour la régularité de la fonction caractéristique on peut la relier au moment de la variable aléatoire. C'est le résultat suivant.

Proposition 3.0.3
Soit X une variable aléatoire et φ_X sa fonction caractéristique.

1. *Si X admet un moment d'ordre n alors φ_X est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout entier $0 \geq k \geq n$, on a :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^k \varphi_X}{\partial t^k}(t) = \mathbb{E}\left[\mathrm{i}^k X^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}Xt}\right].$$

2. *Réciproquement, si φ_x est k fois dérivable en 0 ($k \leq 2$) alors X admet des moments d'ordres $2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ et pour tout entier $0 \geq j \geq 2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$ on a :*

$$\mathbb{E}\left[X^j\right] = \frac{1}{\mathrm{i}^j}\frac{\partial^j \varphi_X}{\partial t^j}(0).$$

Remarque 3.0.1
La fonction caractéristique peut-être dérivable à l'origine (et même en tout point) sans que la variable aléatoire n'admette une moyenne.

Le dernier point qui nous intéresse, c'est le lien entre fonction caractéristique et convergence en loi.

Proposition 3.0.4 (Lévy)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de variable aléatoire alors $X_n \longrightarrow X$ en loi si et seulement si $\varphi_{X_n} \longrightarrow \varphi_X$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Une application de ce résultat et le fameux théorème central limite.

Théorème 3.0.2 (central limite)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de variable aléatoire indépendante identiquement distribuée admettant un moment d'ordre 2, alors en notant $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$ alors on a :

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathscr{N}\left(0, \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) \quad \textit{en loi.}$$

Question possible :

1. Trouver l'ensemble des fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $f * f = f$.
   Soit f une telle fonction alors en appliquant la transformée de Fourier on obtient que :

$$\hat{f}^2 - \hat{f} = 0.$$

   Or $\hat{f}$ est continue donc $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(x) = 1$. Mais $\hat{f}$ tend vers 0 en $+\infty$ donc $\hat{f} = 0$. Par injectivité de la transformée de Fourier $f = 0$. Et réciproquement la fonction nulle vérifie bien $f * f = f$.

2. En déduire que le produit de convolution n'admet pas d'élément neutre dans L^1.
   Supposons qu'il existe un tel élément noté f, alors en particulier $f * f = f$ donc par la question précédente $f = 0$. Ainsi pour tout $g \in L^1$ on a $f * g = 0$ ce qui est absurde.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ tel que $f, f', f'' \in L^1$ alors $\hat{f} \in L^1$.
   On sait que $f, f', f'' \in L^1$ on a donc par double intégration par partie :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f''}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f''(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = (i\xi)^2 \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x = -\xi^2 \hat{f}(\xi).$$

   On a donc la majoration suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^*, \quad \left|\hat{f}\right|(\xi) \leq \frac{\left\|\widehat{f''}\right\|_\infty}{\xi^2} \leq \frac{\|f''\|_1}{\xi^2}.$$

   Donc $\left|\hat{f}\right|$ est continue et $\left|\hat{f}\right|(\xi) = \underset{\xi \to \pm\infty}{o}\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$ donc $\hat{f} \in L^1$.
4. Soit $f \in L^1 \cap L^\infty$ et $0 < a < b$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2 + b^2}.$$

   Calculer $\hat{f}$ et en déduire f.

   On pose $g_c(t) = \frac{1}{x^2+c^2}$, on a alors $f * g_a = g_b$, ce qui donne $\hat{f}\hat{g_a} = \hat{g_b}$.
   Or pour $c > 0$, on sait que :

$$\forall \xi \mathbb{R}, \quad \hat{g_c}(\xi) = \frac{\pi}{c}\,\mathrm{e}^{-c|\xi|}.$$

   On en déduit donc que :

$$\forall \xi \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\xi) = \frac{a}{b}\,\mathrm{e}^{-(b-a)|\xi|} = \frac{a}{\pi b}(b-a)\widehat{g_{(b-a)}}(\xi).$$

   On a donc par injectivité de la transformée de Fourier,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a}{\pi b}(b-a) g_{(b-a)}(x) = \frac{a(b-a)}{\pi b} \frac{1}{x^2 + (b-a)^2}.$$

Références

[Amr08] Mohammed El AMRANI : Analyse de Fourier dans les espaces fonctonnels. Ellipses, 2008.

[Gou20] Xavier GOURDON : Les maths en tête - Analyse. Ellipses, 2020.

[Li13] Daniel LI : Cours d'analyse fonctionnelle. Ellipses, 2013.

[Ouv09] Jean-Yves OUVRARD : Probabilités 2 - Master Agrégation. Cassini, 2009.

[Rau] Jeffrey RAUCH : Partial Differential Equations. Springer New York, NY.