Feuille 0 : Exercices de révisions

Ensembles et applications

Exercice 1 (Opérations ensemblistes). Soient X un ensemble, et $(A_{i,j})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathcal{P}(X)$ une famille de sous-ensembles de X, où I et J sont deux ensembles d'indices a priori quelconques.

a) Montrer que

$$\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{i,j}\right) \subset \bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I} A_{i,j}\right),$$

puis donner un exemple pour lequel cette inclusion est stricte.

On note $\mathcal{F}(J,I) = I^J$ l'ensemble des applications de J vers I.

b) Montrer que

$$\bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I} A_{i,j}\right) = \bigcup_{f\in\mathcal{F}(J,I)}\left(\bigcap_{j\in J} A_{f(j),j}\right),$$

puis observer que l'intersection finie d'une réunion d'ensembles s'écrit comme la réunion d'une intersection finie de ces mêmes ensembles.

Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, on note $\complement_X A$ son complémentaire dans X.

c) Vérifier les identités élémentaires

$$\complement_X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \left(\bigcap_{i\in I} \complement_X A_i\right), \quad \text{et} \quad \complement_X\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \left(\bigcup_{i\in I} \complement_X A_i\right).$$

Exercice 2 (Applications et opérations ensemblistes). Soient X, Y deux ensembles, $(A_i)_{i\in I}$ (resp. $(B_i)_{i\in I}$) une famille de $\mathcal{P}(X)$ (resp. une famille de $\mathcal{P}(Y)$) et $f \in \mathcal{F}(X,Y)$.

a) Montrer que

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'application f pour que l'inclusion ci-dessus soit une égalité.

c) Montrer que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i), \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i),$$

où $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{P}(X)$ désigne l'image réciproque par f de B_i.

Nombres réels

Exercice 3 (Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$). Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée. On rappelle qu'un réel $s \in \mathbb{R}$ est appelé *borne supérieure* (ou *supremum*) de A si :

— s est un majorant de A, c'est-à-dire $\forall a \in A,\ a \leq s$,

— s est le plus petit des majorants, c'est-à-dire que pour tout $s' < s$, il existe $a \in A$ tel que $a > s'$.

a) Montrer que $s = \sup A$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A \quad \text{tel que} \quad s - \varepsilon < a \leq s.$$

b) Montrer que $s = \sup A$ si et seulement si

— s est un majorant de A.

— Il existe une suite de nombres $(a_n)_n$ dans A qui converge vers s.

Exercice 4 (Théorème d'approximation de Dirichlet). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tels que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

(Indication : considérer les $N+1$ nombres[1] $x_k = \{k\alpha\} \in [0, 1[$ *pour* $k \in \{0, \cdots, N\}$*, les* N *intervalles* $I_k = [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$ *pour* $k \in \{0, \cdots, N-1\}$*, puis appliquer le principe des tiroirs.)*

Convergences

Exercice 5 (Convergence de Cesàro). Soit (x_n) une suite de réels qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que la suite

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

converge vers ℓ.

b) Soit $(c_n)_n$ une suite de nombre réels strictement positifs, qui vérifie $\sum_{k=1}^{n} c_k \to +\infty$. Montrer la suite

$$z_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} c_k} \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \,.$$

converge vers ℓ.

Algèbre linéaire

Exercice 6. (Topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). On fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Montrer que l'ensemble des matrices inversibles $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques (ou auto-adjointes si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) est un fermé.

c) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que l'ensemble $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid P(A) = 0\}$ est un fermé.

1. La partie fractionnaire $\{x\}$ d'un nombre x est définie par $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

d) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto A^{-1} \end{aligned}$$

est continue.

Exercice 7 (Théorème de Cayley Hamilton). On travaille dans $M_n(\mathbb{C})$. Pour une matrice A, on note $P_A(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - A)$ son polynôme caractéristique.

a) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
Indication : on peut raisonner à partir de la forme trigonalisée.

b) En déduire que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a $P_A(A) = 0$. Que peut-on dire pour les matrices réelles $A \in M_n(\mathbb{R})$?

Inégalités et convexité

Exercice 8 (Moyenne harmonique vs moyenne arithmétique).

a) Montrer que la moyenne harmonique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique : pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$,

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \,.$$

(Indication : montrer que $n^2 \leq (\sum_{i=1}^n x_i) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

2. Étudier les cas d'égalité.

Exercice 9 (Inégalités de Hölder et de Minkowski). On va établir en plusieurs étapes que la quantité

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(Indication : utiliser la convexité de la fonction $x \mapsto e^x$, ou celle de $x \mapsto x^r$ pour $r > 1$).

b) Montrer l'*inégalité de Hölder :* pour tout $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}.$$

(Indication : commencer par le cas où $\sum_{i=1}^n |a_i|^p = \sum_{i=1}^n |b_i|^q = 1$).

c) Montrer l'*inégalité de Minkowski :* pour tout $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{1/p}.$$

(Indication : écrire $|a_i + b_i|^p \leq |a_i + b_i|^{p-1}(|a_i| + |b_i|)$ et utiliser l'inégalité de Hölder.)

d) En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Vérifier que toutes ces normes sont équivalentes.