Feuille 1 : Espaces métriques, espaces topologiques

Exercices

Exercice 1. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont fermés ?

$$A_1 = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \ : \ n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad A_2 = \left\{ (x, y) \ : \ y = x^2 \right\}, \quad A_3 = \mathbb{Z}^2 .$$

Exercice 2 (Longueurs de la diagonale). Dans $\mathbb{R}^n$ calculer en fonction de n la longueur de la diagonale de l'hypercube $[0, 1]^n$ pour les distances d_1, d_2, d_∞.

Exercice 3 (Adhérence et intérieur I). Décrire l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles suivants :

$$B_1 := (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2, \quad B_2 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^{2n+1}}, \frac{1}{2^{2n}} \right] \subset \mathbb{R}, \quad B_3 := \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x} \right) \right) \ : \ x > 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

Exercice 4 (Adhérence et intérieur II). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, et $U \in \mathcal{T}$ un ouvert de X.

a) Montrer que

$$U \subset \mathring{\overline{U}} .$$

b) Donner un exemple dans lequel cette inclusion est stricte.

Exercice 5. Lesquelles des fonctions suivantes donnent un espace métrique sur $\mathbb{R}$?

$$d_1(x, y) = (x - y)^2 , \quad d_2(x, y) = |x - y|^{\frac{1}{2}} , \quad d_3(x, y) = |x - 2y| .$$

Exercice 6. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction qui n'est pas identiquement nulle, croissante, s'annulant en 0 et sous-additive :

$$\varphi(u + v) \leq \varphi(u) + \varphi(v) .$$

a) Démontrer que si (X, d) est un espace métrique alors $\varphi \circ d$ est une distance sur X.

(Indication : commencer par vérifier que si φ s'annule ailleurs qu'en 0 alors elle doit être identiquement nulle, ce qui est exclu).

b) Vérifier que les fonctions $\varphi(u) = \min(1, u)$ et $\varphi(u) = \frac{u}{1+u}$ satisfont les hypothèses.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique et soient A et B deux parties de X. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} f_A : \quad X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) \end{aligned}$$

est 1-lipschitzienne (c'est à dire avec une constante de Lipschitz inférieure à 1).

Exercice 8 (Singletons dans un espace séparé). Montrer que si l'espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparé, alors :

a) tout singleton est fermé.

b) tout singleton peut s'écrire comme l'intersection de tous les voisinages de x.

Exercice 9 (Topologie cofinie). Sur $\mathbb{R}^n$, on considère la topologie $\mathcal{T}_f$ dont une base de fermés est formée des singletons de $\mathbb{R}^n$.

a) Vérifier que tous les fermés de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_f)$ sont $\mathbb{R}^n$ et ses parties finies.

b) Décrire tous les ouverts.

c) Décrire tous les voisinages.

d) La topologie $\mathcal{T}_f$ est-elle séparée ?

Exercice 10. Soit A une partie d'un espace métrique (X, d).

a) Démontrer que $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$.

b) Démontrer que si A et B sont deux parties de X telles que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, alors l'application

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

est continue sur X. Que vaut-elle sur $\overline{A}$ et sur $\overline{B}$?

c) En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $\overline{A} \subset U$ et $\overline{B} \subset V$.

Exercice 11 (Frontière). Soit $E := \mathcal{F}_b([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées sur l'intervalle $[0, 1]$ muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| .$$

On considère un sous-ensemble $A \subset [0, 1]$, et

$$X = \{f \in E \ : \ f|_A = 0\} .$$

a) Montrer que $X = \overline{X}$.

b) Décrire $\overline{\complement_E X}$, puis en déduire que

$$\mathrm{Fr}(X) = X .$$

Exercice 12 (Topologie induite I : Vrai / Faux). On considère l'espace $A = [0, 1] \times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

a) $[0, \frac{1}{2}[\times]0, 1[$ est ouvert dans A ?

b) $\{1\} \times]0, 1[$ est fermé dans A ?

Exercice 13 (Topologie induite II). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$.

a) Montrer que si A est ouvert alors $\mathcal{T}_A$, la topologie induite sur A par la topologie $\mathcal{T}$, vérifie
$$\mathcal{T}_A = \{U \in \mathcal{T} \ : \ U \subset A\}.$$

b) Montrer que ceci n'est pas vrai en général.

c) Montrer que si $A \subset B \subset X$, alors
$$\mathcal{T}_A = (\mathcal{T}_B)_A.$$

Compléments

Exercice 14. On considère dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle $|\cdot|$ l'ensemble
$$E := \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ \mid \ (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}.$$
Déterminer $\overline{E}$, l'adhérence de E.

Exercice 15 (Distance ultramétrique p-adique). Soit p un nombre premier. Pour tout nombre rationnel non nul $r \in \mathbb{Q}^*$, on définit sa *valuation p-adique* $v_p(r) \in \mathbb{Z}$ comme suit : si $r = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, on écrit les décompositions $a = p^\alpha a'$, $b = p^\beta b'$ avec $p \nmid a', b'$, et on pose $v_p(r) = \alpha - \beta$. On étend v_p à $\mathbb{Q}$ en posant $v_p(0) = +\infty$, et on définit sur Q la distance p-adique par :
$$d_p(x,y) = \begin{cases} p^{-v_p(x-y)} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y\,. \end{cases}$$

a) Montrer que $v_p(x+y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$ pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, puis étudier les cas d'égalité.

b) En déduire que la distance d_p satisfait l'inégalité dite *ultramétrique* :
$$d_p(x,z) \leq \max(d_p(x,y), d_p(y,z)) \quad \text{pour tous } x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

c) Vérifier que d_p est bien une distance sur $\mathbb{Q}$.

d) Comparer la topologie induite par d_p à la topologie usuelle sur $\mathbb{Q}$. Par exemple, les suites $x_n = p^n$ convergent-elles vers 0 ?

Exercice 16 (Topologie ultramétrique sur les séries formelles). On note $\mathbb{K}[[X]]$ l'espace vectoriel des séries formelles sur un corps donné $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On rappelle que $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes, est le sous-espace vectoriel des suites qui s'annulent à partir d'un certain rang.

Pour une série formelle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on appelle *valuation* de a le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$. On note $v(a)$ cet entier.

a) Montrer que la quantité
$$d(a,b) = \begin{cases} e^{-v(b-a)} & \text{si } a \neq b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$
définit une distance sur $\mathbb{K}[[X]]$. On vérifiera en particulier l'inégalité ultramétrique :
$$d(a,c) \leq \sup\{d(a,b),\, d(b,c)\}, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}[[X]].$$

b) Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est dense dans $\mathbb{K}[[X]]$ pour cette distance. Justifier notamment l'écriture usuelle des séries :
$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n.$$