Feuille 2 : Limites, continuité et comparaison de topologies

Échauffement

Exercice 1 (Adhérence et intérieur dans le cas d'un espace métrique). Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ et $x \in X$. En partant des définitions de topologie générale de l'adhérence et de l'intérieur, montrer l' équivalence suivante [1] :

x est adhérent à A *si et seulement si* il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$.

Exercice 2 (Adhérence des matrices réelles diagonalisables). Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels de degré $d \geq 1$.

a) Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^d.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des matrices $M_n(\mathbb{R})$ est vu comme $\mathbb{R}^{n^2}$, muni d'une norme [2]. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'adhérence de $D_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables [3] sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Suite récurrente). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé, $f \in \mathcal{F}(X, X)$ et, pour $x_0 \in X$, la suite récurrente (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si ℓ est limite de (x_n) et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice 4 (Fonction uniformément continue I). Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ de limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue.

Exercices

Exercice 5 (Limite d'une suite). Soit $u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$. On étend u à $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ en une application $\overline{u} : \overline{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\overline{u}(n) = u_n \ (n \in \mathbb{N}), \qquad \overline{u}(+\infty) = a.$$

On munit $\overline{\mathbb{N}}$ de la topologie dont une base de voisinages de $+\infty$ est formée des queues $\{n, n+1, \dots\} \cup \{+\infty\}$. Montrer que

$$\lim_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} u_n = a \iff \overline{u} \text{ est continue en } +\infty.$$

1. Dans un espace topologique général, l'implication "$\Leftarrow$" reste vraie si x possède une base dénombrable de voisinages, ce qui est le cas des espaces métriques le sont.
2. Nous montrerons dans le cours qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes
3. On rappelle qu'une matrice est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Exercice 6 (Valeurs d'adhérence d'une suite). Soit (x_n) une suite dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, et A l'ensemble de ses valeurs d'adhérence, c'est à dire les points ℓ tels que

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell)\,,\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \exists n \geq n_0\ :\ x_n \in V\,.$$

a) Montrer que

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_k : k \geq n\}}.$$

b) En déduire que A est fermé, et que $A \subset \overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

c) L'inclusion réciproque est-elle vraie ?

Supposons maintenant que (X, d) est un espace métrique.

d) Montrer que ℓ est une valeur d'adhérence de (x_n) *si et seulement si* ℓ est limite d'une suite extraite de (x_n).

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante et

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

a) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que d est métriquement équivalente à $|\cdot|$ s'il existe $0 < c \leq C$ tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$c\,|x - y| \leq d(x, y) \leq C\,|x - y|.$$

b) d et $|\cdot|$ sont-elles métriquement équivalentes lorsque $f(x) = x^3$? lorsque $f(x) = \arctan x$?

c) Comparer les topologies associées à la distance d et à la distance usuelle $|\cdot|$.

(Indication : c'est le cas si et seulement si pour tout x, $d(x, y_n) \to 0 \iff |x - y_n| \to 0$)

Exercice 8 (Produit dénombrable d'espaces métriques). Soit $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces métriques.

a) Démontrer que

$$d\big((x_n), (y_n)\big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n}\, \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

est bien définie, et définit une distance sur l'espace produit $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

b) Démontrer que la topologie associée à cette distance coïncide avec la topologie produit.

(Indication : on pourra s'inspirer du cas d'un produit fini vu en cours.)

Exercice 9 (Graphe d'une application continue). Soit f une application continue d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ dans un espace topologique $(Y, \mathcal{T}')$.

a) Montrer que le graphe

$$\Gamma = \{(x, f(x)) :\ x \in X\} \subset X \times Y$$

est homéomorphe à X (via $x \mapsto (x, f(x))$).

b) Soit $\Gamma \subset X \times Y$ tel que la projection $\pi_X : \Gamma \to X$ soit un homéomorphisme. Montrer qu'il existe une unique application continue $f : X \to Y$ dont Γ est le graphe.

Exercice 10. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On munit $X \times X$ de la topologie produit. Montrer que $(X, \mathcal{T})$ est séparé si et seulement si la diagonale

$$\Delta = \{(x, x)\ :\ x \in X\}$$

est un fermé de $X \times X$.

Compléments

Exercice 11 (Caractérisation des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$). On s'intéresse aux sous-groupes $G \subset \mathbb{R}$ pour l'addition.

a) Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $G \cap]-\varepsilon, \varepsilon[= \{0\}$. Démontrer alors que $G = \mathbb{Z}a$ pour un certain réel $a > 0$.

b) Démontrer que les autres sous-groupes (non vides) de $\mathbb{R}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

c) Indépendamment, démontrer que l'ensemble $\mathbb{Z} + \mathbb{N}r$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(Indication : On considérera la suite des parties fractionnaires $(\{nr\})_{n\in\mathbb{N}}$, et on utilisera le fait que toute suite bornée de $\mathbb{R}$ admet une valeur d'adhérence.)

d) Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Déduire de la question précédente que si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, alors l'ensemble $a\mathbb{N} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

En particulier, cela montre que le sous-groupe

$$G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{ma + nb : m, n \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})\} \ ,$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12 (Densité). Dans l'exercice 11, vous avez démontré que l'ensemble $a\mathbb{N} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque $a, b \in \mathbb{R}^*$ sont tels que $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$.

a) En déduire que $\left\{ \mathrm{e}^{in\theta} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans le cercle unité $\mathbb{S}^1$ lorsque $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

(Indication : On utilisera la continuité et la surjectivité de l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in \mathbb{S}^1$).

b) En déduire que les ensembles $\{\cos(n\theta),\, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin(n\theta),\, n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$.

Exercice 13 (Topologie quotient et sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$). Dans l'exercice 11, vous avez démontré que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit discrets (de la forme $a\mathbb{Z}$) soit denses dans $\mathbb{R}$.

Montrer que le quotient topologique $\mathbb{R}/G$ de $\mathbb{R}$ par un sous-groupe additif G est soit :

— homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$,

— soit muni de la topologie grossière.

Exercice 14 (Fonction uniformément continue II). Soit f une fonction uniformément continue sur $]0, +\infty[$ vérifiant pour tout $x > 0$,

$$f(nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Montrer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Exercice 15 (Projection stéréographique). On note $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{S}^{n-1} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}.$$

Montrer que la sphère privée d'un point est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.
(Indication : on pourra considérer les cas $n = 2$ et $n = 3$ pour commencer, et utiliser une projection stéréographique.)

Exercice 16. Existe-t-il une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?