Feuille 3 : Complétude, point fixe et théorème de Baire

Échauffement

Exercice 1 (Caractérisation de la complétude par les séries). Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Montrer que $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet si et seulement si toute série absolument convergente à valeurs dans E est convergente.

Exercice 2 (Exemple d'espace complet). Soit X un ensemble topologique et E un espace métrique complet.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions bornées de X dans E, $\mathcal{F}_b(X, E)$ munit de la distance

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_E(f(x), g(x)) \tag{1}$$

est complet.

b) En déduire que l'ensemble des fonctions continues et bornées de X dans E, $\mathcal{C}_b^0(X; E)$, est complet pour la même distance.

Exercice 3 (Complétude des espaces ℓ^p). Montrer que $\ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est complet pour

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p \right)^{1/p}.$$

Exercice 4 (Espace des applications linéaires continues). Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach, on munit l'espaces des applications linéaires continues $\mathcal{L}(E, F)$ de sa norme d'opérateur $\|\cdot\|$. Montrer que $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Exercice 5 (Point fixe d'un itéré). Soit E un espace de Banach et soit $f \colon E \to E$ une application telle qu'il existe $N \geq 1$ tel que f^N (l'itérée N-ème de f) soit contractante. Montrer que f admet un unique point fixe $a \in E$.

Exercice 6 (Contre-exemple pour le théorème de point fixe). Trouver des espaces vectoriels normés E et des applications f qui satisfont :

1. E non complet, f contractante, envoie E dans E et sans point fixe.
2. E complet, f contractante, n'envoie pas E dans E et sans point fixe.
3. E complet, f non contractante, envoie E dans E et sans point fixe car ne satisfait que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

4. E complet, f non contractante, envoie E dans E et admet plusieurs points fixes.

Exercice

Prolongement des applications uniformément continues

Exercice 7 (Construction de l'intégrale de Riemann). Soit $a < b$ et X un espace de Banach, on munit $\mathcal{F}_b([a,b],X)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On définit $\mathcal{R}([a,b],X) \subset \mathcal{F}_b([a,b],X)$ le sous-espace des fonctions réglées, c'est à dire les fonctions limites uniformes de fonction étagées.

a) Montrer que l'espace des fonctions réglées muni de $\|\cdot\|_\infty$ est complet.

b) Définir l'intégrale pour les fonctions en étagées et montrer que cela définit une application linéaire continue à valeurs dans X.

c) Définir l'intégrale de Riemann pour les fonctions réglées.

d) Montrer que $\mathcal{C}([a,b],X) \subset \mathcal{R}([a,b],X)$.

Espace complet

Exercice 8 (Fonction α-hölderiennes). Pour $\alpha \in]0,1]$, on note $\mathcal{C}^\alpha([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions α-höldériennes, c'est à dire les fonctions f tel qu'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^\alpha.$$

On définit alors sur cette espace,

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\ x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Montrer que $(\mathcal{C}^\alpha([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

Exercice 9 (Classe de Schwartz). On définit la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ comme l'ensemble suivant

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})\,;\ \forall k,l \in \mathbb{N},\quad \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell} \right| < +\infty. \right\}.$$

Pour $k,\ell \in \mathbb{N}$ on note $q_{k,\ell}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell} \right|$ et on définit pour $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$d(f,g) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}} 2^{-(k+\ell)} \frac{q_{k,\ell}(f-g)}{1+q_{k,\ell}(f-g)}.$$

a) Montrer que d défini une distance sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $d(f_n,f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si pour tout $k,l \in \mathbb{N}$, $q_{k,l}(f_n - f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est complet.

Théorème de point fixe

Exercice 10 (Espace des suites périodiques). Soit ℓ^∞ l'espace des suites bornées (norme $\|\cdot\|_\infty$). Soit E le sous-espace formé des suites périodiques. On définit $T : E \to E$ par

$$T(u_0,u_1,u_2,\dots) = (0,\frac{u_0+1}{2},\,0,\,\frac{u_1+1}{2},\,\dots).$$

Montrer que T est strictement contractant et en déduire que E n'est pas fermé.

Exercice 11 (Point fixe à paramètre). Soient X un espace métrique complet (non vide), E un espace métrique et $F\colon X \times E \to X$ une application continue. On suppose F uniformément contractante en x, c'est à dire qu'il existe $k \in \left]0,1\right[$ tel que, pour tous $(x,y) \in X$ et $\lambda \in E$,

$$d\left(F(x,\lambda), F(y,\lambda)\right) \leq kd\left(x,y\right).$$

Montrer que pour chaque $\lambda \in E$, l'équation $F(x,\lambda) = x$ admet une unique solution $x(\lambda)$ et que l'application $\lambda \in E \mapsto x(\lambda) \in X$ est continue.

Exercice 12 (Equation fonctionnelle). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une application continue non identiquement égale à 0 ou 1. Montrer qu'il existe une unique solution $f \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ de l'équation fonctionnelle :

$$f(0) = \alpha, \quad f'(x) = f(\varphi(x)).$$

Indication : Considérer $T\colon \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ *défini par*

$$(Tf)(x) = \alpha + \int_0^x f(\varphi(y))\ \mathrm{d}y.$$

Exercice 13 (Résolution d'une EDP). Soit $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ k-lipschitzienne. On définit la fonction de Green G par

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y, \\ (1-x)y & \text{si } x \geq y. \end{cases}$$

a) Soit $u \in C^2([0,1];\mathbb{R})$ tel que $u(0) = u(1) = 0$. Vérifier que

$$\forall x \in [0,1], \quad u(x) = -\int_0^1 G(x,y)u''(y)\ \mathrm{d}y.$$

Indication : on pourra remarquer que si $g \in C^0([0,1];\mathbb{R})$, alors

$$\int_0^1 G(x,y)g(y)\ \mathrm{d}y = (1-x)\int_0^x yg(y)\ \mathrm{d}y + x\int_x^1 (1-y)g(y)\ \mathrm{d}y.$$

b) En déduire que si $k < 8$, alors il existe une unique solution $u \in C^2([0,1];\mathbb{R})$ au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' = f(u), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Théorème de Baire

Exercice 14. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach de dimension infinie. Montrer que E n'admet pas de base (algébrique) dénombrable.

Exercice 15 (Corollaire du théorème de Baire). Soit X un espace métrique complet qui est la réunion dénombrable de fermés F_n. Montrer que la réunion des intérieurs des F_n est un ouvert dense de X.

Exercice 16 (Théorème de la limite simple de Baire). Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, (X, d_X) étant complet. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}\left(X, Y\right)$ tel qu'elle converge simplement vers $f\colon X \to Y$. Montrons que f est continue sur une partie dense de X.
Pour $k \geq 1, n$ des entiers naturels on pose

$$F_{k,n} = \bigcap_{p,q\geq n} \left\{x \in X;\ d_Y(f_p(x), f_q(x)) \leq \frac{1}{k}\right\}$$

a) Montrer que $F_{k,n}$ est fermé et que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{k,n}$.

b) En déduire que $\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{k,n}$ est un ouvert dense de X.(*Utiliser l'exercice précédent.*)

c) Montrer que pour tout $x \in \Omega_k$ il existe un voisinage V tel que pour tout $y \in V$, $d_Y(f(x), f(y)) \leq \frac{3}{k}$.

d) En déduire que f est continue sur une partie dense de X.

Exercice 17. Montrer que toute fonction dérivable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la dérivée f' est continue sur un ensemble dense.
Indication : utiliser l'exercice précédent.

Exercice 18 (Fonction continue mais nulle part dérivable). L'objectif est de montrer l'existence de fonction continue mais dérivable nulle part. Pour tout $\lambda > 0$, on pose :

$$\mathcal{U}_\lambda = \{f \in \mathcal{C}([0,1]); \forall x \in [0,1],\ \exists y[0,1],\ |f(x) - f(y)| > \lambda\,|x - y|\}$$

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble $\mathcal{U}_\lambda$ est un ouvert de $\mathcal{C}([0,1])$.
2. L'objectif est de montrer que $\mathcal{U}_\lambda$ est dense.
   a) Soit $\mu > 0$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{U}_\mu$ tel que $\|\phi\|_\infty \leq \varepsilon$.
   (Indication : Considérer $\phi(x) = \varepsilon \sin(2\pi N x)$ pour N assez grand.)
   b) Soit f une fonction K-lipschitzienne, montrer que pour tout $\mu > K$, on a $f + \varphi \in \mathcal{U}_{\mu-K}$ si $\varphi \in \mathcal{U}_\mu$.
   c) En déduire que $\mathcal{U}_\lambda$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.
3. En déduire que l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}([0,1])$ nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.