Feuille 5 : Connexité

Échauffement

Exercice 1 (Connexité dans $\mathbb{R}^n$). On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure naturelle d'espace métrique produit. Dans chacun des cas suivants, pour l'entier n explicité, la partie A de $\mathbb{R}^n$ proposée est-elle connexe ? connexe par arcs ?

a) $n = 1$ et $A = \mathbb{Q}$.

b) $n = 2$ et $A = \{(t, e^t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

c) $n = 2$ et $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1\}$.

d) $n = 2$ et $A = \mathbb{R}^2 \setminus ([0, 1] \times \mathbb{R})$.

Exercice

Exercice 2 (Intersection et réunion de connexes). Soit X un espace topologique.

a) L'intersection de deux parties connexes de X est-elle connexe ?

b) La réunion de deux parties connexes de X est-elle connexe ?

Exercice 3 (Connexité et adhérence). Soient X un espace topologique, et A une partie connexe de X.

a) Prouver que toute partie B de X vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe (en particulier, $\overline{A}$ est connexe).
Indication : Raisonner par l'absurde en écrivant B comme l'union disjoint de deux fermés de B.

b) A-t-on systématiquement $\mathring{A}$ connexe ?

Exercice 4. Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont-ils homéomorphes ?

Exercice 5 (Propriétés topologiques de S^1). On note S^1 l'ensemble des nombres complexes dont le module est égal à 1.

a) Prouver que S^1 est connexe par arcs.

b)
1. Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de S^1 dans $[0, 1]$.
2. En déduire qu'il n'existe pas d'injection continue de S^1 dans $\mathbb{R}$.

c) Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}$ une application continue. Établir l'existence de $z \in S^1$ tel que $f(z) = f(-z)$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé, montrer que tout ouvert connexe O est connexe par arcs.
Indication : Fixer $a \in O$ et considérer l'ensemble des points x de O tel qu'il existe un chemin continue dans O reliant a à x.

Exercice 7 (Espace connexe mais pas connexe par arc). Dans $\mathbb{R}^2$, que l'on munit de sa structure usuelle d'espace métrique produit, on considère :

$$A = \left\{ \left(t, \sin\frac{1}{t} \right) \mid t > 0 \right\}.$$

a) Montrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer $\overline{A}$.

c) Prouver que $\overline{A}$ est connexe, mais que $\overline{A}$ n'est pas connexe par arcs.

Compléments

Exercice 8 (Théorème de Darboux). Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I \mid x < y\}$.

a) Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

b) Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.

c) Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Ce résultat signifie que la dérivée de toute fonction dérivable possède la propriété de la valeur intermédiaire.

Exercice 9 (Connexité dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et identifions $M_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$ muni de sa structure naturelle d'espace métrique produit.

a) Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
Indication : On pourra se souvenir du pivot de Gauss et utiliser le fait que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les transpositions.

b) Justifier que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, mais montrer que

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det M > 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det M < 0\}$$

sont connexes par arcs.