# Principes d'incertitudes et Théorème de Logvinenko-Sereda

COURANT Thomas et BLANCHARD Romain
Encadré par MARTIN Jérémy

## Table des matières

Abstract :
Le but de ce document est d'étudier la transformée de Fourier et certains principes d'incertitudes. Les principes d'incertitudes sont des énoncés qui limitent la concentration simultanée d'une fonction et de sa transformée de Fourier. Ainsi nous construirons d'abord la transformé de Fourier sur différents ensembles de fonctions et notamment avec les polynômes de Hermite pour $L^2(\mathbb{R})$, puis nous énoncerons le principe d'incertitude le plus connus : l'inégalité de Heisenberg. Et pour finir nous étudierons le théorème de Logvinenko-Sereda qui caractérise les paires fortement annulantes lorsque l'un des ensembles est borné.

# 1 Transformation de Fourier

La transformée de Fourier à d'abord été introduite dans le but de résoudre des équations aux dérivées partielles telles que celle de la chaleur. En effet elle permet de transformer l'opérateur dérivation en simple produit par un complexe. Ce qui, connaissant des transformée de Fourier " classique " permet de remonter à la solution de l'équation aux dérivées partielles.

## 1.1 Transformation de Fourier sur $\mathbb{S}(\mathbb{R})$

On commence par définir la transformée sur une classe particulière de fonctions lisses et à décroissance rapide, à savoir la classe de Schwartz définie commme ci dessous.

**Definition 1.1** (Classe de Schwartz)**.**

$$\mathbb{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty \text{ , } \forall k; n \in \mathbb{N} \; x^n f^{(n)} \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

C'est clairement un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{K})$. Il s'agit également d'une sous-algèbre de celui-ci en vertu la formule de Leibniz et du fait que toutes les dérivées tendent vers 0 en l'infini donc sont bornées. On va préciser ces propriétes via les crochets d'intégration. En particulier toutes les intégration par parties (IPP) que nous seront amenés à faire sont légitimes.

**Remarque 1** (Crochets d'intégration)**.** *On remarque que pour tout $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$, les dérivées sont intégrables :*

$$\forall f \in \mathbb{S}(\mathbb{R}) \text{ ; } \forall k \in \mathbb{N} \text{ ; } f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R}).$$

*En effet :* $\left[ x^2 f^{(k)}(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right]$ *montre que les dérivées sont intégrables en $\pm\infty$, la continuité sur $\mathbb{R}$ conclut la preuve.*
*De plus, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$ par linéarité on a :*

$$\left[ P(x) f^{(n)}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0. \tag{1}$$

*Mais également pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, toute fonction $h \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ bornée, toutes fonctions $f, g \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ et tout $k, n \in \mathbb{N}$ :*

$$\left[ h(x) P(x) g^{(n)}(x) f^{(k)}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0. \tag{2}$$

Ceci nous amène aux identités suivantes. Elles n'apparaitront pas telles qu'elles dans la suite mais ressemblent fortement à de futurs calculs.

**Lemme 1.** *On introduit,*

$$\forall n \in \mathbb{N} \; I_n \subset \mathbb{N}^2 \text{ ; } I_n = \{(u; v) \in \mathbb{N}^2 ; u + v = n\}.$$

*Pour toutes fonctions $f, g \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ et tous couples $(u, v), (k, p) \in I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$*

$$\int_{\mathbb{R}} g^{(p)} f^{(k)} = (-1)^{u-p} \int_{\mathbb{R}} g^{(u)} f^{(v)}.$$

*Démonstration.* On procède par intégration par partie. Toutes les intégrales sont définies car les fonctions intégrées sont dans $\mathbb{S}(\mathbb{R})$. Les crochets d'évaluation sont nuls par (2). □

On va s'intéresser à une famille particulière de fonctions de la classe de Schwartz (on modifie définition de [1]). Ces fonctions nous permettrons d'étendre la transformée de Fourier; notamment grâce à la relation de récurrence qu'elle vérifient.

**Definition 1.2** (Fonctions de Hermite)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :*

$$h_n(x) := (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n}\left[exp(-x^2)\right].$$

*Elles vérifient :*

**Lemme 2** (Propriété des fonctions de Hermite)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$*

1. *Il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $h_n = P_n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. De plus $d^\circ P_n = n$.*
2. $$\forall x \in \mathbb{R},\ h_n' - xh_n = -h_{n+1}. \tag{3}$$

*En particulier la relation de récurrence (3) et la donnée de $h_0 = x \mapsto e^{\frac{-x^2}{2}}$, détermine entièrement notre suite.*

*Démonstration.* Le premier point est évident en procédant par récurrence.
Pour le deuxième point on remarque en dérivant le produit que, $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$h_n' = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left[x\frac{d^n}{dx^n}\left(exp(-x^2)\right) + \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(exp(-x^2)\right)\right]$$
$$h_n' = x(-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(exp(-x^2)\right)\right] - (-1)^{n+1}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left[\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(exp(-x^2)\right)\right]$$
$$h_n' = xh_n - h_{n+1}$$

□

On définit maintenant la transformée de Fourier sur $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ et allons étudier quelques propriétés de celle-ci.

**Definition 1.3** (Transformée de Fourier)**.** *Pour $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ On définit la fonction :*

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}\,;\ \mathscr{F}[f](\zeta) = \hat{f}(\zeta) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\zeta x}$$

**Remarque 2.** *Notre fonction est bien définie car $\mathbb{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.*
*De plus, l'intégrande est $C^\infty(\mathbb{R})$ en $\zeta$. De plus toutes ces dérivée en $\zeta$ sont majorée par une focntion du type $y \mapsto y^k|f(y)|$ où $k \in \mathbb{N}$. Or ces majorants sont intégrables par construction de Schwartz. Par théorème de dérivation sous le signe intégrale, on en déduit que :*

$$\forall f \in \mathbb{S}(\mathbb{R})\,;\ \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$$

.

On va montrer qu'elle est également dans la classe de Schwartz, ce qui permet d'appliquer deux fois la transformée de Fourier et d'en déduire la formule d'inversion de Fourier.

**Théorème 1.1** (Stabilité de la classe de Schwartz et inversibilité de $\mathscr{F}$)**.** *Pour tout $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$. On a $\hat{f} \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$.*
*C'est à dire :*

$$\mathscr{F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{S}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \hat{f} \end{array} \right.$$

*De plus :*

$$\forall f \in \mathbb{S}(\mathbb{R})\ ;\ \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x) \tag{4}$$

*En particulier $\mathscr{F}^4 = 4\pi^2 Id_{\mathbb{S}(\mathbb{R})}$. Donc $\mathscr{F}$ est un automorphisme de $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ dont l'inverse est donné par $\frac{1}{4\pi^2}\mathscr{F}^3$*

*Démonstration.* On commence par montrer que la classe de Schwartz est stable par la transformation de Fourier.
Pour cela nous allons avoir besoin des identitées suivantes.

**Lemme 3.** *Pour tout $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ ; $n, p \in \mathbb{N}$ on a :*

1. $\forall \zeta \in \mathbb{R}\ ;\ \widehat{f}^{(p)}(\zeta) = \widehat{(-ix)^p f}(\zeta)$
2. $\forall \zeta \in \mathbb{R}\ ;\ \widehat{f^{(n)}}(\zeta) = (i\zeta)^n \widehat{f}$

*Démonstration.* On procède par récurrence sur n ou p. Il suffit donc de montrer que $\hat{f}' = -\hat{ixf}$ et $\hat{f'} = i\zeta\hat{f}$ : Comme f est dans la classe de Schwartz $\left|-ixf\right| \leq \left|xf\right| \in L^1$ et $x \mapsto -ixf(x) \in \mathscr{C}^1$. Donc le théorème de dérivation sous el signe intégrale donne :

$$\hat{f}'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\zeta x} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{d\zeta}\left[e^{-i\zeta x} f(x)\right]dx = \int_{\mathbb{R}} (-ix)e^{-i\zeta x} f(x)dx = \widehat{-ixf}$$

Pour la deuxième identité on procède par intégration par partie, on a déjà vu que les crochets étaient nuls donc :

$$\widehat{f'} = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\zeta x} f'(x)dx = -\left(\int_{\mathbb{R}} (-i\zeta)e^{-i\zeta x} f(x)dx\right) = i\zeta\int_{\mathbb{R}} e^{-i\zeta x} f(x)dx = i\zeta\hat{f}$$

□

**Corollaire 1.1.1.** *La classe de Schwartz est stable par $\mathscr{F}$*

*Démonstration.* Si $n, p \in \mathbb{N}$ Pour $\zeta > 1$, on a

$$|\zeta|^p \hat{f}^{(n)} = \left|\left[\widehat{(-it)^n f}\right]^{(p)}\right|$$

Or la deuxième fonction est la transformée de Fourier d'une combinaison linéaire de produits de polynômes et de fonctions de Schwartz. En particulier sa transformée de Fourier est bornée.

$$\text{Donc } |\zeta|^p f^{(n)}(\zeta) \leq C_{n,p} \in \mathbb{R} \forall n, p \in \mathbb{N}$$

En particulier :

$$|\zeta|^p f^{(n)} \leq \frac{C_{n;p+1}}{|\zeta|} \underset{|\zeta|\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

La preuve du théorème (1.1) nécessite également le calcul d'une intégrale Gaussienne dans le plan complexe. Une démonstration possible se base sur l'étude d'un équation différentielle mais nous allons plutot utiliser l'analyse complexe pour montrer que :

**Lemme 4.** *$\forall a>0$ ; $b\in\mathbb{R}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(ax+ib)^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{-a^2x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a^2}}$$

*Démonstration.* On rapelle que par composition, la fonction $z\mapsto e^{-z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En particulier son intégrale suivant un chemin fermé et $\mathscr{C}^1$ par morceau est nulle. On considère pour $M\in\mathbb{R}$ le rectangle $\mathscr{R}=[-M;M]\times[0,b]$. En posant $\Gamma$ sa frontière on a donc.

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2}dz = 0$$

On découpe le contour de $\Gamma$ en 4 : $S_1=[-M,M]\times\{0\}$ ; $S_2=[-M,M]\times\{b\}$ ; $S_3=\{-N\}\times[0,b]$ ; $S_4=\{N\}\times[0,b]$.
En paramêtrant positivement les contours par rapport à $\mathscr{R}$, on a :

$$\int_{S_1} e^{-z^2}dz = \int_{-M}^{M} e^{-x^2}dx$$

et

$$\int_{S_2} e^{-z^2}dz = \int_{M}^{-M} e^{-(x+ib)^2}dx = -\int_{-M}^{M} e^{-(x+ib)^2}dx.$$

Pour les intégrales sur les côtés verticaux on traite seulement $S_4$.

$$\left|\int_{S_4} e^{-z^2}dz\right| = \left|\int_0^b e^{-(M+it)^2}dt\right| = \left|\int_0^b e^{-M^2-2itM+t^2}dt\right| \le e^{-M^2}\int_0^b e^{-t^2}dt \;\le\; e^{-M^2}\times be^{b^2} \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On montre de même que $\int_{S_3} e^{-z^2}dz \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Et puisque :

$$\int_{S_1} e^{-z^2}dz + \int_{S_2} e^{-z^2}dz + \int_{S_3} e^{-z^2}dz + \int_{S_4} e^{-z^2}dz = 0,$$

alors :

$$\left|\int_{-M}^{M} e^{-x^2}dx - \int_{-M}^{M} e^{-(x+ib)^2}dx\right| = \left|\int_{S_3} e^{-z^2}dz - \int_{S_4} e^{-z^2}dz\right|.$$

Quitte à travailler à $\epsilon$ près on peut faire tendre M vers l'infini pour finalement obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+ib)^2}dx.$$

Pour ajouter le $a$ on effectue le changement de variable $y=ax$ deux fois. □

**Corollaire 1.1.2.** *Pour tout $\epsilon>0; x\in\mathbb{R}$ On a :*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon t^2}e^{-itx}dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon t^2-2\sqrt{\epsilon}t\frac{it}{2\sqrt{\epsilon}}+\frac{x^2}{4\epsilon}-\frac{x^2}{4\epsilon}}dt = e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{\epsilon}t+\frac{ix}{2\sqrt{\epsilon}}\right)^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

On peut alors faire montrer l'identité (4).
Soit $x\in\mathbb{R}$, on pose pour tout $\epsilon>0$, $u_\epsilon(x): t\mapsto e^{-\epsilon t^2}e^{-itx}\hat{f}(t)$.
Comme f est dans la classe de Scwhartz $\hat{f}$ l'est également et est donc intégrable. La majoration $|u_\epsilon(x)(t)|\le\left|\hat{f}\right|$, justifie que l'on puisse appliquer le théorème de convergence dominée avec : $u_\epsilon(t)\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{-itx\hat{f}(t)}$. Donc $\int_{\mathbb{R}} u_\epsilon(x)(t)\hat{f}(t)dt \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \hat{\hat{f}}(x)$. Or :

$$\int_{\mathbb{R}} u_\epsilon(x)(t)\hat{f}(t)dt = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-iyt}e^{-\epsilon t^2}f(y)dy\right)dt$$

Et l'intégrande vérifie $\left|e^{-itx}e^{-iyt}e^{-\epsilon t^2}f(y)\right| \leq e^{-\epsilon t^2}\left|f(y)\right|$. Qui est clairement intégrable sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonction intégrables en leur variables indépendantes.
On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour avoir :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-iyt}e^{-\epsilon t^2}f(y)dy\right)dt &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}e^{-iyt}e^{-\epsilon t^2}f(y)dydt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-it(y+x)}e^{-\epsilon t^2}dt\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y)\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}e^{-\frac{(y+x)^2}{4\epsilon}}dy && \text{Par le corollaire1.1.2} \\
&= 2\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}\sqrt{\epsilon}\int_{\mathbb{R}} f(2\sqrt{\epsilon}y'-x)e^{-y'^2} && \text{Avec} y \mapsto 2\sqrt{\epsilon}y'-x \\
&\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 2\sqrt{\pi}f(-x)\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy && \text{Par convergence dominée, car la gaussienn} \\
&= 2\pi f(-x)
\end{aligned}$$

Donc finalement $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$ □

Ceci montre que $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{4\pi^2}\mathscr{F}^3$. Or pour $h \in \mathbb{S}(\mathbb{R}); x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{1}{4\pi^2}\mathscr{F}^3(h)(x) = \frac{1}{4\pi^2}\mathscr{F}^2(\hat{h})(x) = \frac{2\pi}{4\pi^2}\hat{h}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}h(-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}h(t)dt$$

Ce qui nous amène à définir la transformée réciproque :

**Definition 1.4** (Fourier Réciproque sur $\mathbb{S}(\mathbb{R})$)**.**

$$\mathscr{F}^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{S}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{S}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}f(t)dt \end{array} \right.$$

*Qui vérifie évidemment* $\mathscr{F}^{-1}\circ\mathscr{F} = \mathscr{F}\circ\mathscr{F}^{-1} = id_{\mathbb{S}}(\mathbb{R})$

## 1.2 Transformation de Fourier sur $L^1$

On rappelle que la classe de Schwartz définie précédemment est dense dans $(L^1, ||.||_1)$. Car elle contient l'ensembles des fonctions $\mathscr{C}_c^\infty$ à support compact. Avec la définition précédente on préssent que le caractère $C^\infty$ à décroissance rapide est bien trop fort. En effet en vertu de la majoration $\left|e^{-itx}f(t)\right| \leq \left|f(t)\right|$, on voit bien que le caractère $L^1$ d'une fonction suffit à définir sa transformée de Fourier.

**Definition 1.5** (Transformation de Fourier sur $L^1$)**.** *Pour $f \in L^1$ On définit la fonction :*

$$\forall\zeta \in \mathbb{R}\,;\, \mathscr{F}[f](\zeta) = \hat{f}(\zeta) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\zeta x}dx$$

*Ceci définit une application linéaire*

$$\mathscr{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{C}} \\ f & \longmapsto & \hat{f} \end{array} \right.$$

En revanche nous allons devoir préciser l'ensemble d'arrivée de la fonction $\mathscr{F}$ ainsi définie.

**Proposition 1.1** (Riemann-Lebesgue)**.** *Pour toute $f \in L^1$ on a $\hat{f} \in \mathscr{C}_0^0(\mathbb{R})$.*
*Où $\mathscr{C}_0^0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $\pm\infty$*
*On a de plus la majoration :*

$$||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1 \tag{5}$$

*Démonstration.* On commence par montrer la majoration, on montrera en même temps que les fonctions sont bornées.

$$\forall f \in L^1\ ,\ \forall \zeta \in \mathbb{R}\ \left|\hat{f}(\zeta)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\zeta x}dx\right| \underset{(\circ)}{\leq} \int_{\mathbb{R}} \left|f(x)\right| dx = \left|\left|f\right|\right|_1$$

La majoration permet également d'appliquer le théorème de continuité sous le signe intégrale, puisque $\zeta \mapsto f(x)e^{-i\zeta x}$ est continue pour tout x. On a déjà vu que $\mathscr{F}$ était un automorphisme de $\mathbb{S}(\mathbb{R})$, en particulier pour tout $h \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ , $\hat{h}(\zeta) \underset{|\zeta| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $f \in L^1$, soit $n \in \mathbb{N}$ on choisit par densité une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $\left|\left|h_n - f\right|\right|_1 \leq \frac{1}{n}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Pour $\zeta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(\zeta) - \widehat{h_n}(\zeta)\right| &\leq \left|\left|\widehat{f} - \widehat{h_n}\right|\right|_\infty \\
&\leq \left|\left|\widehat{f} - \widehat{h_n}\right|\right|_1 && \text{Par 5}
\end{aligned}$$

Donc $\forall \zeta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(\zeta)\right| &\leq \frac{1}{n} + \left|\widehat{h_n}(\zeta)\right| \\
\limsup_{|\zeta| \longrightarrow \infty} \left|\widehat{f}(\zeta)\right| &\leq \frac{1}{n} + \limsup_{|\zeta| \longrightarrow \infty} \left|\widehat{h_n}(\zeta)\right| \\
\limsup_{|\zeta| \longrightarrow \infty} \left|\widehat{f}(\zeta)\right| &\leq \frac{1}{n} && \text{Car } \limsup_{|\zeta| \longrightarrow \infty} \left|\widehat{h_n}(\zeta)\right| = \lim_{|\zeta| \to \infty} \left|\widehat{h_n}(\zeta)\right| = 0
\end{aligned}$$

Donc lorsque $n \to \infty$, on obtient $\limsup_{|\zeta| \longrightarrow \infty} \left|\widehat{f}(\zeta)\right| = 0$ et par encadrement :

$$\hat{f}(\zeta) \underset{|\zeta| \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où □

Comme pour la classe de Schwartz on pourrait être tenté d'introduire la transformée réciproque $\mathscr{F}^{-1}$. Il faut simplement se méfier des fonctions que l'on considère.

**Definition 1.6** (Transformation réciproque sur $L^1$)**.** *Pour toute $f \in L^1$ On définit la fonction :*

$$\forall \zeta \in \mathbb{R}\ ;\ \mathscr{F}-1[f](\zeta) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\zeta x}dx$$

*Alors pour toute fonction $f \in L^1$ telle que $\mathscr{F}[f] \in L^1$ On a bien :*

$$\mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{F}[f] = f$$

*Réciproquement si $g \in L^1$ est telle que $\mathscr{F}^{-1}[f] \in L^1$.*

$$\mathscr{F} \circ \mathscr{F}^{-1}[g] = g$$

*Démonstration.* La démonstration est la même que sur la classe de Schwartz, en effet on a utiliser que le caractère $L^1$ des fonctions de la classe de Schwartz □

**Corollaire 1.1.3** (Injectivité sur $L1$)**.**

$$\mathscr{F} : \left| \begin{array}{ccc} (L^1, ||.||_1) & \longrightarrow & (\mathscr{C}_0^0(\mathbb{R}); ||.||_\infty) \\ f & \longmapsto & \hat{f} \end{array} \right.$$

*est linéaire continue et injective.*

*Démonstration.* La linéarité est évident par linéarité de l'intégrale, la majoration (5) justifie alors la continuité. Pour l'Injectivité, il suffit de montrer que $\ker \mathscr{F} = \{0\}$ car $\mathscr{F}$ est linéaire. Or $x \mapsto 0 \in L^1$ donc si $f \in L^1$ est telle que :

$$\mathscr{F}[f] = 0$$

On peut apppliquer $\mathscr{F}^{-1}$ des deux côtés pour obtenir :

$$f = 0$$

Donc $\mathscr{F}$ est injective sur $L^1$. □

## 1.3 Convolution et transformation de Fourier

Dans cette sous-section nous allons présenter les résultats liées au produit de convolution et la transformée de Fourier que nous utiliserons dans les preuves des parties suivantes.

**Définition/Proposition 1.1.** *(Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$)*
*Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la fonction $f * g \in L^1(\mathbb{R})$, par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt$$

*Démonstration.* Pour montrer que $f * g$ est bien définie, on va utiliser le théorème de Fubini-Tonnelli.

$$\begin{aligned}
\int_R \left| \int_R f(t)g(x-t)dt \right| dx &\leq \int_R \int_R \left| f(t)g(x-t) \right| dt dx \\
&= \int_R \int_R \left| f(t)g(x-t) \right| dx dt \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1 \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Ainsi $f * g$ est finie presque partout donc bien définie et de plus $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. □

On peut maintenant étudier le lien entre le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$ et la transformée de Fourier.

**Proposition 1.2.** *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.*

*Démonstration.* Soit $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\ dt\ e^{-ix\xi} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi} \int_{\mathbb{R}} g(x-t)e^{-i(x-t)\xi} dx dt \qquad \text{par le théorème de Fubini} \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

On a donc le résultat voulu. □

Il nous sera utile de définir un produit de convolution entre une fonction $L^2(\mathbb{R})$ et une fonction $L^2(\mathbb{R})$, ce qui est permis par la définition/proposition suivante.

**Définition/Proposition 1.2.** *(Produit de convolution dans $L^2(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$)*
*Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, on définit la fonction $f * g \in L^2(\mathbb{R})$, par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$$

*Et l'on a $\|f * g\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_1$.*

*Démonstration.* On va tout d'abord montrer la bonne définition de $f * g$, pour on notera pour tout $t, x \in \mathbb{R}, F(t,x) = f(t)g(x-t)$, soit $x \in \mathbb{R}$, en appliquant l'inégalité de Hölder avec la mesure associée à la densité $|g|$ par rapport à la mesure de Lebesgue, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |F(t,x)|\, dt &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^2 \, |g(t| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(t)| \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^2 \, |g(t| \right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_1^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En mettant au carré et intégrant par rapport à $x$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |F(t,x)|\, dt \right)^2 dx &\leq \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^2 \, |g(t| \, dt dx \\ &\leq \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|^2 \, dx \, |g(t| \, dt \quad \text{par le théorème de Fubini-Tonelli} \\ &\leq \|g\|_1^2 \, \|f\|_2^2 \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Ainsi $f * g$ est fini presque partout donc bien défini et $f * g \in L^2(\mathbb{R})$.
De plus par croissance de la racine carré on a la majoration de la norme voulu. □

**Remarque 3.** *Par un simple changement de variable on a que $f * g = g * f$*

Plus généralement on peut faire des produits de convolution sur des d'autres ensembles de fonctions mais ces résultats ne nous seront pas utiles ici.

# 2 Transformée de Fourier dans $L^2$

Nous allons proposer une construction de la transformée de Fourier reposant sur une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Elle s'appuie essentiellement sur l'ouvrage [1], qui propose trois constructions de la transformation de Fourier sans faire appel au théorème de prolongement des applications continues. Pour cela nous allons dés à présent énoncé quelques résultats sur la géométrie de cette espace.
Dans toute la suite de cette partie et sauf mention du contraire, les fonctions seront supposées $L^2$

## 2.1 Géométrie de l'espace $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$

On rappelle que l'espace $L^2 := L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ est muni d'un produit scalaire canonique : $\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\bar{g}$ et de la norme associée : $||f||_2 = \sqrt{\langle f|f\rangle}$ qui le rend Hilbertien.
On rappelle également le théorème de Pythagore et une identité de polarisation qui seront bien utiles pour les calculs à venir. Si $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille orthogonale on a :

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{n} f_k\right|\right|^2 = \left\langle \sum_{k=0}^{n} f_k | \sum_{k=0}^{n} f_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{n} ||f_k||^2, \tag{6}$$

$$\forall f,g \in L^2,\ \langle f|g\rangle = \frac{1}{4}\left(||f+g||_2^2 + ||f-g||_2^2\right). \tag{7}$$

On va regarder quelques résultats généraux sur les bases hilbertiennes, rappellons en la définition.

**Definition 2.1** (Base Hilbertienne)**.** *Une famille $(e_n)_{\mathbb{N}} \in L^{2^{\mathbb{N}}}$ est une base hilbertienne si :*

1. $\forall (k;n) \in \mathbb{N}^2;\ \langle e_k|e_n\rangle = \delta_{n,k}$
2. $Vect((e_k)_n)$ *est dense dans* $L^2$

L'adhérence d'un partie est généralemnet plus difficile à déterminer que son orthogonal, notamment lorsque l'on parle d'espace vectoriel. Ainsi il est souvent plus efficace d'utiliser la caractérisation suivante.

**Théorème 2.1.** *Une famille de vecteurs $(f_n)_{\mathbb{N}}$ engendre un espace dense de $L^2$ si et seulement si* $\forall f \in L^2\ [\forall n \in \mathbb{N}\,(f_n|f) = 0] \Rightarrow [f = 0]$ *, ou plus synthétiquement* $\left((f_n)_{\mathbb{N}}\right)^{\perp} = \{0\}$

*Démonstration.* Pour le démontrer, on remarque que par linéarité du produit scalaire on a $\left((f_n)_{\mathbb{N}}\right)^{\perp} = Vect(f_n)_n^{\perp}$.
Puis, par Cauchy-Schwartz et bi-linéarité on voit que le produit scalaire est continu en ses deux coordonnées. Par caractérisation séquentielle de la continuité, si $(g_k)_k$ est une suite de G convergente vers $g \in \bar{G}$ et $f \in G^{\perp}$, alors $(f|g) = 0$. D'où $G^{\perp} \subset \bar{G}^{\perp}$.
L'inclusion $G \subset \bar{G}$ donne $\bar{G}^{\perp} \subset G^{\perp}$. D'où :

$$\bar{G}^{\perp} = G^{\perp}.$$

(1) Comme $\overline{Vect(f_n)_n}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2$ on peut lui appliquer le théorème du supplémentaire orthogonal pour en déduire que :

$$L^2 = \overline{Vect(f_n)_n}^{\perp} \oplus \overline{Vect(f_n)_n}$$

$$L^2 = Vect(f_n)_n^{\perp} \oplus \overline{Vect(f_n)_n}$$

$$L^2 = \left((f_n)_n\right)^{\perp} \oplus \overline{Vect(f_n)_n}$$

Donc si $\left((f_n)_n\right)^{\perp} = \{0\}$ alors nécessairement $\overline{Vect(f_n)_n} = L^2$.
La réciproque est évidente avec (1). □

**Théorème 2.2** (Densité des fonctions de Hermites)**.** *Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les fonctions de Hermite définies dans notre première partie, on a :*

1. *La famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans $L^2$*
2. *$((h_n)_{\mathbb{N}})^{\perp} = \{0\}$ Et donc $Vect((h_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est dense dans $L^2$*

*Démonstration.* On rappelle que les $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de la forme $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ h_n = P_n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ où $P_n$ est un pôlynome de degré n. On note désormais $F_n := Vect\left((h_k)_{k=0,1\dots n}\right)$. Par combinaison linéaire et on a $F_n \underset{(\circ)}{=} Vect\left(\left(x^k \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)_{k=0,1\dots n}\right)$.

1. Par la remarque $(\circ)$, pour établir l'orthogonalité des fonctions de Hermite, on peut se contenter de montrer que pour tout $n < m \in \mathbb{N}$.

$$\left\langle x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) | h_m \right\rangle = 0$$

On utilise la définition initiale des polynômes pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\left\langle x^n e^{-\frac{x^2}{2}} | h_m \right\rangle &= (-1)^m \int_{\mathbb{R}} x^n \frac{d^m}{dx^m}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] \\
&= (-1)^{m+1} n \int_{\mathbb{R}} x^{n-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] && \text{Par IPP, les crochets sont nuls} \\
&= (-1)^{m+2} n(n-1) \int_{\mathbb{R}} x^{n-2} \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] && \text{Idem} \\
&\dots \\
&\dots && \text{IPP en série} \\
&= (-1)^{m+n} \frac{n!}{(n-m)!} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right] \\
&= (-1)^{m+n} \frac{n!}{(n-m)!} \left[\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= 0 && \text{Car la fonction du crochet est de la classe de S}
\end{aligned}$$

D'où l'orthogonalité de notre famille.

2. La démonstration de la complétude utilise évidemment la caractérisation précédente (2.1) mais est longue à détailler. Nous en donnons simplement les étapes principales. Fixons une fonction $f \in L^2$ telle que
$\left[\forall \in \mathbb{N}\,,\ \langle f | h_n\rangle\right] \equiv \left[\forall \in \mathbb{N}\,,\ \left\langle f | x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \right\rangle\right]$ par $(\circ)$.
   (a) La fonction $g : x \mapsto f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \in L^1$, par Cauchy-Schwartz
   (b) On peut donc considérer sa transformation de Fourier étendu au plan complexe selon la formule analytique à savoir :

$$\hat{g} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \zeta & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\zeta x} dx \end{array} \right.$$

   (c) On montre par théorème d'holomorphie sous le signe intégrale que cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$. L'argument principal est que la gaussienne est dans la classe de Schwartz et donc les dérivées en $\zeta$ restent intégrables

(d) On en déduit que $\hat{g}$ est développable en série au voisinnage de tout point de $\mathbb{C}$. En particulier par Taylor-Young, pour tout $\zeta$ "assez petit" :

$$\hat{g}(\zeta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\hat{g}^{(n)}(0)}{n!}\zeta^n$$

(e) Or par théorème de dérivation sous le signe intégrale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left|\hat{g}^{(n)}(0)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} (-ix)^n f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\zeta x} dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} x^n f(x) e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\zeta x} dx\right| = 0$$

(f) On vient de montrer que $\hat{g}$ s'annule sur un voisinnage de 0 donc par principe des zéros isolés : $\hat{g} = 0$

(g) Puis par injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1$, on en déduit que $g = 0$. Et comme la gaussienne ne s'annule pas :

$$f = 0$$

□

On fixe pour la suite une base hilbertienne $(e_n)_n$ de $L^2$. On va voir qu'elle agit de façon très semblable à une base d'un espace vetoriel de dimension fini. En ce sens que toute fonction $f \in L^2$ pourra s'écrire $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n e_n$ avec $(u_n)_n \in l^2(\mathbb{N}) = l^2$. On adoptera désormais cette notation.

Le lemme suivant met en évidence que l'orthogonalité de notre base permet de faire converger des séries qui ne convergent pas normalement. En effet comme la famille est normée ($||e_n|| = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$) on serait tenté de dire qu'un série du type $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n e_n$ converge si $u_n \in l^1(\mathbb{N})$. Or cette condition est évidemment suffisante mais non nécessaire, en effet :

**Lemme 5** (Convergence des séries en $l^2$)**.** *Pour toute suite $(u_n)_n \in l^2$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n e_n$ converge vers une fonction $f \in L^2$*

*Démonstration.* Du à l'absence d'expression d'une limite on va utiliser le critère de Cauchy pour montrer que cette série est convergente. On a :

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{n+p} u_k e_k - \sum_{k=0}^{n} u_k e_k\right|\right|^2 = \left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k e_k\right|\right|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|^2 \, ||e_k||^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|^2 \leq R_n(u^2)$$

par Pythagore. Où $R_n(u^2)$ désigne le reste d'ordre n de la série positive et absolument convergente $(u_n^2)_n$, en particulier ceci tend vers 0 en ne dépendant que de n. La suite des sommes partielles de notre série de fonction est de Cauchy donc la série converge dans $L^2$ par complétude. □

On pourra désormais noté $f_u = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n e_n$ sans ambiguïté pour toute suite u de $l^2$.
Réciproquement, à une fonction $f$ de $L^2$ on associe une suite à valeur complexe, a priori sans informations sur sa sommabilité. On appelle cette suite, la suite des coefficients de projections relativement à $(e_n)_n$, pour la suite on dira simplement coefficients de projection. On peut notamment penser au projections sur la famille des $\left(e^{-ixn}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui constitue les coeffcients de Fourier. Mais ici nous projetterons plus tard sur les fonctions de Hermite, nous les appeleront donc les coefficients de Hermite. Les résultats suivants restent généraux.

**Definition 2.2** (Coefficients de projection)**.** *On appelle coefficients de projections d'une fonction $f \in L^2$ la suite définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ c_n(f) = \hat{f}(n) := \langle f | e_n \rangle$$

Cette suite de coefficient est particulièrement liée à l'approximation de f par une combinaison linéaire des $(e_n)_n$ comme le précise le lemme suivant.

**Lemme 6** (Minimalité des coefficients de projection)**.** *Pour tout $f \in L^2$, tout $n \in \mathbb{N}$ et toute famille $u_0; u_1; ...; u_n$, on a l'inégalité :*

$$\left\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k\right\| \leq \left\|f - \sum_{k=0}^{n} u_k(f) e_k\right\|$$

*Avec égalité si et seulement si $u_k = c_k(f)\ \forall k \in \{0; 1; ...; n\}$*

**Remarque 4.** *Ceci est un cas particulier du théorème de projection sur un sous-espace vectoriel fermé. Il garantit l'inégalité par minimalité du projeté et le cas d'égalité est fourni par l'unicité de celle-ci. On va quand même en proposer une démonstration "à la main" afin d'utiliser notre base orthogonale et de mettre en évidence que le cadre des coefficients de projection.*

*Démonstration.* On rappelle la formule dans les espaces de Hilbert,

$$\forall a; b \in H^2, ||a+b||^2 = \langle a|b\rangle = ||a||^2 + 2Re(\langle a|b\rangle) + ||b||^2.$$

Pour une famille $u_0; u_1; ...; u_n$ donnée, on regarde :

$$\left\|f - \sum_{k=0}^{n} u_k e_k\right\|^2 = \left\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k + \sum_{k=0}^{n} (c_k(f) - u_k) e_k\right\|^2$$

$$\left\|f - \sum_{k=0}^{n} u_k e_k\right\|^2 = \left\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k\right\|^2 + \left\|\sum_{k=0}^{n} (c_k(f) - u_k) e_k\right\|^2 + 2Re\left(\left\langle f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k | \sum_{i=0}^{n} (c_i(f) - u_i) e_i\right\rangle\right)$$

On s'intéresse au produit scalaire. Il s'écrit égalemnent :

$$\left\langle f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k | \sum_{i=0}^{n} (c_i(f) - u_i) e_i\right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \overline{c_i(f) - u_i} \left\langle f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k | e_i\right\rangle.$$

Or les termes :

$$\left\langle f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k | e_i\right\rangle = \langle f | e_i\rangle - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) \langle e_k | e_i\rangle = c_i(f) - c_i(f) = 0.$$

Et donc finalement :

$$\left\|f - \sum_{k=0}^{n} u_k e_k\right\|^2 = \left\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k\right\|^2 + \left\|\sum_{k=0}^{n} (c_k(f) - u_k) e_k\right\|^2 \geq \left\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k\right\|^2.$$

Le cas d'égalité étant traiter par $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$ et la liberté de notre base hilbertienne. □

Ceci nous donne une suite constante de coefficient de combinaison linéaire. En effet la densité de notre famille ne nous garantissait pas que nos coefficients était les mêmes pour tout n : des familles du type $u_0^n; u_2^n; ...; u_n^n$. On a désormais une suite dont les premiers termes ne dépendent pas de l'approximation choisie comme le montre le corolaire suivant.

**Corollaire 2.2.1** (Convergence de la série des projections)**.** *Pour tout $f \in L^2$,*

$$\left\|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f) e_k\right\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*Ou encore : $f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f) e_n$.*

*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$, par densité de notre famille, il existe $n \in \mathbb{N}$ et une famille $u_0^n; u_2^n; ...; u_n^n$ telle que :

$$\left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)e_k\right|\right| \le \left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} u_k^n e_k\right|\right| \le \epsilon$$

Ou la première inégalité est fourni par le lemme précédent. Ce qui conclut la preuve. □

On arrive finalement à une identité qui nous sera bien utile lors des calculs de la transformée de Fourier. Elle nous fournit le caractère isométrique des coefficients de Fourier. A savoir.

**Théorème 2.3** (Identité de Parseval)**.** *Pour tout $f \in L^2$, alors $(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et de plus :*

$$||(c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}||_{l^2}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = ||f||^2$$

*Démonstration.* Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, On écrit tout d'abord que :

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{n+p} c_k(f)e_k - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)e_k\right|\right|^2 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)e_k\right|\right|^2.$$

Par continuité de la norme. Puis on remarque que :

$$\left|\left|\sum_{k=0}^{n+p} c_k(f)e_k - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)e_k\right|\right|^2 = \left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k(f)e_k\right|\right|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k(f)|^2 = \sum_{k=0}^{n+p} |c_k(f)|^2 - \sum_{k=0}^{n} |c_k(f)|^2$$

$$= \left|\left|\sum_{k=0}^{n+p} c_k(f)e_k\right|\right|^2 - \left|\left|\sum_{k=0}^{n} c_k(f)e_k\right|\right|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ||f|| - \left|\left|\sum_{k=0}^{n} c_k(f)e_k\right|\right|^2.$$

Par le corollaire précédent, on en déduit :

$$0 \le ||f|| - \left|\left|\sum_{k=0}^{n} c_k(f)e_k\right|\right|^2 = \left|\left|f - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)e_k\right|\right|^2.$$

□

## 2.2 Transformée de Fourier des fonctions de Hermite

Nous venons de montrer que la transformée de Fourier était un automorphisme de $\mathbb{S}(\mathbb{R})$. On peut préciser en munissant $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ de la norme $||.||_2$ induite par $L^2$. Sa deuxième itération conserve la norme à constante multiplicative près. Remarquons tout d'abord que $\mathscr{F}$ est normal. Sans se soucier des interversions d'intégrales, on a en effet :

$$\langle \mathscr{F}(f)|g\rangle = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} f(t)e^{-itx} = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{itx}dxdt} = \langle f|2\pi\mathscr{F}^{-1}(f)\rangle$$

Or $\mathscr{F}^{-1}$ est un polynôme en $\mathscr{F}$ donc lui commute.
Il est donc naturel de déterminer une base orthonormale de vecteur propre. Comme $\mathscr{F}^4 = 4\pi^2 Id$ les valeurs propre doivent être dans $\{\sqrt{2\pi}; -\sqrt{2\pi}; i\sqrt{2\pi}; -i\sqrt{2\pi}\}$. Il s'avère que les fonctions de Hermite définies plus haut sont effectivement vecteurs propres de $\mathscr{F}$ avec la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N};\ \hat{h_n} = (-i)^n\sqrt{2\pi}h_n$$

Pour l'établir on va montrer que les suites $((-i)^n h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\hat{h_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence.
On passe à la transformée de Fourier dans la relation de récurrence (3) , qui donne :

$$\widehat{h'_n} - \widehat{xh_n} = (-n+1)\widehat{h_{n+1}},$$

$$i\zeta\widehat{h_n} - i \times \widehat{-ixh_n} = (-n+1)\widehat{h_{n+1}},$$
$$i\zeta\widehat{h_n} - i \times \widehat{h_n}' = (-n+1)\widehat{h_{n+1}},$$
$$\widehat{h_n}' - \zeta\widehat{h_n} = (-i)(n+1)\widehat{h_{n+1}}.$$

Or en multipliant (3) par $(-i)^n$ on obtient également :

$$(-i)^n h'_n - (-i)^n x h_n = (-i)(-i)(n+1)(-i)^n h_{n+1}.$$
$$(-i)^n h'_n - x(-i)^n h_n = (-i)(n+1)(-i)^{n+1} h_{n+1}$$

Il reste à calculer la transformée de Fourier du premier terme à savoir :

$$\widehat{h_0} = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi} h_0,$$

par (1.1.2), notre intégrale gaussienne dans notre sous partie sur $\mathbb{S}(\mathbb{R})$.
Finalement, comme les deux suites vérifient la même relation de récurrence on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \widehat{h_n} = (-i)^n \sqrt{2\pi} h_n \tag{8}$$

On à déjà vu que cette famille était orthogonale et totale dans $L^2$. Pour en faire une base hilbertienne de $L^2$, on la normalise via $\tilde{h_n} = \frac{h_n}{||h_n||}$.

## 2.3 Transformée de Fourier sur $L^2$

L'extension de la transformée de Fourier est alors naturelle puisque comme pour toute fonction $f \in L^2$ on associe la suite $\left(c_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ vérifiant :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f)\tilde{h_n} = f$$

on définit la transformée de Fourier via l'identité de Wiener :

**Definition 2.3** (Identité de Wiener)**.** *Avec les notations précédentes :*

$$\mathscr{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^2 & \longrightarrow & L^2 \\ f & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{2\pi}(-i)^n c_n(f)\tilde{h_n} \end{array} \right. .$$

*En remarquant que :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f)\hat{\tilde{h_n}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{2\pi}(-i)^n c_n(f)\tilde{h_n}.$$

**Remarque 5.** 1. *Cette somme est bien convergente car on à déjà vu que si $(u_n))_n \in l^2$ alors $\sum_n u_n\tilde{h_n}$ convergeait.*

2. *On définit de façon analogue la transformée de Fourier inverse :*

$$\mathscr{F}^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} L^2 & \longrightarrow & L^2 \\ f & \longmapsto & \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{N}} i^n c_n(f)\tilde{h_n} \end{array} \right. .$$

Cette définition peu commune à l'avantage de donner immédiatement l'identité de Plancherel ainsi que toutes ses conséquences.

**Théorème 2.4** (Plancherel sur $L^2$)**.** *Pour toute fonction $f \in L^2$, on a*

$$||\hat{f}||_2 = \sqrt{2\pi}\,||f||_2. \tag{9}$$

*Démonstration.* Par Wiener et Parseval on a :

$$\begin{aligned} ||\hat{f}||_2^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\sqrt{2\pi}(-i)^n c_n(f)\right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{n\in\mathbb{N}} \left|c_n(f)\right|^2 \\ ||\hat{f}||_2^2 &= 2\pi\,||f||_2^2 && \text{Par Parseval à nouveau} \end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.4.1** (Conservation du produit scalaire)**.** *Pour toute fonctions $f, g \in L^2$*

$$\langle \hat{f} | \hat{g} \rangle = 2\pi\ \langle f | g \rangle,$$

*ceci découle de l'identité de polarisation et de celle de Placherel.*

**Corollaire 2.4.2** (Convergence simultanée)**.** *Pour toute fonction $f \in L^2$ et toute suite $\left(f_n\right) - n \in \mathbb{N}$ de $L^2$, on a*

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \ \text{ si et seulement si } \widehat{f_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \hat{f}.$$

En revanche, elle a le mauvais goût de ne pas être évidemment l'extension sur $L^1$. Nous avons réussi à éviter le théorème de prolongement des applications continues jusque là, mais il nous permet de montrer rapidement cette coïncidence. Nous admettrons la continuité de la transformée de Fourier

**Théorème 2.5** (Prolongement et coïncidence de la définition sur $L^1$)**.** *$\mathscr{F}$ se prolonge de manière unique sur $L^1$ et le prolongement obtenue est celui défini dans notre partie dédiée.*

*Démonstration.*

1. L'application à premièrement été définie sur $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ puis restreinte à $Vect\left((h_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$
2. Comme $Vect\left((h_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est dense dans $L^2$, il l'est à fortiori dans $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ donc les applications correspondent sur $\mathbb{S}(\mathbb{R})$.
3. Or $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1$ donc l'application se prolonge à nouveau par continuité de façon unique.
4. Or les définitions correspondaient sur $L^1 \cap \mathbb{S}(\mathbb{R})$

□

# 3 Principe d'incertitude de Heisenberg

Les principes d'incertitudes sont des énoncés qui limitent la concentration simultanée d'une fonction et de sa transformée de Fourier. Le plus connu étant celui de Heisenberg que nous allons énoncer et démontrer dans cette partie. On trouve son énoncé dans [2], ainsi que d'autres principes d'incertitudes.

## 3.1 Le théorème

**Théorème 3.1.** ***Inégalités de Heisenberg***
*Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors pour $i \in [\![1\ ;\ d]\!]$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (x_i - a)^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{\mathbb{R}^d} (\xi_i - b)^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \geq (2\pi)^d \frac{\|f\|_2^4}{4}$$

*De plus on a égalité si et seulement si, $f$ est de la forme,*

$$f(x) = g(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_d) e^{-i\beta x_j} e^{-\alpha(x_j - \gamma)^2}$$

*où $g \in L^2(\mathbb{R}^{d-1})$, $\alpha > 0$ et $\gamma, \beta \in \mathbb{R}$*

**Remarque 6.** *Le facteur $(2\pi)^d$ vient du faite qu'on n'utilise pas la transformée de Fourier bien normalisé, pour ça il faudrait ajouter un facteur $(2\pi)^{-\frac{d}{2}}$ dans la définition, la transformée de Fourier devient alors une isométrie.*

*Démonstration.* Nous allons faire la preuve pour $d = 1$ et dans un premier cas supposer que $a = b = 0$.
Tout d'abord si

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx = +\infty \text{ ou } \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = +\infty$$

l'inégalité est alors vrai, on peut donc supposer que $h : x \longmapsto x f(x)$ et $g : \xi \longmapsto \xi \hat{f}(\xi)$ appartiennent à $L^2$.
Nous allons poser $f^* = \mathscr{F}^{-1}(-ig)$ ainsi par la formule de Plancherel, $\|f^*\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|-ig\|_2^2$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \left|i\xi \hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= 2\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 \left|f(x)\right|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \left|f^*(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\geq 2\pi \left(\mathfrak{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f^*(x)} dx\right)\right)^2 \qquad \text{par Cauchy-Schwarz} \\
&\geq 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{2} (f\overline{f^*} + f^*\overline{f})(x) dx\right)^2 \qquad (10)
\end{aligned}$$

<u>On commence par le cas où $f \in S(\mathbb{R})$ :</u>
On a donc $f' \in S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ ainsi $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi) = ig(\xi)$ donc $f' = f^*$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} x(f\overline{f^*} + f^*\overline{f})(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} x \left(\left|f(x)\right|^2\right)' dx \\
&= \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} x \left(\left|f(x)\right|^2\right)' dx \\
&= \lim_{R \to +\infty} \left(\left[x\left|f(x)\right|^2\right]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} \left|f(x)\right|^2 dx\right) \\
&= \lim_{R \to +\infty} R\left(\left|f(R)\right|^2 + \left|f(-R)\right|^2\right) - \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{R\to+\infty} R\left(\left|f(R)\right|^2+\left|f(-R)\right|^2\right)$ est fini et positive en notant $\ell>0$ cette limite, et par intégration des relations de comparaisons cas divergent, on obtient :

$$\int_1^R \left|f(x)\right|^2+\left|f(-x)\right|^2 dx \underset{R\to+\infty}{\sim} \ell\int_1^R \frac{dx}{x} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Ce qui contredit l'hypothèse $f\in L^2(\mathbb{R})$, ainsi $\ell=0$ et on obtient donc :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\left|f(x)\right|^2 dx\int_{\mathbb{R}} \xi^2\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \geq 2\pi\frac{\|f\|_2^4}{4}$$

<u>Dans le cas général où $f\in L^2(\mathbb{R})$ :</u>

L'objectif est de trouver $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tel que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ et $f_n' \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f^*$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Par hypothèses $\hat{f},g\in L^2(\mathbb{R})$ donc $\xi\longmapsto\sqrt{1+\xi^2}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R})$, ainsi par densité de $S(\mathbb{R})$, il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi)^2\left|\frac{g_n(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}-\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi=0 \tag{11}$$

Comme $g_n\in\mathbb{S}(\mathbb{R})$, il est facile de voir que $\xi\longmapsto\frac{g_n(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}\in\mathbb{S}(\mathbb{R})$. De plus $\mathscr{F}$ étant une bijection de $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S}(\mathbb{R})$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall\xi\in\mathbb{R}, \hat{f}_n(\xi)=\frac{g_n(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

Et en développant (11) on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\hat{f}_n(\xi)-\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi+\int_{\mathbb{R}}\left|\xi\hat{f}_n(\xi)-\xi\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi=0$$

En particulier, $\|\hat{f}_n-\hat{f}\|_2^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\|\xi\hat{f}_n(\xi)-\xi\hat{f}(\xi)\|_2^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or par le théorème de Perceval, linéarité de $\mathscr{F}$ et comme $f_n\in\mathbb{S}(\mathbb{R})$ on obtient que :

$$\|f_n-f\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\|\hat{f}_n-\hat{f}\|_2^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{12}$$

et

$$\left\|f_n'-f^*\right\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\left\|\widehat{f_n'}-\widehat{f^*}\right\|_2^2=\left\|i\xi\hat{f}_n(\xi)-i\xi\hat{f}(\xi)\right\|_2^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{13}$$

On a donc obtenu la suite voulu, maintenant montrons que :

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^R x(f_n\overline{f_n'}+f_n'\overline{f_n})(x)dx=\int_{\mathbb{R}} x(f\overline{f^*}+f^*\overline{f})(x)dx$$

Pour commencer on montre une convergence presque sûre de $f_n$ vers f :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f_n}(\xi)-\widehat{f}(\xi)\right|d\xi&=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\xi^2}}\left|\widehat{f_n}(\xi)-\widehat{f}(\xi)\right|d\xi\\ &\leq\left(\int_R\frac{d\xi}{(1+\xi^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}(1+\xi)^2\left|\widehat{f_n}(\xi)-\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{par (11)}\end{aligned}$$

On obtient que $\widehat{f_n}-\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$, et par la formule d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$, on a pour presque tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\widehat{f_n}(\xi)-\widehat{f}(\xi)\right)e^{ix\xi}d\xi$$

ainsi,

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|\leq\left\|\widehat{f_n}-\widehat{f}\right\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus pour $R > 0$,

$$\left|\int_{-R}^{R} x\left(f_n'\overline{f_n} - f^*\overline{f}\right)(x)dx\right| \le R\left(\int_{-R}^{R}\left|f_n'\right|\left|\overline{f_n} - \overline{f}\right|dx + \int_{-R}^{R}\left|\overline{f}\right|\left|f_n' - f^*\right|dx\right)$$
$$\le R\left(\left\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\right\|_1 \int_{-R}^{R}\left|f_n'\right|dx + \left(\int_{-R}^{R}\left|\overline{f}\right|^2 dx\right)^{1/2}\left\|f_n' - f^*\right\|_2\right)$$

Or, grâce à (13)

$$\left(\int_{-R}^{R}\left|\overline{f}\right|^2 dx\right)^{1/2}\left\|f_n' - f^*\right\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et pour l'autre terme dans la somme on a,

$$\left\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\right\|_1 \int_{-R}^{R}\left|f_n'\right|dx \le \left\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\right\|_1 \int_{-R}^{R}\left|f_n' - f^*\right|dx + \left\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\right\|_1 \int_{-R}^{R}\left|f^*\right|dx$$
$$\le \left\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\right\|_1 \sqrt{2R}\left\|f_n' - f^*\right\|_2 + \left\|\widehat{f_n} - \widehat{f}\right\|_1 \int_{-R}^{R}\left|f^*\right|dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} x f_n'(x)\overline{f_n}(x)dx = \int_{-R}^{R} x f^*(x)\overline{f}(x)dx$$

En passant au conjugué,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} x\overline{f_n'(x)}f_n(x)dx = \int_{-R}^{R} x\overline{f^*(x)}f(x)dx$$

or on sait que $\int_{\mathbb{R}} x(f\overline{f^*} + f^*\overline{f})(x)dx < +\infty$ par (10), on peut donc conclure que :

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} x(f_n\overline{f_n'} + f_n'\overline{f_n})(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x(f\overline{f^*} + f^*\overline{f})(x)dx$$

De plus comme $f_n \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$ on peut raisonner comme dans le cas 1, car on a $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ presque partout et $\|f_n\|_2^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_2^2$ par (12). Ainsi,

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} x(f_n\overline{f_n'} + f_n'\overline{f_n})(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_{-R}^{R} x\left(|f_n|^2\right)'(x)dx$$
$$= \lim_{R\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\left[x\left|f_n(x)\right|^2\right]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R}\left|f_n(x)\right|^2 dx$$
$$= \lim_{R\to+\infty} R\left(\left|f(R)\right|^2 + \left|f(-R)\right|^2\right) - \|f\|_2^2$$

De la même manière que dans le premier cas on montre que :

$$\lim_{R\to+\infty} R\left(\left|f(R)\right|^2 + \left|f(-R)\right|^2\right) = 0$$

Et on conclut donc que :

$$\int_{\mathbb{R}} x(f\overline{f^*} + f^*\overline{f})(x)dx = -\|f\|_2^2$$

avec (10) on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\left|f(x)\right|^2 dx \int_{\mathbb{R}} \xi^2\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \ge 2\pi\frac{\|f\|_2^4}{4}$$

Dans le cas $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, on fait un changement de variable et on utilise la relation :

$$\left(\widehat{f(.-a)e^{ib.}}\right)(\xi) = e^{-ia(\xi-b)}\hat{f}(\xi-b)$$

□

### 3.2 Application à la physique

Cette inégalité est surtout utile en mécanique quantique, dans ce cadre elle s'énonce de la façon suivante :

$$\Delta X \, \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$$

où $\Delta X$ correspond à l'incertitude sur la mesure de la position et $\Delta P$ de la quantité de mouvement d'une particule quantique.

A chaque particule est associée une fonction d'onde $\Psi$ qui dépend de l'espace et du temps et qui correspond à une amplitude de probabilité. La position de la particule $X(t)$ est une variable aléatoire qui a pour fonction de densité $|\Psi(.,t)|^2$. Ainsi $\Psi(.,t) \in L^2(\mathbb{R})$ et elle est normalisé donc $\|\Psi(.,t)\|_2 = 1$.

De plus la physique nous permet de définir une autre amplitude de probabilité $\Phi$ qui n'est autre que la transformée de Fourier normalisé de $\Psi$ :

$$\Phi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} \Psi(x,t) e^{-\frac{i}{\hbar}xp} dx$$

$\Phi$ est alors l'amplitude de probabilité liée à la quantité de mouvement de la particule, $P$.

Ces variables aléatoires, donne la probabilité d'une mesure de la position et de la vitesse de la particule. Leurs moyennes sont donc les valeurs les plus probables qui vont être mesurées et l'écart-type l'erreur attendues lors de ces mesures. Or les écarts-types des variables aléatoires $X$ et $P$ sont définies par :

$$\Delta X = \left( \int_{\mathbb{R}} (x^2 - <X>) \, |\Psi(x,t)|^2 \, dx \right)^{1/2} \text{ et } \Delta P = \left( \int_{\mathbb{R}} (p^2 - <P>) \left| \Phi(p,t) \right|^2 dp \right)^{1/2}$$

Ainsi par l'inégalité de Heisenberg :

$$(\Delta X)^2 (\Delta P)^2 = \frac{\hbar}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (x^2 - <X>) \, |\Psi(x,t)|^2 \, dx \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{p^2}{\hbar^2} - <P> \right) \left| \widehat{\Psi}\left( \frac{p}{\hbar}, t \right) \right|^2 dp \geq \hbar^2 \frac{\|\Psi(.,t)\|_2^4}{4} = \frac{\hbar^2}{4}$$

On obtient donc le résultat voulu :

$$\Delta X \, \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$$

Et ce résultat montre bien l'impossibilité de mesurer précisément à la fois la vitesse et la position d'une particule quantique.

Plus généralement en physique ce genre d'inégalité apparaît lorsque l'on utilise la transformée de Fourier et notamment dans l'étude des signaux. Pour avoir plus de détails sur la signification physique de l'inégalités de Heisenberg voire [3].

# 4 Théorème de Logvinenko-Sereda

Dans cette section, nous allons énoncer le Théorème de Logvinenko-Sereda, qui établit un autre type de princioe d'incertitude. Les trois premières sous-sections introduisent les notions qui interviennent dans l'énoncé et la preuve du théorème.

## 4.1 Mesure de Poisson et opérateur $\mathscr{P}$

L'intérêt de cette mesure est de pouvoir caractériser les ensembles épais, qui seront introduits dans la section 4.2, en dimension 1. Ce que nous montrerons avec la propositions 4.4. Mais tout d'abord montrons les résultats importants liées à cette mesure et cette opérateur.

**Definition 4.1.** *Mesure de Poisson*
*Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit une mesure de probabilités sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (classe des boréliens de $\mathbb{R}$) par :*

$$\forall S \subseteq \mathscr{B}(\mathbb{R}), \Pi_x(S) = \int_S \frac{1}{\pi} \frac{dt}{1+(x-t)^2}.$$

*Démonstration.* $\Pi_x$ est clairement une mesure sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, de plus pour $x \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{dt}{1+(t-x)^2} = \left[\frac{1}{\pi} \arctan(t-x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

□

Cette mesure nous permet de définir l'opérateur $\mathscr{P}$.

**Definition 4.2.** *Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définit la fonction $\mathscr{P}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ par,*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathscr{P}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{f(t)}{1+(t-x)^2} dt$$

.

**Remarque 7.** *En posant $d_\Pi : x \longmapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a que : $\mathscr{P}(f) = f * d_\Pi$. La définition du produit de convolution dans $L^2(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ dans la sous-partie 1.3, nous permet d'affirmer que :*

- *$\mathscr{P}(f)$ est bien défini que $\mathscr{P}(f) \in L^2(\mathbb{R})$*
- *L'opérateur $\mathscr{P}$ est continue car linéaire et pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\left\|\mathscr{P}(f)\right\|_2 \leq \left\|f\right\|_2 \|d_\Pi\|_1$*

On peut maintenant étudier la transformée de Fourier de $\mathscr{P}(f)$.

**Proposition 4.1.** *Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ on a que :*

$$\widehat{\mathscr{P}(f)}(\xi) = e^{-|\xi|}\hat{f}(\xi)$$

*Démonstration.* Tout d'abord nous allons calculer la transformée de Fourier de $d_\Pi$.
Pour ça on va utiliser la formule d'inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ car on a en posant $g : x \longmapsto e^{-|x|}$, on a pour $\xi \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi-|t|} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-(i\xi+1)t} dt + \int_{\mathbb{R}^-} e^{-(i\xi-1)t} dt \\
&= \left[-\frac{e^{-(i\xi+1)t}}{i\xi+1}\right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{e^{-(i\xi-1)t}}{i\xi-1}\right]_{-\infty}^0 \\
&= \frac{1}{i\xi+1} - \frac{1}{i\xi-1} \\
&= \frac{2}{1+\xi^2} \\
&= 2\pi d_\Pi(\xi)
\end{aligned}$$

Par la formule d'inversion, comme $d_\Pi \in L^1(\mathbb{R})$, on a dans presque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} d_\Pi(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

Or $d_\Pi$ et $g$ sont à valeur réel, donc en passant au conjugué,

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} d_\Pi(\xi) e^{-ix\xi} d\xi = \hat{d}_\Pi(x)$$

Montrons maintenant le résultat suivant $\widehat{\mathscr{P}(f)} = \hat{d}_\Pi \hat{f}$.

Si $f \in \mathbb{S}(\mathbb{R})$, alors $f \in L^1(\mathbb{R})$, le résultat à donc été montré dans la sous-partie 1.3.
Sinon par densité de $\mathbb{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{S}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ tel que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \widehat{\mathscr{P}(f_n)} = \hat{d}_\Pi \hat{f}_n \tag{14}$$

Or par continuité de $\mathscr{P}$ et de la transformée de Fourier,

$$\widehat{\mathscr{P}(f_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \widehat{\mathscr{P}(f)}$$

dans $L^2(\mathbb{R})$. Pour l'autre membre de l'égalité on a que,

$$\left\| \hat{d}_\Pi \hat{f}_n - \hat{d}_\Pi \hat{f} \right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-|\xi|} \hat{f}_n(\xi) - e^{-|\xi|} \hat{f}(\xi) \right| d\xi \leq \left\| \hat{f}_n - \hat{f} \right\|_2^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi par passage à la limite dans 4.1, on a l'égalité voulu dans $L^2(\mathbb{R})$. □

On peut maintenant obtenir une majoration de la norme de $f$ par celle de $\mathscr{P}$.

**Proposition 4.2.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $supp\hat{f} \subset [-\ell, \ell]$ alors :*

$$\|f\|_2 \leq e^{\ell} \|\mathscr{P}(f)\|_2$$

*Démonstration.* On sait que :

$$\hat{f}(\xi) = e^{|\xi|} \widehat{\mathscr{P}(f)}(\xi)$$

Or $supp\hat{f} \subset [-\ell, \ell]$, ainsi pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ : $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq e^{l} \left|\widehat{\mathscr{P}(f)}(\xi)\right|$
donc

$$\|\hat{f}\|_2^2 \leq e^{2\ell} \left\|\widehat{\mathscr{P}(f)}\right\|_2^2$$

Par Plancherel-Perseval

$$\|f\|_2^2 \leq e^{2\ell} \|\mathscr{P}(f)\|_2^2$$

d'où le résultat. □

L'objectif maintenant est d'obtenir une majoration de $\|\mathscr{P}(f)\|_2$. Pour cela, on va utiliser l'inégalité de Jensen, donné par le théorème suivant.

**Théorème 4.1.** ***Inégalités de Jensen***
*Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $supp\hat{f} \subset \mathbb{R}^+$, alors :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(\left|\mathscr{P}(f)(x)\right|\right) \leq \mathscr{P}\left(\ln|f|\right)(x).$$

*Démonstration.* Nous ne détaillerons pas la preuve ici, mais celle-ci utilise les polynômes trigonométriques et les distributions tempérées (le dual topologique de $\mathbb{S}(\mathbb{R})$) et elle se trouve dans [4]. □

Il ne nous manque plus qu'un lemme pour pouvoir avoir notre majoration.

**Lemme 7.** *Soit S mesurable et* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *tel que* $f > 0$*, on a :*

$$\int_S f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_S f d\Pi_x \right) dx.$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathscr{P}(\mathbb{1}_S f)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_S f d\Pi_x dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_S f(t) d_{\Pi}(t-x) dt dx \\
&= \int_S f(t) \int_{\mathbb{R}} d_{\Pi}(t-x) dx dt && \text{par Fubini-Tonelli, cas positif} \\
&= \int_S f(t) dt && \text{l'intégrale étant calculée dans la définition 4.1}
\end{aligned}$$

□

Ainsi on obtient cette majoration pour la norme de $\mathscr{P}(f)$.

**Proposition 4.3.** *Soit S mesurable, et* $1 > \gamma > 0$ *tel que* $\inf\{\Pi_x(S), x \in \mathbb{R}\} \geq \gamma$*, alors soit* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *tel que* $supp \hat{f} \subset \mathbb{R}^+$ *alors on a,*

$$\|\mathscr{P}(f)\|_2^2 \leq 2 \left( \int_S |f(x)|^2 dx \right)^{\gamma} \|f\|_2^{2(1-\gamma)}.$$

*Démonstration.* On pose $S' = \mathbb{R} \setminus S$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit les mesures $\Gamma_x$ et $\Gamma'_x$ par, soit $A$ mesurable :

$$\Gamma_x = \frac{\Pi_x(A \cap S)}{\Pi_x(S)} \text{ et } \Gamma'_x == \frac{\Pi_x(A \cap S')}{\Pi_x(S')}$$

Elles sont bien définies car $\Pi_x(S) \geq \gamma > 0$ et si $\Pi_x(S') = 0$ le résultat est évident.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $supp \hat{f} \subset \mathbb{R}^+$ alors par 4.1,

$$\begin{aligned}
2\ln\left(|\mathscr{P}(f)(x)|\right) &\leq \int_S \ln|f|^2 d\Pi_x + \int_{S'} \ln|f|^2 d\Pi_x \\
&= \Pi_x(S) \int_S \ln|f|^2 d\Gamma_x + \Pi_x(S') \int_{S'} \ln|f|^2 d\Gamma'_x \\
&\leq \Pi_x(S) \ln\left( \int_S |f|^2 d\Gamma_x \right) + \Pi_x(S') \ln\left( \int_{S'} |f|^2 d\Gamma'_x \right) \quad \text{par concavité du ln} \\
&= \Pi_x(S) \ln\left( \frac{1}{\Pi_x(S)} \right) + \Pi_x(S') \ln\left( \frac{1}{\Pi_x(S')} \right) + \Pi_x(S) \ln\left( \int_S |f|^2 d\Pi_x \right) + \Pi_x(S') \ln\left( \int_{S'} |f|^2 d\Pi'_x \right)
\end{aligned}$$

Or par concavité de ln, on a : $\Pi_x(S) \ln\left(\frac{1}{\Pi_x(S)}\right) + \Pi_x(S') \ln\left(\frac{1}{\Pi_x(S')}\right) \leq \ln 2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
2\ln\left(|\mathscr{P}(f)(x)|\right) &\leq \ln 2 + \gamma \ln\left( \int_S |f|^2 d\Pi_x \right) + (\Pi_x(S) - \gamma) \ln\left( \int_S |f|^2 d\Pi_x \right) + \Pi_x(S') \ln\left( \int_{S'} |f|^2 d\Pi'_x \right) \\
&\leq \ln 2 + \gamma \ln\left( \int_S |f|^2 d\Pi_x \right) + (\Pi_x(S) + \Pi_x(S') - \gamma) \ln\left( \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\Pi_x \right) \\
&\leq \ln 2 + \gamma \ln\left( \int_S |f|^2 d\Pi_x \right) + (1-\gamma) \ln\left( \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\Pi_x \right)
\end{aligned}$$

Par croissance de l'exponentielle,

$$\left|\mathscr{P}(f)(x)\right|^2 \leq 2\left(\int_S |f|^2\, d\Pi_x\right)^{\gamma}\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\Pi_x\right)^{1-\gamma}$$

On intègre par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{P}(f)\|_2^2 &\leq 2\int_{\mathbb{R}}\left(\int_S |f|^2\, d\Pi_x\right)^{\gamma}\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\Pi_x\right)^{1-\gamma} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_S |f|^2\, d\Pi_x\right)^{\frac{\gamma}{\gamma}} dx\right)^{\gamma}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\Pi_x\right)^{\frac{1-\gamma}{1-\gamma}} dx\right)^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

par l'inégalités de Hölder avec $p = \frac{1}{\gamma}$ et $q = \frac{1}{1-\gamma}$.
Puis par le lemme 7,

$$\|\mathscr{P}(f)\|_2^2 \leq 2\left(\int_S |f(x)|^2\, dx\right)^{\gamma}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\right)^{1-\gamma}$$

D'où le résultat. □

## 4.2 Ensembles épais

Dans cette sous-section, nous introduisons la notion d'épaisseur, qui est une condition centrale dans le Théorème de Logvinenko-Sereda.
Dans ce paragraphe on notera $|S|$ la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable.

**Definition 4.3.** *Ensemble épais*
*Soit $S \subset \mathbb{R}^d$ mesurable, $S$ est un ensemble épais si il existe $K$ un cube de $\mathbb{R}^d$ et $\gamma > 0$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, |S \cap (K + x)| \geq \gamma$$

En dimension $d = 1$, on peut donner une caractérisation de ces ensembles grâce à la mesure de Poisson avec cette proposition.

**Proposition 4.4.** *Soit $S$ une partie mesurable de $\mathbb{R}$, on a l'équivalence :*

$$S \textit{ est un ensemble épais} \iff \inf\{\Pi_x(S), x \in \mathbb{R}\} > 0.$$

*Démonstration.* <u>Sens direct :</u>
On suppose que $S$ est un ensemble épais et on pose $K = [-L, L]$.
Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Pi_x(S) &= \int_{S\cap(K+x)} d\Pi_x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x-L}^{x+L} \mathbb{1}_S(t)\frac{dt}{1+(t-x)^2} \\
&\frac{1}{\pi(1+L^2)}\int_{x-L}^{x+L} \mathbb{1}_S(t)dt \\
&\geq \frac{|S\cap(K+x)|}{\pi(1+L^2)} \\
&\geq \frac{\gamma}{\pi(1+L^2)}
\end{aligned}$$

<u>Sens indirect :</u>
On suppose qu'il existe $\sigma > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \Pi_x(S) \geq \sigma$.

Soit $L \in \mathbb{R}$, on pose $K = [-L, L]$, et pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $a(x) = |S \cap (K+x)|$ alors on a une partition de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} = (K+x) \bigcup \left( \bigcup_{i=0}^{+\infty} \left[ x + 2^i L, x + 2^{i+1} L \right] \right) \bigcup \left( \bigcup_{i=0}^{+\infty} \left[ x - 2^{i+1} L, x - 2^i L \right] \right)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\pi\sigma &\leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_S(t) \frac{dt}{1+(t-x)^2} \\
&\leq \int_{K+x} \mathbb{1}_S(t) \frac{dt}{1+(t-x)^2} + \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{[x+2^i L, x+2^{i+1} L]} \mathbb{1}_S(t) \frac{dt}{1+(t-x)^2} \\
&+ \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{[x-2^{i+1} L, x-2^i L]} \mathbb{1}_S(t) \frac{dt}{1+(t-x)^2}
\end{aligned}$$

Par changement de variable,

$$\begin{aligned}
\pi\sigma &\leq a(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{[2^i L, 2^{i+1} L]} \mathbb{1}_S(y+x) \frac{dy}{1+y^2} + \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{[-2^{i+1} L, -2^i L]} \mathbb{1}_S(y+x) \frac{dy}{1+(y)^2} \\
&\leq a(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-2i} L^{-2} \int_{[2^i L, 2^{i+1} L]} \mathbb{1}_S(y+x) dy + \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-2i} L^{-2} \int_{[-2^{i+1} L, -2^i L]} \mathbb{1}_S(y+x) dy \\
&\leq a(x) + 2 \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-2i} L^{-2} 2^i L \\
&\leq a(x) + \frac{8}{L}
\end{aligned}$$

donc $a(x) \geq \pi\sigma - \frac{8}{L}$, ainsi pour $L$ assez grand, on aura pour tout $x \in R$,

$$|S \cap (K+x)| = a(x) \geq \frac{\pi\sigma}{2}$$

$S$ est donc un ensemble épais. □

## 4.3 Paires annulantes

Cette sous-section, vise à présenter la notion de paires annulantes qui est une manifestation des principes d'incertitude.

**Definition 4.4.** *(Paire annulante)*
*Soient $S, \Sigma \subseteq \mathbb{R}^d$ des sous sous-ensembles mesurables.*

1. *$(S, \Sigma)$ est une paire faiblement annulante si :*
   *Si pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $supp(f) \subset S$ et $supp(\hat{f}) \subset \Sigma$ alors $f = 0$*
2. *$(S, \Sigma)$ est une paire fortement annulante si :*
   *Il existe $C = C(S, \Sigma) > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^d \setminus S} |f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma} |\hat{f}(x)|^2 dx \right)$$

**Remarque 8.** — *Toute paire fortement annulante est faiblement annulante.*
— *Les paires annulantes nous permettent de caractériser la concentrations de $f$ et de sa transformée de Fourier. Pour les paires fortement annulantes si $f$ se concentre sur $S$ et $\hat{f}$ sur $\Sigma$ alors $f$ sera nécessairement petit. Leur caractérisation revient donc à un principe d'incertitude.*

On peut donner un exemple de paire faiblement annulante en dimension 1, ceci nous donnera un autre théorème d'incertitude.

**Théorème 4.2.** *Soit $S$ et $\Sigma$ des parties mesurables et bornées, alors $(S, \Sigma)$ est une paire faiblement annulante.*

*Démonstration.* Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $supp(f) \subset S \subset [-M, M]$ et $supp(\hat{f}) \subset \Sigma$. Comme $supp f \subset S$ borné, $f \in L^1(\mathbb{R})$, de même pour $\hat{f}$. On utilise la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi) = \int_S f(t) e^{-it\xi} dt$$

On pose $B = \{z \in \mathbb{C}; |\mathfrak{Im}(z)| < 1\}$ et on définit sur $B$, $h : z \longmapsto \int_S f(t) e^{-izt} dt$, on a :
- $\forall t \in S, z \longmapsto f(t) e^{-izt}$ est holomorphe sur $B$.
- $\forall z \in B,\ \forall t \in S \subset [-M, M], \left|f(t)e^{-izt}\right| = \left|f(t)\right| e^{\mathfrak{Im}(z)t} \leq \left|f(t)\right| e^{|\mathfrak{Im}(z)|M} \leq \left|f(t)\right| e^M$ or $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Ainsi par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, h est bien défini et holomorphe sur $B$. Or $h(\mathbb{R} \setminus S) = 0$ et $B$ est connexe donc par le principe des zéros isolés $h = 0$ ainsi $\hat{f} = 0$ donc par injectivité de la transformée de Fourier, $f = 0$. □

Pour étudier la caractérisation des paires fortement annulantes, la proposition suivante établit une caractérisation plus simple de ces paires une définition équivalente plus simple des ces paires.

**Proposition 4.5.** *Caractérisation des paires fortement annulantes*
*Soient $S, \Sigma \subseteq \mathbb{R}^d$ des sous-ensembles mesurables, $(S, \Sigma)$ est une paire fortement annulante si et seulement si il existe $D = D(S, \Sigma) > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $supp(\hat{f}) \subseteq \Sigma$,*

$$\|f\|_2 \leq D \left\|f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}\right\|_2.$$

*Démonstration.* Le sens direct est évident, montrons le sens indirect.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \left\|f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}\right\|_2^2 + \|f \mathbb{1}_S\|_2^2 \\ &= \left\|f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}\right\|_2^2 + \frac{1}{(2\pi)^d} \left\|\widehat{f \mathbb{1}_S}\right\|_2^2,\end{aligned}$$

D'après la formule de Plancherel-Parseval. Or par linéarité de la transformée de Fourier, $\widehat{f \mathbb{1}_S} = \hat{f} - \widehat{f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}}$ et en utilisant l'identité

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d} \left\|\widehat{f \mathbb{1}_S}\right\|_2^2 &\leq \frac{2}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_2^2 + \frac{2}{(2\pi)^d} \left\|\widehat{f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}}\right\|_2^2 \\ &\leq \frac{2}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_2^2 + 2 \left\|f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}\right\|_2^2\end{aligned}$$

grâce à la formule de Plancherel-Parseval.
Ainsi :

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &\leq 3 \left\|f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}\right\|_2^2 + \frac{2}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_2^2 \\ &\leq 3 \left\|f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}\right\|_2^2 + \frac{2}{(2\pi)^d} \|\hat{f} \mathbb{1}_\Sigma\|_2^2 + \frac{2}{(2\pi)^d} \left\|\hat{f} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma}\right\|_2^2\end{aligned}$$

On applique l'hypothèse à $\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\mathbb{1}_\Sigma)$ on a donc :

$$\left\|\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\mathbb{1}_\Sigma)\right\|_2 \leq D\left\|\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\mathbb{1}_\Sigma)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus S}\right\|_2$$

Et en appliquant encore le théorème de Plancherel-Parseval :

$$\frac{2}{(2\pi)^d}\left\|\hat{f}\mathbb{1}_\Sigma\right\|_2^2 \leq \frac{2}{(2\pi)^d}D^2\left\|\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\mathbb{1}_\Sigma)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus S}\right\|_2^2$$

On utilise encore que $\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\mathbb{1}_\Sigma) = f - \mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\Sigma})$, ainsi :

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\mathbb{1}_\Sigma)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus S}\right\| &\leq 2\left\|f\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus S}\right\|_2^2 + 2\left\|\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\Sigma})\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus S}\right\|_2^2\\ &\leq 2\left\|f\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus S}\right\|_2^2 + 2\left\|\mathscr{F}^{-1}(\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\Sigma})\right\|_2^2\\ &\leq 2\left\|f\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus S}\right\|_2^2 + \frac{2}{(2\pi)^d}\left\|\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\Sigma}\right\|_2^2,\end{aligned}$$

en utilisant une nouvelle fois la formule de Plancherel-Parseval.
On obtient donc :

$$\|f\|_2^2 \leq \left(3 + \frac{4D^2}{(2\pi)^d}\right)\left\|f\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus S}\right\|_2^2 + \left(\frac{2}{(2\pi)^d} + \frac{4D^2}{(2\pi)^{2d}}\right)\left\|\hat{f}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d\setminus\Sigma}\right\|_2^2$$

Ainsi il suffit de prendre $C(S,\Sigma) = \max\left(3 + \frac{4D^2}{(2\pi)^d}, \frac{2}{(2\pi)^d} + \frac{4D^2}{(2\pi)^{2d}}\right)$, et on a que $(S,\Sigma)$ est une paire fortement annulante. □

**Remarque 9.** *Cette caractérisation nous permet de montrer que si $\Sigma$ est de mesure nul, alors pour toute partie mesurable $S$, $(S,\Sigma)$ est une paire fortement annulante.*

## 4.4 Théorème de Logvinenko-Sereda

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de Logvinenko-Sereda qui donne une description complète des ensembles mesurables formant une paire fortement annulante avec un ensemble mesurable borné.

**Théorème 4.3.** ***Logvinenko-Sereda***
*Soit $S \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble mesurable et $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble mesurable, borné de mesure non nul, alors on a l'équivalence :*

$$(\mathbb{R}^d \setminus S, \Sigma) \text{ est une paire fortement annulante} \iff S \text{ est un ensemble épais.}$$

**Remarque 10.** *La caractérisation ne dépend pas de l'ensemble $\Sigma$, ainsi si il existe un sous-ensemble mesurable borné $\Sigma$ tel que $(S,\Sigma)$ soit une paire fortement annulante alors pour tout ensemble $\Sigma$ bornée, $(s,\Sigma)$ est une paire fortement annulante.*

*Démonstration.* Sens direct :
Si $\Sigma$ est de mesure nul Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $supp\hat{f} \subset \Sigma$ et $\|f\|_2 = 1$. Une telle fonction existe car il suffit de prendre $f = \frac{1}{|\Sigma|}\mathscr{F}^{-1}(\mathbb{1}_\Sigma)$ ($\Sigma$ borné).
On peut donc définir pour $\delta > 0$ : $\omega_f(\delta) = \sup\left\{\int_E |f(x)|^2\, dx \mid E \text{ mesurable et } |E| \leq \delta\right\}$.

Montrons que $\omega_f(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, par densité de $C_c^\infty$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ il existe $g \in C_c^\infty$ tel que $\|f-g\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

De plus $g \in C_c^\infty$, ainsi il existe $M > 0$ tel que $g(\mathbb{R}) \subset [-M, M]$, donc pour $\delta > 0$ et $E$ un sous-ensemble mesurable tel que $|E| < \delta$ :

$$\int_E |g(x)|^2\, dx \leq \delta M^2 \underset{\delta \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$\omega_g(\delta) \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \delta \leq \delta_0$, $\omega_g(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}$.
Donc pour $0 < \delta \leq \delta_0$, soit $E$ mesurable tel que $|E| \leq \delta$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^2\, dx &= \int_E |f(x) - g(x) + g(x)|^2\, dx \\
&\leq 2\int_E |f(x) - g(x)|^2\, dx + 2\int_{K(\delta)} |g(x)|^2\, dx \qquad \text{car } \forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \\
&\leq 2\,\|f - g\|_2^2 + 2\omega_g(\delta) \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

donc $\omega_f(\delta) \leq \varepsilon$.

Soit $h \in \mathbb{R}^d$, on pose : $f_h(x) = f(x-h) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ Alors soit $\delta < 0$ et $E$ mesurable tel que $|E| \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
\int_E |f_h(x)|^2\, dx &= \int_{E-h} |f(x)|^2\, dx \qquad \text{car } |E - h| = |E| \\
&\leq \omega_f(|E|)
\end{aligned}$$

Par hypothèse $(\mathbb{R}^d \setminus S, \Sigma)$ est une paire fortement annulante donc,

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\, dx \leq D\int_S |f(x)|^2\, dx \text{ où } D \text{ est la constante de la proposition 4.5} \tag{15}$$

En notant $K(\ell) = [-\ell, \ell]^d$, comme $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a que :

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus K(\ell)} |f(x)|^2\, dx \underset{\ell \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc on peut trouver un cube K tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus K} |f(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{2D}$$

de plus :

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus (K+h)} |f_h(x)|^2\, dx = \int_{(\mathbb{R}^d \setminus K)+h} |f_h(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^d \setminus K} |f(x)|^2\, dx \leq \frac{1}{2D} \tag{16}$$

Or pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\hat{f}_h(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{ih\xi}$ donc $supp \hat{f}_h \subset \Sigma$, ainsi par (15) :

$$\begin{aligned}
1 &\leq D\int_S |f_h(x)|^2\, dx \\
&\leq D\left(\int_{S\cap(K+h)} |f_h(x)|^2\, dx + \int_{S\cap(\mathbb{R}^d \setminus (K+h))} |f_h(x)|^2\, dx\right) \\
&\leq D\left(\omega_f(|S \cap (K+h)|) + \frac{1}{2D}\right) \qquad \text{par (16)}
\end{aligned}$$

donc pour $h \in \mathbb{R}^d, \omega_f(|S \cap (K+h)|) \geq \frac{1}{2D}$.
Ainsi il existe $\delta(f, S, \Sigma) > 0$, tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, $|S \cap (K+h)| \geq \delta(f, S, \Sigma)$. Donc $S$ est un ensemble épais.

Sens indirect : Pour ce sens on va utiliser la mesure de Poisson et l'opérateur $\mathscr{P}$, on va donc faire la preuve pour $d = 1$.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $supp \hat{f} \subset K \subset ]0, L]$, on a par la proposition 4.2,

$$\|f\|_2 \leq e^L \|\mathscr{P}(f)\|_2$$

Puis on utilise la proposition 4.4, ainsi il existe $\sigma > 0$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \Pi_x(S) \geq \sigma$, sans perte de généralité on peut supposer que $\sigma < 1$ et grâce à la proposition 4.3,

$$\|\mathscr{P}(f)\|_2^2 \leq 2 \left( \int_S |f(x)|^2 \, dx \right)^{\sigma} \|f\|_2^{2(1-\sigma)}$$

Ainsi,

$$\|f\|_2^2 \leq 2e^{2L} \left( \int_S |f|^2 \right)^{\sigma} \|f\|_2^{2(1-\sigma)}$$

donc

$$\|f\|_2^2 \leq \left(2e^{2L}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \int_S |f(x)|^2 \, dx$$

Si $supp \hat{f} \subset K \subset [-L, L]$, on applique le résultat à la fonction $\phi : x \longmapsto f(x)e^{-i(L+1)x}$ car $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ et $supp\, \hat{\phi} \subset [1, 2L+1]$. De plus $|f(x)|^2 = |\phi(x)|^2$, on a donc le résultat souhaité pour $f$.
Ainsi $(\mathbb{R}^d \setminus S, \Sigma)$ est une paire fortement annulante et on a $D(\mathbb{R} \setminus S, \Sigma) = \left(2e^{2L}\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$. □

La constante que l'on trouve dans la preuve à été améliorée par Kovrijkine dans cette article [5] en 2015 mais la preuve utilisé n'utilise pas les mêmes concepts.

# Références

[1] H. M. K. Harry Dym, “Séries et intégrales de fourier,” 1972.

[2] A. S. Gerald B. Folland, “The uncertainty principle : A mathematical survey,” The Journal of Fourier Analysis and Applications, 1997.

[3] C. Aslangul, Mécanique quantique 1, Fondements et premières applications. deboeck supérieur, 2018.

[4] B. J. Victor Havin, The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis. Springer-Verlag, 1991.

[5] O. Kovrijkine, “Some results related to the logvinenko-sereda theorem,” 2015.