Fonctions holomorphes

Thomas Harbreteau

13 avril 2020

Notes du cours de Anna Lenzhen.
Université de Rennes 1, année 2019/2020.

Sommaire

Chapitre 1

Dérivabilité complexe

1 Définition de la dérivabilité des fonctions d'une variable complexe

Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$.

Définition 1.1.1 (Limite) *Soit $f : D \to C$ et $c \in \overline{D}$. On dit que f admet $A \in \mathbf{C}$ pour limite en c et on écrit $\lim_{(z\to c)} f(z) = A$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall z \in D, \quad |z - c| < \delta \implies |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.2 (Fonction C-dérivable) *On dit que $f : D \to C$ est $\mathbf{C}$-dérivable en $c \in D$ si la quantité*

$$\lim_{z\to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}$$

existe. On la note alors $f'(c)$.

Exemple 1.1.3

1. Les fonctions constantes sont dérivables sur $\mathbf{C}$.
2. La fonction $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $f(z) := \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point. En effet, soit $z \in \mathbf{C}$,

$$\frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \frac{\bar{z} - \bar{c}}{z - c} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z - c \in \mathbf{R} \\ -1 & \text{si} \quad z - c \in \mathrm{i}\mathbf{R} \end{cases}.$$

   Ainsi, la quantité $(f(z) - f(c))/(z - c)$ n'admet pas de limite quand $[z \to c]$.
3. Les fonctions $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|$ ne sont dérivables en aucun point de $\mathbf{C}$.
4. Soient la fonction $f : z \in \mathbf{C} \mapsto z^m$, où $m \in \mathbf{N}^*$, $c \in \mathbf{C}$, $z := c + h$, alors

$$\frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \frac{(c+h)^m - c^m}{h} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} h^k c^{m-k} - c^m}{h} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} h^{k-1} c^{m-k}.$$

   Ainsi,

$$\lim_{z\to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} h^{k-1} c^{m-k} = mc^{m-1},$$

   donc f est dérivable sur $\mathbf{C}$ et pour tout $z \in \mathbf{C}$, $f'(z) = mz^{m-1}$.

Théorème 1.1.4 *Soit $f : D \to \mathbf{C}$. Si f est dérivable en $c \in D$, alors f est continue en c.*

Preuve. Exercice. □

Notation :

1. $f : D \to \mathbf{C}$, on pose $u := \Re(f)$ et $v := \Im(f)$. Alors $f = u + \mathrm{i}v$.
2. On identifiera parfois $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C}$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

2 Équations de Cauchy-Riemann

Soit $c = a + ib \in \mathbf{C}$. Si $f : D \to \mathbf{C}$ est dérivable en c, alors

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+\mathrm{i}h) - f(c)}{\mathrm{i}h}.$$

En effet, si $h \in \mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(c+h) - \mathrm{i}v(c+h) - u(c) - \mathrm{i}v(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(c+h) - u(c) + \mathrm{i}[v(c+h) - v(c)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(c+h) - u(c)}{h} + \mathrm{i} \lim_{h\to 0} \frac{v(c+h) - v(c)}{h}. \end{aligned}$$

En assimilant u à une fonction de deux variables, i. e. $u(z) = u(\Re(z), \Im(z))$, on remarque que

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(c+h) - u(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(a+h, b) - u(a,b)}{h} = u_x(c),$$

d'où $f'(c) = u_x(c) + \mathrm{i}v_x(c)$. De même, $f'(c) = v_y(c) - \mathrm{i}u_y(c)$.

Proposition 1.2.1 (Équations de Cauchy-Riemann) *Si $f : D \to \mathbf{C}$ est dérivable en $c \in D$, alors les dérivées partielles de u et v par rapport à x et y existent en $c = (a, b)$ et*

$$\begin{cases} u_x(c) &= & v_y(c) \\ u_y(c) &= & -v_y(c) \end{cases}.$$

Preuve. Conséquence directe du paragraphe précédent. $\square$

3 Lien avec la différentiabilité

Soit A une matrice réelle 2×2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Elle définit une application $\mathbf{R}$-linéaire $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ par

$$T(z) = T(x + \mathrm{i}y) := A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{1,1}x + a_{1,2}y + \mathrm{i}(a_{2,1}x + a_{2,2}y).$$

En particulier, $T(1) = a_{1,1} + \mathrm{i}a_{2,1}$ et $T(i) = a_{1,2} + \mathrm{i}a_{2,2}$

Lemme 1.3.1 *T est $\mathbf{C}$-linéaire si et seulement si $a_{1,1} = a_{2,2}$ et $a_{1,2} = -a_{2,1}$.*

Preuve. ($\Longrightarrow$) : Supposons T linéaire. Alors $T(\mathrm{i}) = \mathrm{i}T(1)$, donc $a_{1,2} + \mathrm{i}a_{2,2} = \mathrm{i}a_{1,1} - a_{2,1}$ et on identifie les parties réelles et imaginaires.

($\Longleftarrow$) : Supposons que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Alors

$$T(z) = T(x + \mathrm{i}y) = \alpha x - \beta y + \mathrm{i}(\beta x + \alpha y) = (\alpha + \mathrm{i}\beta)(x + iy),$$

donc $T(cz) = (\alpha + \mathrm{i}\beta)cz = cT(z)$. $\square$

Rappels :

Définition 1.3.2 (Application différentiable) *Une fonction $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est différentiable en $c = (a, b) \in D$ si pour une application linéaire $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(c+h) - f(c) - T(h)|}{|h|} = 0.$$

On dit alors que T est la différentielle de f en c, et on la note Df_c,

$$\forall h \in \mathbf{R}^2, \quad Df_c(h) = \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{pmatrix}.$$

On identifie $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$. Si $f : D \to \mathbf{C}$ est dérivable en $c = a + \mathrm{i}b$, alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - f'(c)h}{h} = 0.$$

La fonction f, vue comme une fonction de deux variables réelles, est différentiable et sa différentielle est $\mathbf{C}$-linéaire.

Théorème 1.3.3 *Soit $f : D \to \mathbf{C}$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *f est $\mathbf{C}$-dérivable en $c \in D$.*
2. *f est différentiable en c et la différentielle $Df_c : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est $\mathbf{C}$-linéaire.*
3. *f est différentiable en c et satisfait les équations de Cauchy-Riemann.*

Preuve. Exercice. □

On voudrait obtenir une condition suffisante pour la $\mathbf{C}$-dérivabilité. Si u et v, les composantes de f, satisfont les équations de Cauchy-Riemann en un point c, f doit être différentiable (comme fonction de $D \to \mathbf{R}^2$). Il faut que $u, v : D \to \mathbf{R}$ soient différentiables.

Exemple 1.3.4 Soit la fonction

$$u : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

On a bien $u_x(0,0) = u_y(0,0) = 0$, mais u n'est pas continue en $(0,0)$.

Théorème 1.3.5 *Soient $D \subset \mathbf{R}^2$ et $u, v : D \to \mathbf{R}$. Si u et v possèdent des dérivées partielles continues et $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$, alors $f = u + \mathrm{i}v$ est $\mathbf{C}$-dérivable en tout point de D.*

Exemple 1.3.6

1. Soit $f(z) := x^3y^2 + \mathrm{i}x^2y^3$. Alors
   - $u(x,y) = x^3y^2$,
   - $v(x,y) = x^2y^3$,
   - $u_x(x,y) = 3x^2y^2$,
   - $u_y(x,y) = 2x^3y$,
   - $v_x(x,y) = 2xy^3$,
   - $v_y(x,y) = 3x^2y^2$.

   f est différentiable, $u_x = v_y$ et

   $$u_y(x,y) = -v_x(x,y) \iff 2xy(x^2+y^2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

   Ainsi, f est $\mathbf{C}$-dérivable sur $\{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) = 0 \text{ ou } \Im(z) = 0\}$.
2. Soit $e^z := e^x \cos y + \mathrm{i}e^x \sin y$. Alors
   - $u_x(x,y) = e^x \cos y$,
   - $u_y(x,y) = -e^x \sin y$,
   - $v_x(x,y) = e^x \sin y$,
   - $v_y(x,y) = e^x \cos y$.

   Ainsi, la fonction $z \mapsto e^z$ est $\mathbf{C}$-dérivable sur $\mathbf{C}$.

Exercice 1.3.7 Soit $f(z) := |z|^{3/2}$. Trouver les points où f est $\mathbf{C}$-dérivable.

4 Fonctions harmoniques

Définition 1.4.1 (Fonction harmonique) *Une fonction $u : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ est harmonique si elle satisfait l'équation de Laplace*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Soit $f : D \to \mathbf{C}$ une application $\mathbf{C}$-dérivable, alors $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$. On suppose que les dérivées partielles secondes u_{xy}, u_{yx}, u_{xx}, ... existent et sont continues. Alors u et v sont harmoniques car

$$\begin{cases} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{cases} \implies \begin{cases} u_{xx} &= v_{yx} \\ u_{yy} &= -v_{yx} \end{cases}.$$

Ainsi, $u_{xx} + u_{yy} = 0$. De la même manière, on montre que $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Exercice 1.4.2 Soit $u : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ harmonique. Montrer qu'il existe $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ $\mathbf{C}$-dérivable telle que $u = \Re(f)$.

5 Fonctions holomorphes

Définition 1.5.1 (Fonction holomorphe) *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}$. f est holomorphe en un point $c \in D$ si f est $\mathbf{C}$-dérivable dans un voisinage de c.*

f est dite holomorphe sur D si f est holomorphe en tout point de D.

Exemple 1.5.2 La fonction $z \mapsto x^3y^2 + \mathrm{i}x^2y^3$ n'est holomorphe en aucun point.

Remarque 1.5.3 L'ensemble des points où une fonction est holomorphe est ouvert.

Proposition 1.5.4 (Règles de dérivation) *Soient $f, g : D \to \mathbf{C}$ des fonctions holomorphes.*

1. *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, $\alpha f + \beta g$ l'est aussi et $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.*
2. *Le produit fg est holomorphe et $(fg)' = f'g + fg'$.*
3. *Si g ne s'annule pas sur D, le quotient f/g est holomorphe et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$
4. *Si $f : D \to D'$ et $g : D' \to \mathbf{C}$, la composée $g \circ f$ est holomorphe et $(g \circ f)' = g' \circ f \times f$.*

Théorème 1.5.5 *Soit $f : D \to \mathbf{C}$, alors f est holomorphe et $f' = 0$ si et seulement si f est localement constante.*

Preuve. $(\Longleftarrow)$: Évident.

$(\Longrightarrow)$: D'après les équations de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y = 0$ et $u_y = -v_x = 0$. Ainsi, $du = dv = 0$, donc u et v sont constantes. □

Exemple 1.5.6 Soit $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe.

1. Si D est connexe et $|f|$ est constante, alors f est constante.
2. Si $f(D) \subset \mathbf{R}$ ou $f(D) \subset \mathrm{i}\mathbf{R}$, alors f est localement constante.

Preuve.

1. $u^2 + v^2$ est constante, donc on montre par le calcul que $u_x = u_y = 0$, et de même pour v.

□

Soit A une matrice réelle, notée
$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix},$$
qui définit une application $\mathbf{R}$-linéaire $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ par
$$\forall h \in \mathbf{R}^2, \quad T(h) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re(h) \\ \Im(h) \end{pmatrix}.$$

Lemme 1.5.7 *Il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ tels que $T(h) = \lambda h + \mu \bar{h}$.*

Preuve.
$$\left\{\begin{array}{lcl} T(1) & = & \lambda + \mathrm{i}\mu \\ T(\mathrm{i}) & = & \lambda - \mathrm{i}\mu \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \mu & = & \dfrac{T(1) + \mathrm{i}T(\mathrm{i})}{2} \\ \lambda & = & \dfrac{T(1) - \mathrm{i}T(\mathrm{i})}{2} \end{array}\right. .$$
□

Remarque 1.5.8 $\mu = 0$ si et seulement si T est $\mathbf{C}$-linéaire.

Soit $f : D \to \mathbf{C}$ différentiable en $c \in D$, alors
$$Tf(c).h = \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re(h) \\ \Im(h) \end{pmatrix}.$$

De plus,
$$\left\{\begin{array}{lcl} Tf(c).1 & = & u_x(c) + \mathrm{i}v_x(c) \\ Tf(c).\mathrm{i} & = & u_y(c) + \mathrm{i}v_y(c) \end{array}\right. .$$

On définit

1. $f_x(c) := \partial_x f(c) = Tf(c).1 = u_x + \mathrm{i}v_x$,
2. $f_y(c) := \partial_y f(c) = Tf(c).\mathrm{i} = u_y + \mathrm{i}v_y$,
3. $f_z(c) := \partial_z f(x) = \lambda = \dfrac{f_x(c) - \mathrm{i}f_y(c)}{2}$,
4. $f_{\bar{z}}(c) := \partial_{\bar{z}} f(x) = \mu = \dfrac{f_x(c) + \mathrm{i}f_y(c)}{2}$.

Alors $Tf(c).h = f_z(c)h + f_{\bar z}(c)\bar h$.

Soit $z \in \mathbf{C}$, notons $x = (z+\bar z)/2$ et $y = (z - \bar z)/(2\mathrm{i})$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

6 Équations de Cauchy-Riemann

$$\left\{\begin{array}{ccc} u_x & = & v_y \\ u_y & = & -v_x \end{array}\right. \iff \mathrm{i}f_x = f_y \iff f_x = -if_y,$$

car $\mathrm{i}f_x = \mathrm{i}u_x - v_x = -v_x + \mathrm{i}u_x = u_y + \mathrm{i}v_y = f_y$.

Théorème 1.6.1 *Soit $f : D \to \mathbf{C}$ différentiable, alors $\bar f$ est holomorphe si et seulement si pour tout $c \in D$, $f_z(c) = 0$.*

Preuve. $\bar f = u - \mathrm{i}v$ est holomorphe si

$$\left\{\begin{array}{ccc} u_x & = & -v_y \\ u_y & = & v_x \end{array}\right.,$$

donc

$$f_z = \frac{f_x - \mathrm{i}f_y}{2} = \frac{u_x + \mathrm{i}v_x - \mathrm{i}(u_y + \mathrm{i}v_y)}{2} = \frac{u_x + v_y + \mathrm{i}(v_x - u_y)}{2} = 0.$$

$\bar f$ est holomorphe si et seulement si $f_z = 0$. □

Exercice 1.6.2 Montrer que $\bar f'(c) = \bar f_{\bar z}(c)$.

7 Conservation des angles

Pour $w, z \in \mathbf{C}$, on note

$$\langle w, z\rangle = \Re(w)\Re(z) + \Im(w)\Im(z) = \Re(w\bar z) = \Re(\bar w z) \leq |w||z|.$$

Alors

$$\cos\varphi = \frac{\langle w, z\rangle}{|z||w|}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Définition 1.7.1 (Conservation des angles) *Une application $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ $\mathbf{R}$-linéaire conserve les angles si*

$$\frac{\langle T(w), T(z)\rangle}{|T(z)||T(w)|} = \frac{\langle w, z\rangle}{|z||w|}.$$

Rappel : $T(z) = \lambda z + \mu \bar z$.

Lemme 1.7.2 *Soit $T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ $\mathbf{R}$-linéaire, alors T conserve les angles si et seulement si*

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda & \neq & 0 \\ \mu & = & 0 \end{array}\right., \quad ou \quad \left\{\begin{array}{ccc} \lambda & = & 0 \\ \mu & \neq & 0 \end{array}\right..$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\langle T(w), T(z)\rangle &= \Re(T(z)\overline{T(w)}) \\ &= \Re((\lambda z + \mu\bar z)(\bar\lambda\bar w + \bar\mu w)) \\ &= (|\lambda|^2 + |\mu|^2)\Re(z\bar w) + 2\Re(\lambda\bar\mu wz) \\ &= (|\lambda|^2 + |\mu|^2)\langle z, w\rangle + 2\Re(\lambda\bar\mu wz).\end{aligned}$$

En prenant $z := 1$ et $w := i$, alors si T conserve les angles,

$$\frac{\langle T(1), T(\mathrm{i})\rangle}{|T(1)||T(\mathrm{i})|} = \frac{\langle 1, \mathrm{i}\rangle}{|1||\mathrm{i}|}.$$

Comme $\langle T(1), T(\mathrm{i})\rangle = 0$, $\langle 1, \mathrm{i}\rangle = 0$, donc $\Re(\lambda\bar\mu wz) = 0$, donc $\Re(\lambda\bar\mu\mathrm{i}) = 0$, d'où $\lambda\bar\mu \in \mathbf{R}$.

En prenant $z := 1 + \mathrm{i}$ et $w = 1 - \mathrm{i}$, qui sont tels que $\langle z, w\rangle = 0$ et $zw = 2$, on obtient après des calculs similaires que $\lambda\bar\mu \in \mathrm{i}\mathbf{R}$. Ainsi, $\lambda\bar\mu = 0$, donc $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$. □

Proposition 1.7.3 *On suppose que $f : D \to \mathbf{C}$ différentiable est telle que f conserve les angles en $c \in D$ et $Tf(c)$ conserve les angles.*

1. *Si f est $\mathbf{C}$-dérivable en $c \in C$ et $f'(c) \neq 0$, alors $Tf(c)$ est en fait l'application $z \mapsto f_z(c)z$, donc conserve les angles. Par conséquent, f conserve les angles en tout point.*
2. *Si $\bar{f} : D \to \mathbf{C}$ est $\mathbf{C}$-dérivable en c, alors $\bar{f}'(z) \neq 0$ et $\bar{f}'(c) = \bar{f}_{\bar{z}}(c) = \bar{\mu}$, alors f conserve les angles.*

Définition 1.7.4 (Fonction anti-holomorphe) *Si $\bar{f}$ est holomorphe, on dit que f est anti-holomorphe.*

Proposition 1.7.5 *$f : D \to \mathbf{C}$ différentiable est holomorphe si et seulement si $f_{\bar{z}}(c) = 0$ pour tout $c \in D$. De plus, $f_{\bar{z}}(c) = f'(c)$.*

Théorème 1.7.6 *Soit $f : D \to \mathbf{C}$, où D est un ouvert connexe. Les dérivées partielles u_x, u_y, v_x, v_y existent et sont continues. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est holomorphe dans D et f' ne s'annule pas, ou f est anti-holomorphe dans D et $\bar{f}'$ ne s'annule pas.*
2. *f conserve les angles dans D.*

PREUVE. 1) $\Longrightarrow$ 2) : Ok.

2) $\Longrightarrow$ 1) : f est différentiable en tout point de D. Soit $c \in D$, alors $Tf(c).h = f_z(c).h$ ou $Tf(c).h = f_{\bar{z}}(c)\bar{h}$. On considère la fonction

$$g : c \mapsto \frac{f_z(c) - f_{\bar{z}}(c)}{f_z(c) + f_{\bar{z}}(c)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f_{\bar{z}}(c) = 0 \\ -1 & \text{si} \quad f_z(c) \end{cases}.$$

g est continue, D est connexe, donc $g = 1$ ou $g = -1$. □

Soit $f : D \to \mathbf{C}$ dérivable. Soient $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ et $t_0 \in [a, b]$. Notons $c := \gamma(t_0)$. $\gamma = x + iy$ est différentiable en t_0 si $x'(t_0)$ et $y'(t_0)$ existent, et $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + \ iy'(t_0)$.

Supposons $f = u + iv$ est différentiable en c. $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ et

$$\forall t \in [a, b], \quad f \circ \gamma(t) = u(x(t), y(t)) + \mathrm{i}v(x(t), y(t)).$$

De plus, $f \circ \gamma(t_0) = f(c)$ et

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(t_0) &= u_x(c).x'(t_0) + u_y(c).y'(t_0) + \mathrm{i}[v_x(c).x'(t_0) + v_y(c).y'(t_0)] \\ &= \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \\ &= Tf(c).\gamma'(t_0).\end{aligned}$$

Maintenant, on prend deux chemins γ_1 et γ_2 différentiables tels que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = c$. Alors on désigne *l'angle* entre γ_1 et γ_2 en c par la quantité

$$\langle \gamma_1'(t_1), \gamma_2'(t_2) \rangle.$$

Si f est holomorphe en c avec $f'(c) \neq 0$, ou si $\bar{f}$ est holomorphe avec $\bar{f}'(c) \neq 0$, alors l'angle entre γ_1 et γ_2 en c est égal à l'angle entre $f(\gamma_1)$ et $f(\gamma_2)$ en $f(c)$.

8 Applications biholomorphes

Soit $D \subset \mathbf{C}$ un ouvert. On note

$$O(D) := \{f : D \to \mathbf{C} \ \mid f \text{ holomorphe}\}.$$

Définition 1.8.1 (Application biholomorphe) *On dit que $f \in O(D)$ est une application biholomorphe de D dans $D' := f(D)$ si D' est un ouvert et si $f : D \to D'$ admet une fonction inverse $f^{-1} : D' \to D \in O(D')$.*

On peut établir des liens entre les matrices complexes 2×2 et les applications biholomorphes. Notons une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{C}, \ (c, d) \neq (0, 0).$$

Définition 1.8.2 (Transformation linéaire fractionnaire) *La matrice A définit une application*

$$h_A : z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

appelée transformation linéaire fractionnaire.

Remarque 1.8.3 Plus communément, ces fonctions sont appelées homographies.

Proposition 1.8.4 *Si $c \neq 0$, alors $h_A : \mathbf{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbf{C}$ est holomorphe. De plus,*

$$\forall z \in \mathbf{C} \setminus -\left\{\frac{d}{c}\right\}, \quad h'_A(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}.$$

Ainsi,

$$(\forall z \in \mathbf{C}, \quad h'_A(z) = 0) \iff (\det A = 0) \iff (h_A = c^{ste}).$$

Remarque 1.8.5

1. $h_A = \mathrm{id}$ si et seulement si A est une homotéthie.
2. $h_{AB} = h_A \circ h_B$.
3. Si $c = 0$, h_A est polynomiale de degré 1 et est biholomorphe.
4. Si $c \neq 0$ et $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbf{C})$, alors
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
On en déduit que $h_A : \mathbf{C} \setminus \{-d/c\} \to \mathbf{C} \setminus \{a/c\}$ est un biholomorphisme, de réciproque $h_{A^{-1}}$.

Exemple 1.8.6 Notons $\mathbf{H} := \{z \in \mid \Im(z) > 0\}$, ainsi que $\mathbf{E} := \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$. Montrons qu'il existe une application biholomorphe $\mathbf{H} \to \mathbf{E}$. Notons

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix},$$

cette matrice induit une application

$$h_A : z \longmapsto \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}},$$

holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \{-i\}$. Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{H}$, alors $y > 0$. On a alors

$$h_A(z) = \frac{x + \mathrm{i}y - \mathrm{i}}{x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}} = \frac{x + \mathrm{i}(y-1)}{x + \mathrm{i}(y+1)}, \quad \text{et} \quad |h_A(z)|^2 = \frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2}.$$

Étant donné que $y > 0$, on a $|y-1| < |y+1|$, donc $|h_A(z)|^2 < 1$. Par conséquent, $h_A(\mathbf{H}) \subset \mathbf{E}$.

De plus,

$$A^{-1} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$h_{A^{-1}} : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{i}z + \mathrm{i}}{-z + 1} \end{array} \in O(\mathbf{C} \setminus \{1\}).$$

Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{E}$, alors $|z| < 1$ et

$$h_{A^{-1}}(z) = \frac{\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + \mathrm{i}}{-(x + \mathrm{i}y) + 1} = \frac{-2y - \mathrm{i}(x^2 + y^2 - 1)}{(x-1)^2 + y^2}.$$

On a donc $\mathrm{Im}(h_{A^{-1}}(z)) > 0$, d'où $h_{A^{-1}}(\mathbf{E}) \subset \mathbf{H}$.

Enfin, $h_A \circ h_{A^{-1}} : \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$ et $h_{A^{-1}} \circ h_A : \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, donc $h_A : \mathbf{H} \to \mathbf{E}$ est un biholomorphisme. Dans la littérature, on peut la trouver notée simplement h et nommée application de Cayley.

9 Automorphismes

Soit $D \subset \mathbf{C}$ un ouvert.

Définition 1.9.1 (Automorphisme) *Une application $f : D \to D$ biholomorphe est un automorphisme de D. On note* $\mathrm{Aut}(D)$ *l'ensemble des automorphismes de D.*

Exercice 1.9.2 Montrer que $(\mathrm{Aut}(D), \circ)$ est un groupe.

Exemple 1.9.3

1. Toute application de la forme $z \mapsto az + b$, où $a \neq 0$ et $b \in \mathbf{C}$, est un automorphisme de $\mathbf{C}$. En fait, on montrera plus tard que ce sont exactement les automorphismes de $\mathbf{C}$.
2. Quels sont les éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbf{H})$? Soit
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{GL}_2^+(\mathbf{R}) := \{M \in \mathcal{GL}_2(\mathbf{R}) \mid \det A > 0\}.$$
On vérifie par le calcul que si $z \in \mathbf{H}$, alors $h_A(z) \in \mathbf{H}$.

Théorème 1.9.4 *Pour tout* $A \in \mathcal{GL}_2^+(\mathbf{R})$, $h_A \in \mathrm{Aut}(\mathbf{H})$.

Exemple 1.9.5 Automorphismes de $\mathbf{E}$: si $f : D \to D'$ est biholomorphe, alors pour tout $g \in \mathrm{Aut}(G)$,

$$f_G := f \circ g \circ f^{-1} : D' \to D' \in \mathrm{Aut}(D').$$

Notons la matrice

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix},$$

ainsi que h l'application qu'elle induit (c'est l'application de Cayley). Soit $A \in \mathcal{GL}_2(\mathbf{R})$, $h_A : \mathbf{H} \to \mathbf{H} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{H})$. Alors $g := h \circ h_1 \circ h^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{E})$ et g est définie par une matrice

$$C := BAB^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Toute matrice de cette forme définit un automorphisme de $\mathbf{E}$.

Chapitre 2

Séries entière

1 Modes de convergence

1.1 Suites complexes

Définition 2.1.1 (Convergence de suites) *Une suite* $(c_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ *converge vers* c *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \geq N, \quad |c_n - c| < \varepsilon.$$

Proposition 2.1.2 *Soient* $(c_n)_n, (c'_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$*, qui convergent respectivement vers* c, c'*.*

1. *Pour tous* $a, b \in \mathbf{C}$*,* $ac_n + bc'_n \to ac + bc'$*.*
2. $c_n c'_n \to cc'$*.*
3. $c_n/c'_n \to c/c'$ *si* $c' \neq 0$*.*
4. $|c_n| \to |c|$*.*
5. $\bar{c_n} \to \bar{c}$*.*
6. $c_n \to c$ *si et seulement si* $\Re(c_n) \to \Re(c)$ *et* $\Im(c_n) \to \Im(c)$*.*
7. Critère de Cauchy *:* $(c_n)_n$ *converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy, i. e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n, m \geq N, \quad |c_n - c_m| < \varepsilon.$$

1.2 Séries complexes

Définition 2.1.3 (Convergence de séries) *La série* $\sum a_n$ *est dite convergente si la suite de ses sommes partielles* $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_n$ *converge.*

Proposition 2.1.4

1. $\sum a_n$ *converge si et seulement si* $\sum \Re(a_n)$ *et* $\sum \Im(a_n)$ *convergent. Dans ce cas,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Re(a_n) + \sum_{n=0}^{+\infty} \Im(a_n).$$

2. Critère de Cauchy *:* $\sum a_n$ *converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n > m \leq N, \quad |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

3. *Si* $\sum a_n$ *converge, aors* $|a_n| \to 0$*.*
4. $\sum a_n$ *est absolument convergente si* $\sum |a_n|$ *converge. La convergence absolue implique la convergence, et on a*

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

5. *S'il existe* $(t_n)_n \in (\mathbf{R}^+)^{\mathbf{N}}$ *telle que* $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n < +\infty$ *et pour tout* $n \in \mathbf{N}$*,* $|a_n| \leq t_n$*, alors la série* $\sum a_n$ *converge absolument.*
6. *Si* $\sum a_n$ *covnerge absolument, alors pour tout* $\sigma \in \Sigma_n$*, la série* $\sum a_{\sigma(n)}$ *converge absolument et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

1.3 Suites et séries de fonctions

Soient $X \subset \mathbf{C}$ et $(f_n)_n \in (\mathbf{C}^X)^{\mathbf{N}}$.

Définition 2.1.5 (Convergence simple d'une suite de fonctions) *On dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers f dans $A \subset X$ si*

$$\forall z \in A, \quad f_n(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(z).$$

Définition 2.1.6 (Convergence uniforme d'une suite de fonctions) *On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément dans $A \subset \mathbf{C}$ vers $f : A \to \mathbf{C}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall z \in A, \quad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Définition 2.1.7 (Convergence uniforme d'une série de fonctions) *La série $\sum f_n$ converge uniformément dans $A \subset \mathbf{C}$ vers $f : A \to \mathbf{C}$ si la suite de ses sommes partielles converge uniformément dans A vers f.*

Soit $A \subset X \subset \mathbf{C}$, on définit pour $f : X \to \mathbf{C}$ la quantité

$$\|f\|_A := \sup_{z\in A} |f(z)|.$$

On note

$$V := \{f : X \to \mathbf{C} \mid \|f\|_A < +\infty\}.$$

C'est un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_A$ est une semi-norme sur V, i. e. elle vérifie tous les axiomes d'une norme sauf la séparation.

Remarque 2.1.8 $(f_n)_n$ converge uniformément vers f dans A si et seulement si $\|f_n - f\|_A \to 0$.

Proposition 2.1.9 *Soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions convergeant uniformément reespectivement vers f et g.*

1. *Pour tous $a, b \in \mathbf{C}$, $(af_n + bg_n)_n$ converge uniformément vers $af + bg$.*
2. *Si $\|g\|_A < +\infty$, alors $(f_ng_n)_n$ converge uniformément vers fg.*

1.4 Convergence localement uniforme

Définition 2.1.10 (Convergence localement uniforme de suites) *On dit que $(f_n)_n$ converge localement uniformément dans X si pour tout $x \in X$, il existe $U_x \in \mathcal{V}(x)$ tel que $(f_n)_n$ converge uniformément dans U_x.*

Définition 2.1.11 (Convergence localement uniforme de séries) *La série $\sum f_n$ est localement uniformément convergente si la suite de ses sommes partielles l'est.*

Remarque 2.1.12 Clairement, si $(f_n)_n$ converge uniformément dans X, alors elle converge localement uniformément.

Théorème 2.1.13

1. *Si $(f_n)_n$ converge localement uniformément dans X vers f, alors $f \in \mathcal{C}(X)$.*
2. *Si $(f_n)_n$ est telle que la série $\sum f_n$ converge localement uniformément dans X, alors sa somme est continue sur X.*

Preuve. Exercice. □

1.5 Convergence sur les compacts

Lemme 2.1.14 *Si $(f_n)_n$ converge localement uniformément dans X, alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de X.*

Preuve. La suite $(f_n)_n$ converge uniformément localement dans X, donc elle converge simplement dans X. On note f sa limite simple. Par convergence localement uniforme, pour tout $x \in X$, il existe $r_x > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_x \in \mathbf{N}, \forall n \geq N_x, \forall y \in \mathring{\mathcal{B}}(x, r_x), \quad |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit K un compact de X, du recouvrement

$$K \subset \bigcup_{x\in K} \mathring{\mathcal{B}}(x, r_x)$$

un recouvrement fini

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} \mathring{\mathcal{B}}(x_i, r_{x_i}).$$

Soit $\varepsilon > 0$, notons $N := \max_{1\leq i\leq N_0} N_i$, alors

$$\forall n \geq N, \underbrace{\forall i \in \{1,\dots,n\}, \forall y \in \mathring{\mathcal{B}}(x_i, r_{x_i})}_{\text{i. e. } \forall y \in K}, \quad |f_n(y) - f(y)|.$$

Ceci montre la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f dans K. □

Définition 2.1.15 (Convergence sur les compacts) *On dit que $(f_n)_n$ converge compactement (ou sur les compacts) si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact $K \subset C$ compact.*

Remarque 2.1.16 On a montré que la convergence uniforme implique la convergence compacte. La réciproque est vraie si X est localement compact.

1.6 Critère de convergence

Définition 2.1.17 (Suite de fonctions de Cauchy) *On dit que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy sur $A \subset X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon, \quad \|f_m - f_n\|_A < \varepsilon.$$

Théorème 2.1.18 (Critère de Cauchy pour les suites) *Soit $A \subset X$ non vide et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $X \to \mathbf{C}$. Il y a équivalence entre*

1. *$(f_n)_n$ converge uniformément dans A,*
2. *$(f_n)_n$ est de Cauchy dans A.*

Preuve. 2) $\implies$ 1) : Notons pour tout $z \in A$, $f(z) := \lim_{(n\to+\infty)} f_n(z)$. Alors si $m, n \in \mathbf{N}$, on a

$$\forall z \in A, \quad |f(z) - f_n(z)| \leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_n(z)|.$$

On majore le membre de droite par définition de $f(z)$ et par le caractère de Cauchy de $(f_n)_n$. □

Théorème 2.1.19 (Critère de Cauchy pour les séries) *La série $\sum f_n$ converge uniformément dans A si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0, \forall n > m > N_\varepsilon, \forall z \in A, \quad |f_{m+1}(z) + \cdots + f_n(z)| < \varepsilon.$$

Théorème 2.1.20 (Critère de Weierstrass de convergence uniforme) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $X \to \mathbf{C}$, soit $A \subset X$ non vide. S'il existe $(M_n)_n \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \|f_n\|_A \leq M_n, \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} M_n < +\infty,$$

alors la série $\sum f_n$ converge uniformément dans A.

Preuve. On a par inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} f_k \right\|_A \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\|_A \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k.$$

Si la somme des M_k est finie, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall n > m > N_\varepsilon, \quad \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon.$$

Par critère de Cauchy, la série $\sum f_n$ converge uniformément dans A. □

1.7 Convergence normale des séries

Définition 2.1.21 (Convergence normale) *On dit que la série $\sum f_n$ converge normalement dans X si*

$$\forall z \in X, \exists U_z \in \mathcal{V}(z), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{U_z} < +\infty.$$

Proposition 2.1.22 *La convergence normale implique la convergence uniforme.*

Théorème 2.1.23 *Soit $(f_n)_n \in \mathcal{C}(X)$, si la série $\sum f_n$ converge normalement, alors sa somme est aussi continue sur X.*

Théorème 2.1.24 *Si la série $\sum f_n$ converge normalement, alors pour toute bijection $\tau : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, la série $\sum f_{\tau(n)}$ converge normalement et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_{\tau(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

Théorème 2.1.25 *Soient $(f_n)_n, (g_n)_n \in \mathbf{C}^X$. Si les séries $\sum f_n$ et $\sum g_n$ convergent normalement dans X, et que l'on note f et g leurs sommes respectives, alors la série $\sum_{(n,k)\in\mathbf{N}^2} f_n g_k$ converge normalement vers fg.*

2 Séries entières

Soient $(a_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ et $z_0 \in \mathbf{C}$.

Définition 2.2.1 (Série entière) *Une série entière de variable z centrée en z_0 est une série de terme général $(a_n(z-z_0)^n)_n$.*

Lemme 2.2.2 (Abel) *Supposons qu'il existe $s, M > 0$ tels que*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |a_n| s^n \leq M.$$

Alors la série $\sum a_n z^n$ converge normalement dan $\mathring{\mathcal{B}}(0,s)$.
PREUVE. Soit $r \in]0, s[$,

$$\|a_n z^n\|_{\mathring{\mathcal{B}}(0,s)} \leq |a_n| s^n \left(\frac{r}{s}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Comme la série $\sum M(r/s)^n$ converge, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement. □

Corollaire 2.2.3 *Si la série $\sum a_n z^n$ converge en $c \neq 0$, alors elle converge normalement dans $\mathring{\mathcal{B}}(0, |c|)$.*
PREUVE. Le terme général $(a_n z^n)_n$ tend vers 0, donc est borné. On conclut avec le lemme d'Abel. □

2.1 Rayon de convergence

Théorème 2.2.4 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. La quantité*

$$R := \sup\{t \geq 0 \mid \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n t^n| < +\infty\}$$

est bien définie. De plus, la série $\sum a_n z^n$
1. *converge normalement dans $\mathring{\mathcal{B}}(0,R)$,*
2. *diverge dans $\mathbf{C} \setminus \overline{\mathcal{B}}(0,R)$.*

On appelle R le rayon de convergence de la série.
PREUVE.
1. Conséquence du lemme d'Abel.
2. Soit $w \in \mathbf{C} \setminus \overline{\mathcal{B}}(0,R)$, alors $\sup_n |a_n w^n| = +\infty$. Donc la série $\sum a_n w^n$ diverge.

□

Proposition 2.2.5 (Formule de Cauchy-Hadamard) *Le rayon de convergence d'une série $\sum a_n(z-z_0)^n$ est*

$$R = \frac{1}{\limsup_n |a_n|^{1/n}}.$$

Exemple 2.2.6
1. $\sum n^n z^n$, $R = 1/(\limsup_n n) = 0$.
2. $\sum z^n$, $R = 1$.

La formule de Cauchy-Hadamard n'est pas très utile.

Théorème 2.2.7 *Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ une série entière, notons R son rayon de convergence. Si $(a_n)_n$ est nulle sur un ensemble fini seulement, alors*

$$\liminf_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \limsup_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Exemple 2.2.8
1. $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$, $a_n/a_{n+1} = n+1$, donc $R = +\infty$. La $\sum z^n/n!$ converge normalement dans $\mathbf{C}$.
2. $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}/(2n)!$. On a $|a_{2n}| = 1/(2n)!$ et $a_{2n+1} = 0$, donc
$$\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup \left(\frac{1}{(2n)!}\right)^{1/2n} = 0.$$
Donc $R = +\infty$.
3. Pareil pour $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n+1}/(2n+1)!$.
4. $\lambda(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z^n/n$. $R = 1$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lambda(x) = \ln(1+x)$.

Proposition 2.2.9 (Formule d'Euler) *Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\exp(z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$.*
Preuve.
$$\sum_{n=0}^{2m+1} \frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
□

3 Holomorphie des séries entières

Théorème 2.3.1 *Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors les séries $\sum na_n(z-z_0)^{n-1}$ et $\sum a_n(z-z_0)^{n+1}/(n+1)$ ont aussi un rayon de convergence égal à R.*
Preuve. Notons R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs de ces deux séries.
Si $(na_nt^n)_n$ est bornée, alors $(a_nt^n)_n$ l'est aussi, donc $R \geq R_1$. Soient $r < R$ et $r < s < R$, alors
$$|a_n|r^{n-1}n = |a_n|\frac{r^n}{s^n}s^n\frac{n}{r} = \underbrace{|a_n|s^n}_{\text{borné}}\left(\frac{r}{s}\right)^n\frac{n}{r}.$$
Par croissances comparées, $r \leq R'$, donc $R \leq R'$, d'où $R = R'$. □

Théorème 2.3.2 *Soient une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $f : \mathring{\mathcal{B}}(z_0,R) \to \mathbf{C}$ sa somme. Alors f est $\mathbf{C}$-dérivable un nombre inifni de fois dans $\mathring{\mathcal{B}}(z_0,R)$. En particulier, f est holomorphe dans $\mathring{\mathcal{B}}(z_0,R)$. De plus,*
$$\forall k \geq 1, \forall z \in \mathring{\mathcal{B}}(z_0,R), \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} k!\binom{n}{k}a_n(z-z_0)^{n-k}.$$
Preuve. On peut supposer $z_0 = 0$. On considère la fonction
$$g : z \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} na_nz^n.$$
D'après le théorème précédent, g est définie sur $\mathring{\mathcal{B}}(0,R)$. Montrons que $f' = g$. On fixe $b \in \mathring{\mathcal{B}}(0,R)$.
$$\begin{aligned}\forall z \in \mathring{\mathcal{B}}(0,R), \quad f(z) - f(b) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z^n - b^n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^kb^{n-1-k}\right)\end{aligned}$$
Ainsi,
$$\frac{f(z)-f(b)}{z-b} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^kb^{n-1-k}\right).$$
Notons pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$f_n : z \longmapsto a_n\sum_{k=0}^{n-1} z^kb^{n-1-k}.$$
- Les fonctions f_n sont continues.
- La série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathring{\mathcal{B}}(0,r)$, avec $|b| < r < R$, car
$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall z \in \mathcal{B}(0,r), \quad |f_n(z)| \leq n|a_n|r^{n-1},$$
donc $\|f_n\|_{\mathcal{B}(0,r)} \leq n|a_n|r^{n-1}$.

Par conséquent, la somme $\sum n = 0^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathring{\mathcal{B}}(0,r)$, donc en prenant la limite quand $[z \to b]$, on obtient que $(f(z)-f(b))/(z-b) \to_{(z\to b)} g(b)$, d'où $f'(b) = g(b)$. □

3.1 Fonction exponentielle

Définition 2.3.3 (Fonction exponentielle) *On définit sur* $\mathbf{C}$ *la fonction*

$$\exp : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 2.3.4

1. $\exp' = \exp$.
2. $\forall z \in \mathbf{C}, \quad e^z e^{-z} = 1$.
3. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Preuve.

1. $$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \exp(z).$$
2. Soit la fonction $h : z \mapsto e^z e^{-z}$. Alors
$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad h'(z) = e^z e^{-z} - e^z e^{-z} = 0,$$
donc $\mathbf{C}$ étant connexe, h est constante sur $\mathbf{C}$. La conclusion découle du fait que $h(0) = 1$.

□

Théorème 2.3.5 *Soit* G *un ouvert connexe de* $\mathbf{C}$ *et soit* $f : G \to \mathbf{C}$ *holomorphe sur* G*. Alors*

$$\forall z \in G, \quad f(z) = ae^{bz} \iff \forall z \in \mathbf{C}, \quad f'(z) = bf(z).$$

Preuve. Laissée en exercice. □

Proposition 2.3.6 *Pour tous* $z, w \in \mathbf{C}$*, on a* $e^z e^w = e^{z+w}$.

Preuve. Fixons $w \in \mathbf{C}$,

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \exp'(w + z) = e^{w+z},$$

donc d'après le théorème précédent, il existe $a \in \mathbf{C}$ tel que $e^{w+z} = ae^z$. L'évaluation en $z = 0$ montre que $a = e^w$. □

Proposition 2.3.7

1. $\forall z \in \mathbf{C}, \quad e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$. *En particulier, pour* $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C}$*,* $e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$.
2. $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ *est une surjection.*
3. $\exp$ *est* $2\mathrm{i}\pi$*-périodique.*

3.2 Fonctions sin et cos

Définition 2.3.8 (Fonctions sin et cos) *On définit sur* $\mathbf{C}$ *les fonctions*

$$\cos : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

ainsi que

$$\sin : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Proposition 2.3.9

1. *Ces fonctions sont holomorphes sur* $\mathbf{C}$.
2. $\cos' = -\sin$ *et* $\sin' = \cos$.
3. *Pour tous* $w, z \in \mathbf{C}$*, on a*
$$\begin{cases} \cos(w + z) &= \cos(w)\cos(z) - \sin(w)\sin(z) \\ \sin(w + z) &= \sin(w)\cos(z) + \sin(z)\cos(w). \end{cases}.$$
4. *Pour tout* $z \in \mathbf{C}$*,* $\cos z = (e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z})/2$ *et* $\sin z = (e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z})/2$.
5. $\cos(\mathbf{C}) = \sin(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$.

6. *Ces fonctions sont 2π-périodiques.*
7. $\sin$ *s'annule sur* $\pi\mathbf{Z}$.
8. $\cos$ *s'annule sur* $\pi/2 + \pi\mathbf{Z}$.

PREUVE.

5. Soient $z, w \in \mathbf{C}$, alors
$$w = \cos z \iff \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} = w \iff e^{2\mathrm{i}z} - 2we^{\mathrm{i}z} - 1 = 0.$$
Cette équation admet une infinité de solutions.
7. Soit $z \in \mathbf{C}$,
$$\sin z = 0 \iff e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z} = 0 \iff e^{2\mathrm{i}z} = 1.$$

□

3.3 Fonctions logarithmes

Définition 2.3.10 (Fonction logarithme) *Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$. Une fonction $l : D \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe vérifiant*
$$\forall z \in D, \quad \exp(l(z)) = z.$$

Exemple 2.3.11 La fonction $l : z \mapsto \log\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{i}\arctan(y/x)$ est une fonction logarithme sur $D \cap \{z \in D \mid \Re(z) > 0\}$. On vérifie que pour tout $z \in E$, $l'(z) = 1/z$.

Soient $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ et $w = u + \mathrm{i}v \in \mathbf{C}$ tel que $e^w = z$. Alors $e^{u+\mathrm{i}v} = x + \mathrm{i}y$. Si l'on note $z = |z|e^{\mathrm{i}\varphi}$, $e^u = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$, donc $u = \log|z|$. De plus, $e^{\mathrm{i}v} = z/|z| = e^{\mathrm{i}\varphi}$, d'où $v = \arg z$.

Ainsi, si $l(z) := \log|z| + \mathrm{i}\arg z$, on a bien $\exp(l(z)) = z$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Rappel : $\operatorname{Arg} : \mathbf{C}^* \to]-\pi,\pi]$ est la fonction qui à un complexe associe son unique argument dans $]-\pi,\pi]$.

Définition 2.3.12 (Branche principale du logarithme) *La branche principale du logarithme est la fonction définie sur $\mathbf{C}\backslash]-\infty,0]$ par $\operatorname{Log} z := \log|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$. Elle est continue sur son ensemble de définition et vérifie* $\exp \circ \operatorname{Log} = \mathrm{id}$.

Exemple 2.3.13
$$\operatorname{Log}(1+\mathrm{i}) = \log|1+\mathrm{i}| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(1+\mathrm{i}) = \log\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}.$$

Théorème 2.3.14 *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}^*$ continue vérifiant* $\exp \circ f = \mathrm{id}$. *Alors f est holomorphe dans D et*
$$\forall z \in D, \quad f'(z) = \frac{1}{z}.$$

PREUVE. Soir $z_0 \in D$. Montrons que
$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{z_0}.$$
Notons $w : h \mapsto f(z_0+h) - f(z_0)$, par continuité de f, $w(h) \to_{(h\to 0)} 0$. La fonction exp étant dérivable en 0,
$$\frac{\exp(w(h)) - 1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 1,$$
donc il existe $\varepsilon : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ telle que $\varepsilon(h) \to_{(h\to 0)} 0$ et
$$\forall h \in \mathbf{C}, \quad \frac{\exp(w(h)) - 1}{w(h)} = 1 + \varepsilon(h).$$
Soit $h \in \mathbf{C}$,
$$w(h) = \frac{\exp(w(h)) - 1}{1 + \varepsilon(h)}.$$
Étant donné que
$$e^{w(h)} = \frac{z_0 + h}{z_0} = 1 + \frac{h}{z_0},$$
on a
$$w(h) = \frac{h}{z_0(1+\varepsilon(h))},$$
d'où
$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{z_0(1+\varepsilon(h))} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{z_0}.$$
La fonction Log est bien holomorphe sur $\mathbf{C}\backslash]-\infty,0]$. □

3.4 Fonctions puissances

Définition 2.3.15 (Fonction puissance) *Soient $\alpha \in \mathbf{C}$ et $l : G \to \mathbf{C}$ une fonction logarithme. On définit*

$$p_\alpha : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z^\alpha := \exp(\alpha l(z)). \end{array}$$

Proposition 2.3.16 *La fonction p_α est holomorphe dans G et*

$$\forall z \in G, \quad p'_\alpha(z) = \alpha z^{\alpha-1}.$$

Exemple 2.3.17 Pour $l := Log$, $G := \mathbf{C}\backslash]-\infty, 0]$ et $\alpha = \mathrm{i}$,

$$\mathrm{i}^\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{i}} = e^{\mathrm{i}(0+\mathrm{i}\pi/2)} = e^{-\pi/2}.$$

3.5 Fonction zêta de Riemann

Soit $n > 0$, la fonction $z \mapsto n^z := e^{z \log n}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.

Théorème 2.3.18 *La série $\sum 1/n^z$ converge uniformément dans $\{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) \leq 1 + \varepsilon\}$, pour tous $\varepsilon > 0$, et converge normalement dans $\{z \in \mathbf{C} \mid \Re(z) > 1\}$.*

Preuve. $|n^z| = n^x$, donc si $x > 1 + \varepsilon$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|n^z|} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < +\infty.$$

□

Chapitre 3

Intégration sur les chemins de C

1 Intégration sur les intervalles de R

Soient $I = [a, b]$ et $f = u + \mathrm{i}v : I \to \mathbf{C}$ continue. Alors on définit pour tous $c, d \in I$

$$\int_c^d f(t)\mathrm{d}t := \int_c^d u(t)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_c^d v(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 3.1.1 (Règles de calcul)

1. $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g.$
2. $\displaystyle\int_c^d f + \int_d^e f = \int_c^e f.$
3. $\displaystyle\int_c^d f = -\int_d^c f.$
4. $\displaystyle\Re\left(\int f\right) = \int \Re(f),\ \Im\left(\int f\right) = \int \Im(f)$
5. $\displaystyle\left|\int f\right| \leq \int |f|.$

2 Primitives

Rappel : Fonction réelle continuement dérivable : Une fonction $f : I \to \mathbf{C}$, où $I = [a, b]$, est *continuement dérivable* si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, de dérivée continue sur $]a, b[$, et si f' admet une limite à gauche de b et à droite de a. On dit aussi que f est *lisse*.

Définition 3.2.1 (Fonction complexe continuement dérivable) *Soit $f : I \to \mathbf{C}$. Elle est continuement dérivable si u et v le sont, et alors*

$$\forall t \in I, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = u'(t) + \mathrm{i}v'(t).$$

Lemme 3.2.2 (Formule de composition) *Si $\gamma : I \to D \subset \mathbf{C}$ est dérivable et $f : D \to \mathbf{C}$ est holomorphe, alors $f \circ \gamma : I \to \mathbf{C}$ est dérivable et*

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

Preuve. Soit $t \in I$, en notant $\gamma = x + \mathrm{i}y$, on a

$$f \circ \gamma(t) = u(x(t) + \mathrm{i}y(t)) + \mathrm{i}v(x(t) + \mathrm{i}y(t)),$$

donc

$$(f \circ \gamma)'(t) = u_x(\gamma(t))x'(t) + u_y(\gamma(t))y'(t) + \mathrm{i}[v_x(\gamma(t))x'(t) + v_y(\gamma(t))y'(t)] = f'(\gamma(t))\gamma'(t).$$

□

Définition 3.2.3 (Primitive d'une fonction réelle) *Une fonction $F : I \to \mathbf{C}$ continue est une primitive de $f : I \to \mathbf{C}$ si F est dérivable et $F' = f$.*

Théorème 3.2.4 *Soit f une fonction continue.*

1. *$x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f.*
2. *Si F est une primitive de f, alors $\int_r^s f(t)\mathrm{d}t = F(s) - F(r)$.*

Théorème 3.2.5 (Changement de variable) *Soient $J \subset \mathbf{R}$ un intervalle et $\varphi : J \to I$ une fonction dérivable à dérivée continue. Alors pour toute fonction $f : I \to \mathbf{C}$ continue,*

$$\forall r, s \in J, \quad \int_r^s f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(r)}^{\varphi(s)} f(u)\mathrm{d}u.$$

Preuve. Si F est une primitive de f, alors

$$\int_{\varphi(r)}^{\varphi(s)} f(u)\mathrm{d}u = F(\varphi(s)) - F(\varphi(r)).$$

Mais

$$F \circ \varphi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

d'où

$$\int_r^s f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(s)) - F(\varphi(t)),$$

ce qui conclut. □

Proposition 3.2.6 (Intégration par parties) *Soient $f, g : I \to \mathbf{C}$ continuement dérivables, alors*

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b = \int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

3 Intégration sur les chemins dans C

Définition 3.3.1 (Intégration sur un chemin continuement dérivable) *Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $\gamma : I \to \mathbf{C}$ continuement dérivable, $f : D \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, avec $\gamma(I) \subset D$, continue sur $\gamma(I)$. On pose*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t.$$

Exemple 3.3.2 Exemples de chemins :

1. chemin constant, $\gamma = c$,
2. segment $[z_1, z_2]$, $\gamma(t) := z_1 + t(z_1 - z_2)$,
3. portion de cercle autour de z_0, $\gamma(t) := z_0 + re^{\mathrm{i}t}$

Définition 3.3.3 (Intégration sur un chemin continuement dérivable par morceaux) *Soit γ un chemin $\mathcal{C}^1_{pm} \cap \mathcal{C}^0$. On note $\gamma = \gamma_1 + \ldots \gamma_n$, où les γ_i sont continuement dérivables. On pose*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\mathrm{d}z.$$

Définition 3.3.4 (Chemins équivalents) *Deux chemins $\gamma : I \to \mathbf{C}$ et $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to \mathbf{C}$ continuement dérivables sont dits équivalents s'il existe une bijection $\varphi : \tilde{I} \to I$ continuement dérivable, vérifiant $\varphi' > 0$, telle que $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$.*

Théorème 3.3.5 *Si γ et $\tilde{\gamma}$ sont deux chemins équivalents, alors*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\mathrm{d}z.$$

Preuve. On pose $I = [a, b]$ et $\tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$. Le changement de variable $u = \varphi(t)$ montre que

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(u))\gamma'(u)\mathrm{d}u = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

□

Exemple 3.3.6 Soit $\gamma(t) := c + re^{\mathrm{i}t}$, avec $c \in \mathbf{C}$, $r > 0$. On pose $I := [0, 2\pi]$, alors

$$\int_\gamma (z-c)^n \mathrm{d}z = \mathrm{i}r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}t(n+1)} \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq -1 \\ 2\mathrm{i}\pi & \text{si} \quad n = -1 \end{cases}.$$

Proposition 3.3.7 (Règles de calcul) *Soient γ un chemin lisse par morceaux, D un ouvert de* $\mathbf{C}$ *et $f, g : D \to \mathbf{C}$ continues telles que $\gamma(I) \subset D$.*

1. $\displaystyle\int_\gamma (f+g)(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z.$
2. $\forall c \in \mathbf{C}, \quad \displaystyle\int_\gamma cf(z)\mathrm{d}z = c\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$
3. *Soit $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ un chemin lisse par morceaux, alors*
$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$
4. *On considère γ^- le chemin γ parcouru dans le sens inverse, alors*
$$\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$
5. *Soient $\tilde{D}$ un ouvert de* $\mathbf{C}$, *$g : \tilde{D} \to \mathbf{C}$ holomorphe, de dérivée continue, et $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{D}$. En posant $\gamma := g \circ \tilde{\gamma}$, on a*
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} f(g(\xi))g'(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Proposition 3.3.8 (Majoration standard) *Soient $I = [a, b]$, $\gamma : I \to \mathbf{C}$ lisse par morceaux, D un ouvert de* $\mathbf{C}$ *contenant $\gamma(I)$, $f : D \to \mathbf{C}$ continue sur $\gamma(I)$. Alors*

$$\left| \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \|f\|_{\gamma(I)} L(\gamma),$$

où

$$L(\gamma) := \begin{cases} \displaystyle\int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t & \textit{si} \quad \gamma \textit{ est lisse} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n L(\gamma_i) & \textit{si} \quad \gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n \textit{ est lisse par morceaux.} \end{cases}.$$

Preuve.

$$\left| \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\mathrm{d}t \leq \|f\|_{\gamma(I)} L(\gamma).$$

□

4 Intégrales et passage à la limite

Théorème 3.4.1 *Soient $\gamma : I \to \mathbf{C}$ un chemin lisse par morceaux, $(f_n)_n$ une suite de foctions continues sur $\gamma(I)$, qui converge uniformément sur $\gamma(I)$ vers $f : \gamma(I) \to \mathbf{C}$. Alors*

$$\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

Preuve. f est continue sur $\gamma(I)$, donc $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ existe. Par majoration standard,

$$\left| \int_\gamma (f_n - f)(z)\mathrm{d}z \right| \leq \|f_n - f\|_{\gamma(I)} L(\gamma) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

On considère deux chemins, γ_1 et γ_2. Quand $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$, on généralise la notion de primitive.

5 Primitives et indépendance vis-à-vis des chemins

Théorème 3.5.1 *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$, $f : D \to \mathbf{C}$ continue et $F : D \to \mathbf{C}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *F est holomorphe dans D et $F' = f$.*
2. *Pour tous $z_1, z_2 \in D$, $\gamma : I = [a, b] \to D$ chemin lisse par morceaux tel que $\gamma(a) = z_1$ et $\gamma(b) = z_2$, on a*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1).$$

Preuve. $1 \implies 2$: Soient $z_1, z_2 \in D$ et $\gamma : I \to \mathbf{C}$ reliant z_1 à z_2. On suppose que γ est lisse, alors

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = [F(\gamma(t))]_a^b = F(z_2) - F(z_1).$$

Si $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$ est lisse par morceaux, alors

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\mathrm{d}z$$

et le cas précédent conclut.

$2 \implies 1$: Soit $c \in D$. D étant ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B := \mathring{\mathcal{B}}(c, r) \subset D$. Soit $z \in B$,

$$\frac{F(z) - F(c)}{z - c} - f(c) = \frac{1}{z - c} \int_{[c,z]} (f(z) - f(c))\mathrm{d}z,$$

car $f(c) = (\int_{[c,z]} f(c)\mathrm{d}z)/(z - c)$. Ainsi,

$$\left| \frac{F(z) - F(c)}{z - c} \right| \leq \frac{1}{|z - c|} \|f - f(c)\|_{[c,z]} L([c, z]) = \|f - f(c)\|_{[c,z]} \xrightarrow[z \to c]{} 0.$$

□

Définition 3.5.2 (Primitive d'une fonction complexe) *Soit $f : D \to \mathbf{C}$ une fonction continue. On dit que $F : D \to \mathbf{C}$ est une primitive de f si l'équivalence précédente est vérifiée.*

Exemple 3.5.3 Soit $n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$. La fonction $z \mapsto z^{n+1}/(n + 1)$ est une primitive de $z \mapsto z^n$.

La fonction $z \mapsto 1/z$ n'a aucune primitive sur les ensembles de la forme $\mathring{\mathcal{B}}(0, r) \setminus \{0\}$. En effet,

$$\int_{\partial \mathring{\mathcal{B}}(0,r)} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi.$$

Corollaire 3.5.4

1. *Soient D un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $F : D \to \mathbf{C}$. Si $F' = 0$, alors F est constante.*
2. *Soient D un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}$. Si F et $\tilde{F}$ sont des primitives de f sur D, alors $F - \tilde{F}$ est constante.*

Preuve.

1. Soient $z_1, z_2 \in D$ et γ un chemin reliant z_1 à z_2, alors

$$\int_\gamma F'(z)\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1) = 0.$$

□

Définition 3.5.5 (Fonction exacte) *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}$. Si f possède une primitive dans D, on dit que f est intégrable (ou exacte) dans D.*

Remarque 3.5.6 Si $f : D \to \mathbf{C}$ est intégrable dans D un fermé de $\mathbf{C}$, alors pour tout chemin $\gamma : I = [a, b] \to \mathbf{C}$ lisse par morceaux fermé, i. e. $\gamma(a) = \gamma(b)$, on a

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Théorème 3.5.7 (Critère d'intégrabilité) *Soient D un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est intégrable dans D.*
2. *Pour tout chemin γ fermé et lisse par morceaux,*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

De plus, pour $z_0 \in \mathbf{C}$ fixé,

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

est une primitive de f, avec γ_z un chemin quelconque reliant z_0 à z.

PREUVE. $1 \implies 2$: Si F est une primitive de f dans D, alors d'après la remarque précédente, pour tout chemin fermé γ lisse, $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

$2 \implies 1$: Soit $z_0 \in D$. Par connexité de D, pour tout $z \in D$ il existe γ_z un chemin reliant z_0 à z. On définit

$$F : z \longmapsto \int_{\gamma_z} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Soient $z_1, z_2 \in D$ et $\gamma : I = [a, b] \to \mathbf{C}$ un chemin lisse par morceaux reliant z_1 à z_2 tel que $\gamma(I) \subset D$. L'existence est assurée par les propriétés des connexes de $\mathbf{C}$ établie dans le TD 1. Alors

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_{\gamma_{z_2}} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{\gamma_{z_2}} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Posons $\tilde{\gamma} := \gamma_{z_1} + \gamma + \gamma_{z_2}$. C'est un chemin fermé, donc par hypothèse,

$$0 = \int_{\tilde{\gamma}} = \int_{\gamma_{z_1}} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_\gamma f(\xi)\mathrm{d}\xi - \int_{\gamma_{z_2}} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_\gamma f(\xi)\mathrm{d}\xi - (F(z_2) - F(z_1)).$$

□

Lemme 3.5.8 (Lemme de Goursat) *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. Alors pour tout triangle $T \subset D$,*

$$\int_{\partial T} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

PREUVE. On sait que

$$\max_{z,w \in T} |z - w| \leq L(\partial T),$$

et que si l'on divise T en quatre triangles semblables, orientés dans le sens trigonométrique, T_i, $1 \leq i \leq 4$, T_1 étant le triangle du haut, T_2 celui de gauche, T_3 celui de croite, et T_4 celui du milieu, on a $L(\partial T_i) = L(\partial T)/2$. De plus,

$$\int_{\partial T} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\partial T_1} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \cdots + \int_{\partial T_4} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Soit $k_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que

$$\left| \int_{\partial T_{k_1}} f(\xi)\mathrm{d}\xi \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_{\partial T_i} f(\xi)\mathrm{d}\xi \right|,$$

alors

$$\left| \int_{\partial T} f(\xi)\mathrm{d}\xi \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_{k_1}} f(\xi)\mathrm{d}\xi \right|.$$

Puis on divise de la même manière T_{k_1} en quatre triangles $T_{k_1,i}$, $1 \leq i \leq 4$. On choisit alors $k_2 \in \{1, \ldots, 4\}$ tel que

$$\left| \int_{\partial T_{k_1,k_2}} f(\xi)\mathrm{d}\xi \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_{\partial T_{k_1,i}} f(\xi)\mathrm{d}\xi \right|,$$

et donc

$$\left| \int_{\partial T} f(\xi)\mathrm{d}\xi \right| \leq 4^2 \left| \int_{\partial T_{k_1,k_2}} f(\xi)\mathrm{d}\xi \right|.$$

En itérant ce procédé, on obtient une suite $(T_{k_1,\dots,k_n})_n$ de triangles décroissante pour l'inclusion vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left|\int_{\partial T} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right|.$$

On en déduit que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} T_{k_1,\dots,k_n} = \{c\},$$

où $c \in \mathbf{C}$ est un point. On définit la fonction

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-c} - f'(c) & \text{si} \quad z \neq c \\ 0 & \text{si} \quad z = c. \end{cases}.$$

Elle est continue, car f est holomorphe, et vérifie pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z-c) + g(z)(z-c).$$

De plus,

$$\int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f(z)\mathrm{d}z = \underbrace{\int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f(c)\mathrm{d}z}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f'(c)(z-c)\mathrm{d}z}_{=0} + \int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} g(z)(z-c)\mathrm{d}z.$$

Par majoration standard,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} g(z)(z-c)\mathrm{d}z\right| \\ &\leq \|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} \|z-c\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} L(\partial T_{k_1,\dots,k_n}) \\ &\leq \|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} L(\partial T_{k_1,\dots,k_n})^2 \\ &\leq \|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} \frac{1}{(2^n)^2} L(\partial T)^2 \\ &\leq \|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} + L(\partial T)^2. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède,

$$\left|\int_{\partial T} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right| \leq 4^n \frac{1}{4^n} L(\partial T)^2 \|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}}.$$

Mais la fonction g est continue et $g(c) = 0$, donc $\|g\|_{\partial T_{k_1,\dots,k_n}} \to_{(n\to+\infty)} 0$. □

Théorème 3.5.9 (Théorème de Cauchy) *Soient G un ouvert connexe étoilé centré en c et $f : G \to \mathbf{C}$ holomorphe dans G. Alors f est intégrable dans G et la fonction*

$$F(z) := \int_{[c,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

est une primitive de f dans G. En particulier, pour tout chemin γ lisse par morceaux et fermé,

$$\int_\gamma f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0.$$

Preuve. Montrons que F est bien une primitive de f dans G. On fixe $z_0 \in G$, G étant ouvert il existe $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(z_0, r) \subset G$. Soit z dans cette boule, alors

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[c,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi - \int_{[c,z_0]} f(\xi)\mathrm{d}\xi = -\int_{[z,c]} f(\xi)\mathrm{d}\xi - \int_{[c,z_0]} f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

mais f étant holomorphe, d'après le lemme de Goursat,

$$F(z) - F(c) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}-f(z_0)\right| &= \left|\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(z_0)\mathrm{d}\xi\right| \\ &= \left|\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]}(f(\xi)-f(z_0))\mathrm{d}\xi\right| \\ &\leq \|f-f(z_0)\|_{[z_0,z]}\frac{1}{|z-z_0|}|z-z_0| \\ &\xrightarrow[z\to z_0]{} 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, F est dérivable en z_0 et $F'(z_0)=f(z_0)$. La fonction F est donc holomorphe sur G et est une primitive de f. □

Lemme 3.5.10 (Lemme de Goursat renforcé) *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$, $c \in D$ et $f : D \to \mathbf{C}$ continue sur D, holomorphe dans $D \setminus \{c\}$. Alors pour tout triangle T de D ayant c pour sommet,*

$$\int_{\partial T} f(\xi)\mathrm{d}\xi = 0.$$

PREUVE. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une façon de découper T en T_1, T_2 et T_3 tels que $c \in T_3$, $c \notin T_1, T_2$ et $L(\partial T_3) < \varepsilon$. Alors par le lemme de Goursat précédent,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial T} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right| &= \left|\int_{\partial T_1} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{\partial T_2} f(\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{\partial T_3} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right| \\ &\leq |int_{\partial T_3} f(\xi)\mathrm{d}\xi| \\ &\leq \|f\|_{\partial T_3} L(\partial T_3) \\ &< \varepsilon\|f\|_{\partial T_3}.\end{aligned}$$

□

Théorème 3.5.11 (Théorème de Cauchy renforcé) *Soient G un ouvert connexe étoilé centré en c et $f : G \to \mathbf{C}$ continue, holomorphe dans $G \setminus \{c\}$. Alors f est intégrable dans G et*

$$F(z) := \int_{[c,z]} f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

est une primitive de f.

Théorème 3.5.12 (Formule de Cauchy pour les disques) *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$. $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe dans D. Soient $c \in D$, $r > 0$ tel que, en notant $B := \mathring{\mathcal{B}}(c,r)$, on ait $\overline{B} \subset D$. Alors*

$$\forall z \in B, \quad f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi.$$

PREUVE. On fixe $z_0 \in B$ et on définit la fonction $g : D \to \mathbf{C}$ par

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si} \quad z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si} \quad z = z_0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur D et holomorphe sur $D\setminus\{z_0\}$. Soit $s > r$ tel que $B' := \mathring{\mathcal{B}}(c,s) \subset D$. D'après le théorème de Cauchy, g est intégrable dans B'. En particulier, pour tout chemin γ lisee par morceaux et fermé, on a

$$\int_\gamma g(\xi)\mathrm{d}\xi = 0.$$

Posons $\gamma := \partial B$, alors

$$\int_{\partial B}\frac{f(\xi)-f(z_0)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi = 0,$$

donc

$$f(z_0)\int_{\partial B}\frac{1}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi = \int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi,$$

d'où

$$f(z_0)2\mathrm{i}\pi = \int_{\partial B}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi.$$

□

Corollaire 3.5.13 (Formule du maximum) *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe. Soient $c \in D$, $r > 0$ tel que, en notant $B := \mathring{\mathcal{B}}(c, r)$, on ait $\overline{B} \subset D$. Alors*

$$\forall z \in B, \quad |f(z)| \leq \|f\|_{\partial B}.$$

Preuve. Si $\xi := c$, par formule de Cauchy,

$$f(c) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z - c} \mathrm{d}z.$$

Comme ∂B est le chemin $\gamma(t) := c + re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, on a

$$f(c) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{\mathrm{i}t})}{re^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{\mathrm{i}t}) \mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$|f(c)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{\partial B} 2\pi = \|f\|_{\partial B}.$$

Plus généralement, si $\xi \in B$,

$$\begin{aligned} |f(\xi)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z - \xi} \mathrm{d}z \right| \\ &\leq \|f\|_{\partial B} \sup_{z \in \partial B} \left| \frac{r}{z - \xi} \right| \\ &\leq \|f\|_{\partial B} \frac{r}{r - |\xi|}. \end{aligned}$$

Cette inégalité est aussi vraie pour f^k, $k \in \mathbf{N}^*$, et

$$|f^k(\xi)| \leq \|f^k\|_{\partial B} \frac{r}{r - |\xi|} \leq \|f\|_{\partial B}^k \frac{r}{r - |\xi|}.$$

Ainsi,

$$|f(\xi)| \leq \|f\|_{\partial B} \left(\frac{r}{r - |\xi|} \right)^{1/k}.$$

En passant à la limite quand $[k \to +\infty]$, on obtient que $|f(\xi)| \leq \|f\|_{\partial B}$. □

Chapitre 4

Développement en séries entières

1 Analycité des fonctions holomorphes

Définition 4.1.1 (Développement en série entière au voisinage d'un point) *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$ et $f : D \to \mathbf{C}$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de $c \in D$ s'il existe $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(c,r) \subset D$ et s'il existe $(a_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n(z-c)^n$ converge ponctuellement dans $\mathring{\mathcal{B}}(c,r)$ vers $f_{|\mathring{\mathcal{B}}(c,r)}$.*

Lemme 4.1.2 (Critère de développabilité en série entière) *Soient $\gamma : I \to \mathbf{C}$ un chemin lisse par morceaux et $f : \gamma(I) \to \mathbf{C}$ continue. On définit*

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} \setminus \gamma(I) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - c} \mathrm{d}\xi. \end{array}$$

Alors la fonction F est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus \gamma(I)$ et en tout $c \in \mathbf{C} \setminus \gamma(I)$, F est développable en série entière au voisinage de c. De plus, les coefficients $(a_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ de son développement sont définis par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{n+1}} \mathrm{d}\xi.$$

La fonction F est en fait infiniment dérivable sur $\mathbf{C} \setminus \gamma(I)$, et

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall z \in \mathbf{C} \setminus \gamma(I), \quad F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \mathrm{d}\xi.$$

Preuve. Soient $c \in \mathbf{C} \setminus \gamma(I)$ et $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(c,r) \subset \mathbf{C} \setminus \gamma(I)$. Soient $\xi \in \gamma(I)$ et $z \in \mathring{\mathcal{B}}(c,r)$. Alors

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - c - (z - c)} = \frac{1}{\xi - x} \frac{1}{1 - \dfrac{z-c}{\xi - c}} = \frac{1}{\xi - c} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-c}{\xi - c} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-c)^n}{(\xi - c)^{n+1}}.$$

Donc

$$F(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{n+1}} (z-c)^n \mathrm{d}\xi.$$

On fixe $z \in \mathring{\mathcal{B}}(c,r)$. Alors

$$\left| \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{n+1}} (z-c)^n \right| \leq \|f\|_{\gamma(I)} \frac{1}{r} \left| \frac{z-c}{\xi - c} \right|^n \leq \|f\|_{\gamma(I)} \frac{1}{r} q^n,$$

où $|q| < 1$. Ceci justifie l'interversion série-intégrale, d'où

$$F(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - c)^{n+1}} (z-c)^n \mathrm{d}\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n.$$

□

Théorème 4.1.3 (Analycité des fonctions holomorphes) *Soient $D \subset \mathbf{C}$ un ouvert, $c \in D$, $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe. Alors f est développable en séries entières au voisinage de c. Plus précisément,*

$$\forall \mathring{\mathcal{B}}(c,r) \subset D, \forall z \in \mathring{\mathcal{B}}(c,r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n,$$

avec

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial \mathring{\mathcal{B}}(c,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{n+1}} \mathrm{d}\xi.$$

Preuve. D'après la formule de Cauchy,

$$\forall z \in \mathring{\mathcal{B}}(c,r), \quad f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial \mathring{\mathcal{B}}(c,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - c} \mathrm{d}\xi.$$

Par le critère de développabilité en série entières, f est développable en série entière au voisinage de c et, en notant V un tel voisinage,

$$\forall z \in V, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-c)^n,$$

où

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_n := \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial \mathring{\mathcal{B}}(c,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{n+1}}\ d\xi.$$

□

Remarque 4.1.4 On a montré que les fonctions holomorphes sur $D \subset \mathbf{C}$ ouvert sont infiniment dérivables sur D.

Théorème 4.1.5 (Théorème de prolongement de Riemann) *Soient $D \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe sur $D \setminus \{c\}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *f se prolonge en une fonction holomorphe $f : D \to \mathbf{C}$.*
2. *f se prolonge en une fonction continue $f : D \to \mathbf{C}$.*
3. *f est bornée au voisinage de c.*
4. *$\lim_{z \to c} (z-c) f(z) = 0$.*

Preuve. Les implications $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4$ sont triviales.

$4 \implies 1$: On peut supposer que $c = 0$. Soit la fonction g définie par

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad g(z) := \begin{cases} z f(z) & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

La fonction g est continue en 0. On définit maintenant $h : D \to \mathbf{C}$ par $h(z) := z g(z)$. Alors

$$\frac{h(z) - h(0)}{z} = \frac{z g(z)}{z} = g(z) \xrightarrow[z \to 0]{} 0.$$

La fonction h est donc dérivable en 0 et est holomorphe sur $D \setminus \{c\}$. Ainsi, h est holomorphe sur D et est donc développable en série entière au voisinage de 0. On note

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Comme $h(0) = h'(0) = 0$, on a

$$h(z) = z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} z^n.$$

Notons

$$F : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{h(z)}{z^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} z^n \end{array},$$

holomorphe au voisinage de 0. Pour $z \neq 0$, $f(z) = h(z)/z^2$, donc f se prolonge en une fonction holomorphe sur D. □

Théorème 4.1.6 (Théorème des zéros isolés) *Soient $D \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $f, g : D \to \mathbf{C}$ holomorphes. Alors il y a équivalence entre*

1. *$f = g$ sur D,*
2. *$S := \{z \in D \mid f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans D,*
3. *il existe $c \in D$ tel que*
$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c).$$

Preuve. $1 \implies 2$: Trivial.

$2 \implies 3$: Soit $c \in D$ un point d'accumulation de S. Soit $h := f - g$. Alors h est holomorphe dans D. S'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $h^{(m)}(c) \neq 0$, on choisit m le plus petit entier vérifiant cette propriété. Alors sur une certaine boule $B := \mathring{\mathcal{B}}(c, r)$, on a
$$h(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(c)}{k!}(z-c)^k = (z-c)^m \underbrace{\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{h^{(k)}}{k!}(z-c)^{k-m}}_{=:h_m(z)}.$$
Mais h_m est holomorphe dans B, et
$$\forall z \in B, \quad h_m(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} z \in B \cap S \setminus \{c\} \\ \neq 0 & \text{si} z = c. \end{cases}$$
C'est impossible car h_m est continue en c. Ainsi,
$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad h^{(k)}(c) = 0.$$

$3 \implies 1$: Il existe $c \in D$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$. Posons $h := f - g$. Montrons que $h = 0$ sur D. Définissons pour tout $k \in \mathbf{N}$,
$$S_k := \{\omega \in D \mid h^{(k)}(\omega) = 0\},$$
qui est un fermé de D. Ainsi, $S := \cap_{k \in \mathbf{N}} S_k$ est un fermé non vide de D, car $c \in S$. Mais soit $z_0 \in S$, il existe $r > 0$ tel que $\mathring{\mathcal{B}}(z_0, r) \subset D$, donc
$$h(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$
avec $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, car $z_0 \in S$. Donc $h = 0$ sur $\mathring{\mathcal{B}}(z_0, r)$, donc $\mathring{\mathcal{B}}(z_0, r) \subset S$, d'où S est ouvert. Par connexité de D, $S = D$ donc $f = g$. □

Corollaire 4.1.7 *Soient $D \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f : D \to \mathbf{C}$ holomorphe, non localement constante. Alors pour tout $a \in \mathbf{C}$, $f^{-1}(\{a\})$ est un ensemble discret.*

Corollaire 4.1.8 *Soient $D \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et $\varphi :]a, b[\subset D \to \mathbf{R}$. Alors il existe au plus une fonction holomorphe $f : D \to \mathbf{C}$ telle que $f = 0$ sur $]a, b[$.*

2 Sur le concept d'holomorphie

Définition 4.2.1 (Fonction localement intégrable) *Soient $D \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $f : D \to \mathbf{C}$ continue. On dit que f est localement intégrable dans D si D peut s'écrire comme $\cup_\alpha V_\alpha$, où les V_α sont des ouverts sur lesquels f est intégrable.*

Théorème 4.2.2 *Soit $f : D \to \mathbf{C}$ continue. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est holomorphe dans D.*
2. *Pour tout triangle $T \subset D$,*
$$\int_{\partial T} f(\xi) \mathrm{d}\xi = 0.$$
3. *f est localement intégrable dans D.*
4. *Pour tout B disque ouvert tel que $\overline{B} \subset D$,*
$$\forall z \in B, \quad f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi.$$
5. *f est développable en série entière au voisinage de tout $c \in D$.*

Preuve. $1 \implies 2$: Lemme de Goursat.

$2 \implies 3$: Critère d'intégrabilité.

$3 \implies 1$: Une primitive F est holomorphe, donc est infiniment dérivable, d'où f est holomorphe.

$1 \implies 4$: Formule de Cauchy.

$4 \implies 5$: Analycité des fonctions holomorphes.

$5 \implies 1$: Toute série entière $\sum a_n (z - z_0)^n$ est holomorphe. □

Corollaire 4.2.3 *Soient D un ouvert de $\mathbf{C}$, $\gamma : I \to \mathbf{C}$ un chemin lisse par morceaux, et $g : \gamma(I) \times D \to \mathbf{C}$ continue. Alors pour tout $w \in \gamma(I)$, $g(w, \cdot)$ est holomorphe dans D et la fonction h définie par*

$$h(z) := \int_\gamma g(\xi, z)\mathrm{d}\xi$$

est holomorphe dans D.

Preuve. Soit $T \subset D$ un triangle. Par le théorème de Fubini,

$$\int_{\partial T} \left(\int_\gamma g(\xi, z)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\int_{\partial T} g(\xi, z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\xi = 0,$$

par lemme de Goursat. □

Théorème 4.2.4 (Formule de Gutzmer) *Soit une série entière $f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n$, de rayon de convergence $R > 0$. Notons pour $0 < r < R$, $M(r) := \max_{|z-c|=r} |f(z)|$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + re^{\mathrm{i}\varphi}|^2 \mathrm{d}\varphi \leq M(r)^2.$$

Preuve. Écrivons $z = c + e^{\mathrm{i}\varphi}$. Alors

$$\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a_n} \overline{z-c}^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a_n} r^n e^{-\mathrm{i}\varphi n},$$

et

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a_n} r^n f(c + re^{\mathrm{i}\varphi}) e^{-\mathrm{i}\varphi n}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(c + re^{\mathrm{i}\varphi})| \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a_n} r^n f(c + re^{\mathrm{i}\varphi}) e^{-\mathrm{i}\varphi n} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a_n} r^n \int_0^{2\pi} f(c + e^{\mathrm{i}\varphi}) e^{-\mathrm{i}\varphi n} \mathrm{d}\varphi,$$

par convergence normale. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial \mathring{\mathcal{B}}(c,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - c)^{n+1}} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + r^{\mathrm{i}\varphi})}{(re^{\mathrm{i}\varphi})^{n+1}} e\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} f(c + r^{\mathrm{i}\varphi}) e^{-\varphi n} \mathrm{d}\varphi,$$

d'où

$$2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(c + re^{\mathrm{i}\varphi}) e^{-\mathrm{i}\varphi n} \mathrm{d}\varphi.$$

□