Théorèmes de point fixe et applications

Guillaume Kineider

Thomas Harbreteau

23 avril 2020

Lecture dirigée de L3 encadrée par Zied Ammari

Année universitaire 2019/2020

Document sous license Art Libre (`http://artlibre.org`)

Sommaire

Introduction

Un point fixe d'une application f allant d'un espace E dans lui-même est défini comme étant un élément $x \in E$ vérifiant $f(x) = x$. La recherche de points fixes de certaines applications permet de résoudre de nombreux problèmes, en particulier dans la théorie des équations différentielles. Dans ce document, nous étudierons trois théorèmes de point fixe, qui donnent des conditions suffisantes d'existence d'un point fixe pour une application, en fonction de conditions portant sur la fonction elle-même ainsi que sur l'espace sur lequel elle est définie. Nous illustrerons également leur importance, en étudiant certains résultats célèbres dont les preuves reposent dessus.

Le premier théorème que nous étudierons est le théorème du point fixe de Picard-Banach. Énoncé par le mathématicien polonais Stefan Banach en 1920, dans le cadre de ses travaux sur la résolution d'équations intégrales, c'est un théorème très fort qui, sous certaines conditions, ne donne pas seulement l'existence de point fixe, mais aussi l'unicité et même une méthode itérative pour le déterminer. Ce théorème est notamment à l'origine de la méthode de Newton, de résolution numérique d'équations, ainsi que de théorèmes fondamentaux d'analyse tels que les théorèmes de Cauchy-Lipschitz et d'inversion locale.

Nous verrons ensuite le théorème de Brouwer. Prouvé en 1912 par le mathématicien Jan Brouwer, ce théorème ne garantit que l'existence de point fixe sous certaines conditions, et n'est pas constructif, contrairement au théorème de Picard Banach. Cependant, son cadre d'application est nettement plus vaste, et a même été utilisé en théorie des jeux par John Nash. Anecdote amusante, Brouwer aurait eu l'idée de ce théorème en observant sa tasse de café alors qu'il mélangeait son sucre, observant qu'au moins un point de la surface étai toujours fixe.

Enfin, nous étudierons le théorème de Schauder, une généralisation du théorème de Brouwer conjecturée en 1930 par le polonais Juliusz Schauder, qui en démontra un cas particulier. La démonstration du cas générale fût proposée par Robert Cauty en 2001. Contrairement au théorème de Brouwer, qui nécéssite l'hypothèse de dimension finie de l'espace, le théorème de Schauder est applicable en dimension infinie, et a donc des retombées importantes en analyse fonctionnelle, avec par exemple pour conséquence le théorème de Cauchy-Peano.

Chapitre 1

Autour du théorème du point fixe de Picard-Banach

1 Théorème du point fixe de Picard-Banach

Définition 1.1.1 (Application contractante) *Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to X$ une application. On dit que f est contractante s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que*

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

On pourra alors dire que f est k-contractante.

Proposition 1.1.2 *Une application contractante est continue.*

Théorème 1.1.3 (Théorème du point fixe de Picard-Banach) *Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application k-contractante. Alors*

1. *f admet un unique point fixe $a \in X$,*
2. *pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérées de x_0 par f, définie par $x_n := f^n(x_0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, converge vers a,*
3. *la convergence est géométrique,*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Preuve. Soit $x_0 \in X$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie comme dans le point 2, alors pour tous $p \geq q$,

$$d(x_p, x_q) = d(f^p(x_0), f^q(x_0)) \leq k^q d(f^{p-q}(x_0), x_0).$$

Par inégalité triangulaire et le calcul précédent,

$$\begin{aligned} d(f^{p-q}(x_0), x_0) &\leq d(f^{p-q}(x_0), f^{p-q-1}(x_0)) + \cdots + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq (k^{p-q-1} + \cdots + k + 1) d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{1}{1-k} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Ainsi, comme $0 < k < 1$,

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{k^q}{1-k} d(x_1, x_0) \xrightarrow[q \to +\infty]{} 0, \tag{$*$}$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $p, q \in \mathbf{N}$, $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Ceci montre que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. L'espace (X, d) étant complet, cette suite converge vers un certain $a \in X$. Mais f étant contractante, elle est continue donc par passage à la limite quand $[n \to +\infty]$ dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient $a = f(a)$, ce qui montre que f admet un point fixe, noté a. Notons qu'en passant à la limite quand $[p \to +\infty]$ dans la relation $(*)$ on montre que la vitesse de convergence est géométrique. Enfin, si $a' \in X$ est un point fixe de f, alors $d(f(a), f(a')) = d(a, a') \leq kd(a, a')$, donc $a = a'$. L'application f a donc un unique point fixe. □

Ce théorème reste vrai en généralisant l'hypothèse « f est contractante » par « une des itérées de f est contractante » :

Théorème 1.1.4 *Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$. On suppose qu'une certaine itérée f^p de f est k_p-contractante. Alors*

1. *f admet un unique point fixe $a \in X$,*
2. *pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérées de x_0 par f, définie par $x_n := f^n(x_0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, converge vers a,*
3. *la convergence est géométrique, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad d(x_n, a) \leq C k_p^{m/p}.$$

Preuve. On applique le théorème du point fixe de Picard-Banach à f^p, ce qui assure l'existence et l'unicité d'un point fixe $a \in X$ de f^p. En remarquant que $f^{p+1}(a) = f(f^p(a)) = f(a)$ d'une part et $f^{p+1}(a) = f^p(f(a))$ d'autre part, on obtient que $f(a)$ est un point fixe de f^p et, par unicité, $f(a) = a$. Or un point fixe de f est également point fixe de f^p d'où l'unicité du point fixe de f. De plus, pour $n \in \mathbf{N}$, on considère la division euclidienne de n par p, $n = pq + r$, pour montrer que pour tout $x_0 \in X$,

$$d(f^n(x_0), a) \leq \frac{k_p^n}{1-k} d(f^r(x_0), x_0).$$

Pour une preuve plus détaillée, on pourra consulter le Rouvière [5]. □

Le théorème du point fixe de Picard-Banach est utilisé dans les preuves de certains théorèmes fondamentaux. On pourra penser aux théorèmes d'inversion locale (Rouvière [5], exercice 71), ou encore le théorème de Cauchy-Lipschitz (Berthelin [1]).

2 Affaiblissement de l'hypothèse de contraction

En rajoutant une hypothèse de compacité, il est possible d'affaiblir l'hypothèse « f contractante » du théorème de Picard-Banach. Cependant, on perd certaines conclusions du théorème.

Théorème 1.2.1 *Soient (X, d) un espace métrique compact, non vide, et $f : X \to X$ une application vérifiant*

$$\forall x \neq y \in X, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Alors

1. *f admet un unique point fixe a,*
2. *pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérées de x_0 par f, définie par $x_n := f^n(x_0)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, converge vers a.*

Preuve.

1. Les applications f et $(x, y) \mapsto d(x, y)$ sont continues respectivement sur X et $X \times X$, donc par composition, l'application $\varphi(x) := d(x, f(x))$ est continue sur X. L'espace X étant compact, elle atteint dessus un minimum, noté $m \geq 0$. Mais alors

$$\varphi(f(m)) = d(f(m), f(f(m))) < d(m, f(m)) = \varphi(m),$$

donc par définition de m, nécessairement $f(m) = m$. Donc f admet bien un point fixe. Si $m' \in X$ est aussi un point fixe de f, on a $d(f(m), f(m')) = d(m, m') < d(m, m')$, donc $m = m'$, ce qui montre l'unicité du point fixe de f.

2. Soit $x_0 \in X$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $d(x_{n+1}, a) < d(x_n, a)$, donc la suite $(d(x_n, a))_n$ est décroissante. Elle est aussi minorée, donc converge vers un certain $l \geq 0$. Par compacité de X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ qui converge vers $b \in X$. L'application f étant continue, le passage à la limite quand $[k \to +\infty]$ dans la relation $f(x_{n_k}) = x_{n_k+1}$ montre que $(x_{n_k+1})_k$ converge vers $f(b)$. Ainsi,

$$d(x_{n_k}, a) \xrightarrow[k \to +\infty]{} d(b, a) = l,$$

$$d(f(x_{n_k}), a) \xrightarrow[k\to+\infty]{} d(f(b), a) = l.$$

Si $a \neq b$, alors

$$l = d(f(b), a) = d(f(b), f(a)) < d(a, b) = l,$$

ce qui est impossible, donc $a = b$, d'où $l = 0$ et $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

□

On peut même parfois se contenter d'une fonction 1-Lipschitz.

Théorème 1.2.2 *On note B^n la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$ pour une norme $\|\cdot\|$. Soit $f : B^n \to B^n$ une application 1-Lipschitz, alors f a un point fixe.*

Preuve. Notons pour tout $n > 0$, $f_n := (1 - 1/n)f$. Alors

$$\forall x, y \in B^n, \quad \|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f(x) - f(y)\|,$$

donc les f_n sont contractantes. Pour tout $n > 0$, f_n envoie B^n sur B^n donc par théorème du point fixe de Picard-Banach, elle admet un unique point fixe $x_n \in B^n$. Mais alors par compacité on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ qui converge vers $x \in B^n$. De plus,

$$\forall y \in B^n, \quad \|f_n(y) - f(y)\| = \frac{1}{n}\|f(y)\|,$$

donc comme f est bornée sur B^n car continue, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f. Par conséquent,

$$f_{n_k}(x_{n_k}) = x_{n_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x),$$

d'où $x = f(x)$.

□

Remarque 1.2.3 On observe ici un élément intéressant des théorèmes de point fixe. Ceux-ci associent des hypothèses sur un espace et sur une fonction pour donner l'existence d'un point fixe. Le théorème de Picard-Banach demande des hypothèses fortes sur la fonction mais l'espace est assez général. Lorsque l'on cherche à affaiblir les hypothèses sur la fonction, celles sur l'espace deviennent plus contraignantes. Dans le prochain chapitre, nous allons donner un théorème de point fixe qui nécessite un espace très précis mais qui s'applique à des fonctions seulement continues.

Chapitre 2

Théorème du point fixe de Brouwer

L'objectif de ce chapitre est de prouver le théorème du point fixe de Brouwer, qui dit que toute application continue de la boule fermée unité de $\mathbf{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe, ainsi que d'étudier l'une de ses conséquences, le théorème de Perron-Frobenius.

1 Théorème de la boule chevelue

Pour cela, nous aurons besoin d'un résultat concernant les champs de vecteurs sur la sphère unité. On notera $\mathbf{S}^n$ la sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$ ainsi que B^n la boule unité de $\mathbf{R}^n$.

Définition 2.1.1 (Champ de vecteurs tangent continue (resp. lisse)) *Soit X une partie compacte de $\mathbf{R}^n$, muni du produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Une application $v : X \to \mathbf{R}^n$ est un champ de vecteurs tangent sur X continue si v est continue (resp. lisse) et si pour tout $x \in X$, $v(x)$ est tangent à x, au sens de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dira de plus que v est non-singulier si v ne s'annule pas sur X, et qu'il est unitaire si pour tout $x \in X$, $\|v(x)\| = 1$, où $\| \cdot \|$ est la norme associée au produit scalaire.*

Remarque 2.1.2 On dira que v est lisse sur X s'il existe un ouvert $\tilde{X}$ de $\mathbf{R}^n$ contenant X ainsi qu'un champ de vecteurs $\tilde{v}$ lisse sur U dont la restriction à X est égale à v.

Remarque 2.1.3 Étant donné un champ de vecteurs tangent non-singulier, on peut obtenir un champ de vecteurs tangent non-singulier et unitaire en normalisant.

On s'intéresse à l'existence de champs de vecteurs tangent non-singuliers sur la sphère unité. Le théorème suivant permet de répondre à cette question dans le cas d'un champ lisse.

Théorème 2.1.4 *Il existe un champ de vecteurs tangent lisse, non-singulier et unitaire sur $\mathbf{S}^n$ si et seulement si n est impair.*

Preuve. Si n est impair, on peut écrire $n = 2k - 1$, et si U est un voisinage ouvert de $\mathbf{S}^n$, on peut définir pour tout $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in U$,

$$\tilde{v}(x_1, \ldots, x_{2k}) := (x_2, -x_1, \ldots, x_{2k}, -x_{2k-1}).$$

Le champ v est lisse sur U. On note v la restriction de $\tilde{v}$ à $\mathbf{S}^n$, et on vérifie que v est un champ de vecteurs lisse tangent, non-singulier et unitaire.

Si n est pair, supposons par l'absurde qu'il existe champ v de vecteurs tangent lisse, non-singulier et unitaire sur $\mathbf{S}^n$. Le champ v étant lisse sur $\mathbf{S}^n$, il existe U un voisinage ouvert de $\mathbf{S}^n$ ainsi que $\tilde{v} : U \to \mathbf{R}^{n+1}$ une application lisse sur U dont la restriction à $\mathbf{S}^n$ est v. Notons $\hat{v} : x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \tilde{v}(x/\|x\|)$ et commençons par étendre la définition de v à $\mathbf{R}^{n+1}$ en posant

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbf{R}^{n+1} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \|x\|\hat{v}(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

Par composition, cette application est lisse sur $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, et $\tilde{v}$ étant bornée sur le compact $\mathbf{S}^n$, elle est continue en 0. Définissons maintenant pour tout $t \in]0, 1]$ l'application $F_t : x \in \mathbf{R}^{n+1} \mapsto x + tw(x)$. Soit $t \in (0, 1]$, si $x \in \mathbf{S}^n$,

$$\|F_t(x)\|^2 = \|x + t\tilde{v}(x)\|^2,$$

donc comme v est tangent, par théorème de Pythagore, $\|F_t(x)\|^2 = 1+t^2$, donc $F_t(\mathbf{S}^n)$ est inclus dans la sphère S_t de centre 0 et de rayon $\sqrt{1+t^2}$.

Étape 1 : Montrons que pour t suffisamment petit, $F_t(\mathbf{S}^n) = S_t$, c'est-à-dire que pour tout $y \in S_t$, il existe $x \in \mathbf{S}^n$ tel que $F_t(x) = x + tw(x) = y$. Fixons $y_0 \in S_t$ et définissons $G_t(x) := y_0 - tw(x)$. Il s'agit de montrer que G_t admet un point fixe. Pour tout $x \in \overline{B}(0, \sqrt{1+t^2}/(1-t))$,

$$\|G_t(x)\| \leq \|y_0\| + t\|w(x)\| = \sqrt{1+t^2} + t\|x\| \leq \sqrt{1+t^2} + t\frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{1-t},$$

donc G_t envoie $K_t := \overline{B}(0, \sqrt{1+t^2}/(1-t))$ dans lui-même.

Montrons qu'elle est contractante sur ce compact. Si $x, y \in K_t$,

$$\|G_t(x) - G_t(y)\| = t\|w(x) - w(y)\|,$$

donc il suffit de montrer que w est Lipschitz. Soit $x_0 \in K_t \setminus \{0\}$, il existe $r_{x_0} > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r_{x_0}) \subset K_t \setminus \{0\}$. L'application $\hat{v}$ étant lisse sur cette boule, qui est convexe, d'après l'inégalité des accroissements finis on a

$$\forall x, y \in \overline{B}(x_0, r_{x_0}), \quad \|\hat{v}(x) - \hat{v}(y)\| \leq \sup_{z \in [x,y]} (\|\mathrm{d}\hat{v}(z)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)})\|x - y\|.$$

Mais $\mathrm{d}\hat{v}$ est continue donc bornée sur le compact $\overline{B}(x_0, r_{x_0})$, ce qui montre que $\hat{v}$ est k-Lipschitz sur cette boule, pour un certain $k > 0$. Ainsi, $\hat{v}$ est localement Lipschitz sur $K_t \setminus \{0\}$. Comme $\tilde{K}_t := K_t \setminus \mathring{B}(0,1) \subset K_t$, $\hat{v}$ est localement Lipschitz sur le compact $\tilde{K}_t$, donc est Lipschitz sur $\tilde{K}_t$. Soient $x, y \in \tilde{K}_t$ tels que $\|x\| \geq \|y\| = 1$,

$$\begin{aligned}
\|w(x) - w(y)\| &= \|\|x\|\hat{v}(x) - \hat{v}(y)\| \\
&= \|\|x\|\hat{v}(x) - \hat{v}(x) + \hat{v}(x) - \hat{v}(y)\| \\
&\leq |\|x\| - 1| + \|\hat{v}(x) - \hat{v}(y)\| \\
&\leq \|x - y\| + k\|x - y\| \\
&\leq (k+1)\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Prenons maintenant $x, y \in K_t$ tels que $\|x\| \geq \|y\| > 0$, alors on peut les diviser par $\|y\|$ et appliquer le calcul précédent. Ainsi,

$$\left\| w\left(\frac{x}{\|y\|}\right) - w\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| \leq (k+1) \left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|,$$

d'où $\|w(x) - x(y)\| \leq (k+1)\|x - y\|$. Enfin, comme $w(0) = 0$, cette inégalité est aussi vérifiée si x ou y est nul. Ceci montre que w est $(k+1)$-Lipschitz, donc si $t < 1/(k+1)$,

$$\forall x, y \in K_t, \quad \|G_t(x) - G_t(y)\| \leq t(k+1)\|x - y\|,$$

donc $G_t : K_t \to K_t$ est contractante. Mais K_t est un compact de $\mathbf{R}^{n+1}$, un espace complet, donc est complet. Par théorème du point fixe de Picard-Banach, G_t admet un point fixe $x \in K_t$, et comme $F_t(x) = y_0$, on vérifie bien que $\|x\| = 1$. Donc $F_t(\mathbf{S}^n) = S_t$. En fait, comme pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $F_t(x) = \|x\|F_t(x/\|x\|)$, on a montré que l'image par F_t de toute sphère de rayon R est une sphère de rayon $R\sqrt{1+t^2}$.

Étape 2 : Montrons que pour t suffisamment petit, F_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Notons

$$\Gamma := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid 1/2 \leq \|x\| \leq 3/2\}$$

l'espace entre les sphères de rayons 1/2 et 3/2 centrées en 0. L'application F_t est lisse sur $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\mathrm{d}F_t(x) = \mathrm{id} + t\mathrm{d}w(x)$. Comme $\mathrm{d}w$ est continue sur Γ, elle est bornée dessus par un certain $M > 0$. Alors si $t < M$, on a pour tous $x \in \mathring{\Gamma}$ et tous $h \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$\|\mathrm{d}F_t(x).h\| \geq |\|h\| - t\|\mathrm{d}w(x).h\||,$$

mais $t\|\mathrm{d}w(x).h\| \leq tM\|h\| < \|h\|$, donc $\|\mathrm{d}F_t(x).h\| > 0$. Ceci montre que $\mathrm{d}F_t(x)\|$ est injective, donc bijective, pour tous $x \in \mathring{\Gamma}$. De plus, soient $x, y \in \mathring{\Gamma}$ tels que $F_t(x) = F_t(y)$, soit $x - y = t(w(y) - w(x))$. On a montré à l'étape 1 que w était $(k+1)$-Lipschitz, donc si $t < 1/(k+1)$, on a $\|x - y\| \leq t(k+1)\|x - y\|$, donc $x = y$, donc f est injective. Par théorème d'inversion globale, F_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathring{\Gamma}$ sur $F_t(\mathring{\Gamma})$.

Étape 3 : Calculons la mesure de $F_t(\mathring{\Gamma})$ pour la mesure de Lebesgue λ. Soit t suffisamment petit pour que les résultats précédents soient vérifiés. Alors F_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur $\mathring{\Gamma}$, donc par formule de changement de variable,

$$\lambda(F_t(\mathring{\Gamma})) = \int_{F_t(\mathring{\Gamma})} \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathring{\Gamma}} |\det(F_t(x))| \mathrm{d}\lambda(x),$$

et $\det(F_t(x)) = \det(\mathrm{id} + t\mathrm{d}w(x))$ est un polynôme en t, donc $\lambda(F_t(\mathring{\Gamma}))$ est un polynôme en t. Mais d'après l'étape 2,

$$F_t(\mathring{\Gamma}) = \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \frac{\sqrt{1+t^2}}{2} \leq \|x\| \leq \frac{3\sqrt{1+t^2}}{2} \right\}.$$

Le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\sqrt{1+t^2}\mathrm{id}$ qui envoie $\mathring{\Gamma}$ sur $F_t(\mathring{\Gamma})$ montre alors que

$$\int_{F_t(\mathring{\Gamma})} \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathring{\Gamma}} \sqrt{1+t^2}^{\,n+1} \mathrm{d}\lambda = \sqrt{1+t^2}^{\,n+1} \lambda(\mathring{\Gamma}).$$

Or $n+1$ est impair, donc cette quantité n'est pas un polynôme en t. On aboutit donc à une contradiction, ce qui montre qu'il n'existe pas de champ de vecteurs tangent lisse, non singulier et unitaire sur $\mathbf{S}^n$ si n est impair, ce qui conlut la preuve. $\square$

On peut élargir ce résultat aux champs de vecteurs continues seulement.

Corollaire 2.1.5 (Théorème de la boule chevelue) *Il existe un champ de vecteurs tangent continue, non-singulier et unitaire sur* $\mathbf{S}^n$ *si et seulement si* n *est impair.*

PREUVE. Si n est impair, le théorème précédent nous assure l'existence d'un tel champ. Si n est pair, supposons par l'absurde qu'il existe un tel champ de vecteurs, noté v. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une application polynomiale $p : \mathbf{S}^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{S}^n, \quad \|p(x) - v(x)\| < \frac{1}{2}.$$

Notons $w(x) := p(x) - \langle p(x), x\rangle x$. C'est un champ de vecteurs lisse sur $\mathbf{S}^n$, qui vérifie pour tout $x \in \mathbf{S}^n$,

$$\langle x(x), x\rangle = \langle p(x), x\rangle - \langle p(x), x\rangle \underbrace{\|x\|^2}_{=1} = 0,$$

donc w est tangent à $\mathbf{S}^n$. Soit $x \in \mathbf{S}^n$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle p(x) - w(x), x\rangle = \langle p(x), x\rangle = \langle p(x), x\rangle = \langle p(x) - v(x), x\rangle < \frac{1}{2},$$

car v est tangent. Donc par définition de w, on a

$$\|p(x) - w(x)\| = \|\langle p(x), x\rangle x\| = |\langle p(x), x\rangle| < \frac{1}{2}.$$

De plus, $\|p(x) - v(x)\| < 1/2$, donc par inégalité triangulaire, $\|v(x) - w(x)\| < 1$. Mais v est unitaire, donc w est non nul. C'est donc un champ de vecteurs tangent lisse, non-singulier sur $\mathbf{S}^n$ et en le normalisant, on peut obtenir un champ unitaire possédant les mêmes propriétés. Puisque n est pair, ceci contredit le théorème précédent, donc un tel champ n'existe pas. $\square$

2 Théorème du point fixe de Brouwer

On peut désormais énoncer et démontrer le théorème de Brouwer.

Théorème 2.2.1 (Théorème du point fixe de Brouwer) *Toute application continue de la boule unité fermée de* $\mathbf{R}^n$ *dans elle-même admet un point fixe.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une application continue $f : B^n \to B^n$ sans point fixe. On va construire à partir de f un champ de vecteurs tangent continue et non-singulier sur $\mathbf{S}^n$. Considérons l'application

$$w : \begin{array}{ccc} B^n & \longrightarrow & R^n \\ x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)(1 - \langle x, x\rangle)}{1 - \langle x, f(x)\rangle} \end{array}.$$

La définition est légitime car le dénominateur ne s'annule pas. En effet, supposons qu'il existe $x \in B^n$ tel que $1 = \langle x, f(x)\rangle$. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$1 = \langle x, f(x)\rangle \leq \|x\|\|f(x)\| \leq 1,$$

car $f(x), x \in B^n$, donc $\|x\| \leq 1$ et $\|f(x)\| \leq 1$. Ainsi, on a nécéssairement $\|x\| = \|f(x)\| = 1$. De plus, le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous assure l'existence d'un $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$, et donc comme $\langle f(x), x\rangle = 1$, on a $\lambda\|x\|^2 = \lambda = 1$. Mais alors $f(x) = x$, ce qui contredit le fait que f n'a pas de point fixe. Donc $\langle f(x), x\rangle \neq 1$.

L'application f étant continue sur B^n, w l'est aussi. Notons pour $X \in \mathbf{S}^n$, $X = (x, t)$, où $x \in \mathbf{R}^n$ correspond à ses n premières coordonnées et $t \in \mathbf{R}$ sa dernière coordonnée. Le fait que $X \in \mathbf{S}^n$ implique que $x \in B^n$ et $t \in [-1, 1]$. On définit

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbf{S}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ X = (x,t) & \longmapsto & (-tw(x), \langle x, w(x)\rangle). \end{array}$$

L'application w étant continue sur B^n, v est continue sur $\mathbf{S}^n$ et

$$\forall X = (x,t) \in \mathbf{S}^n, \quad \langle v(X), X\rangle = -t\langle w(x), x\rangle + t\langle x, w(x)\rangle = 0,$$

donc v est tangent à $\mathbf{S}^n$. Enfin, si $X = (x, t) \in \mathbf{S}^n$, alors

$$v(X) = 0 \iff (-tw(x), \langle w(x), x\rangle) = 0.$$

— Si la famille $(x, w(x))$ est liée, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ et donc

$$\begin{aligned} \langle w(x), x\rangle &= \|x\|^2 - \frac{(1 - \|x\|^2)\langle f(x), x\rangle}{1 - \langle f(x), x\rangle} \\ &= \|x\|^2 - \frac{(1 - \|x\|^2)\lambda\|x\|^2}{1 - \lambda\|x\|^2} \\ &= \frac{-\lambda\|x\|^4 + \|x\|^2 - (1 - \|x\|^2)\lambda\|x\|^2}{1 - \lambda\|x\|^2} \\ &= \frac{\|x\|^2(1 - \lambda)}{1 - \lambda\|x\|^2}, \end{aligned}$$

donc $\lambda = 1$, ce qui est impossible car f n'admet aucun point fixe. Donc $\langle w(x), x\rangle \neq 0$.

— Si la famille $(x, w(x))$ est libre, alors $w(x) \neq 0$.
  — Si $x \in \mathbf{S}^{n-1}$, alors $w(x) = x$, donc $\langle w(x), x\rangle = \|x\|^2 \neq 0$.
  — Si $x \in \mathring{B}^n$, comme $X = (x, t) \in \mathbf{S}^n$, $t \neq 0$ sinon on aurait $\|X\| < 1$. Donc $tw(x) \neq 0$.

Finalement, $(-tw(x), \langle w(x), x\rangle) \neq 0$, donc v ne s'annule pas sur $\mathbf{S}^n$. Par conséquent, v est un champ de vecteurs tangent continue, non singulier sur $\mathbf{S}^n$. Quitte à le normaliser, on peut le supposer aussi unitaire.

Mais à partir de l'application f, on peut construire

$$g : \begin{array}{ccc} B^{n+1} & \longrightarrow & B^{n+1} \\ X = (x,t) & \longmapsto & (f(x), 0). \end{array},$$

une application de B^{n+1} dans elle-même, continue et sans point fixe. De la même manière que précédemment, on construit un champ de vecteurs tangent continue, non-singulier et unitaire sur $\mathbf{S}^{n+1}$. Les entiers n et $n+1$ étant de parités différentes, ceci contredit le théorème de la boule chevelue, et donc montre que f admet bien un point fixe. □

Le cadre d'application du théorème du point fixe de Brouwer, à première vue limité, peut en fait être étendu à tout espace homéomorphe à la boule unité fermée.

Proposition 2.2.2 *Soit X un espace homéomorphe à B^n, pour un entier n quelconque. Alors toute application continue de X dans lui-même admet un point fixe.*

Preuve. Soit $\phi : B^n \to X$ un homéomorphisme et $f : X \to X$ une application continue. Alors l'application $\phi \circ f \circ \phi^{-1} : B^n \to B^n$ est continue, donc admet un point fixe $x_0 \in B^n$ d'après le théorème de Brouwer. Ainsi, $f(\phi^{-1}(x_0)) = \phi^{-1}(x_0)$, donc f admet un point fixe. □

3 Classification des espaces homéomorphes à une boule unité fermée

Au vu de la dernière proposition, il est naturel de s'intéresser à quels espaces sont homéomorphes à une boule unité fermée. Cette partie vise à montrer que ces espaces sont exactement les convexes compacts non vides d'espaces vectoriels normés de dimension finie.

Définition 2.3.1 (Jauge d'un convexe) *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $C \subset E$ un convexe dont l'intérieur contient 0. L'application*

$$\rho_C : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & \inf\left\{t > 0 \mid \dfrac{x}{t} \in C\right\} \end{array}$$

est appelée la jauge du convexe C.

Remarque 2.3.2 L'intérieur de C contenant 0, ρ_C est bien définie.

Proposition 2.3.3 *La jauge d'un convexe est une application continue.*

Preuve. Commençons par montrer que ρ_C est sous-additive. Soient $\varepsilon > 0$ et $x, y \in E$. Notons

$$\bar{x} := \frac{x}{\rho_C(x) + \varepsilon}, \quad \text{et} \quad \bar{y} := \frac{y}{\rho_C(y) + \varepsilon},$$

alors

$$\rho_C(\bar{x}) = \frac{\rho_C(x)}{\rho_C(x) + \varepsilon} < 1,$$

et de même $\rho_C(\bar{y}) < 1$. Il existe donc $0 < t < 1$ tel que $\bar{x}/t \in C$, et $0 \in C$ donc par convexité de C, $\bar{x} \in C$. De même, $\bar{y} \in C$. On pose maintenant

$$\alpha := \frac{\rho_C(x) + \varepsilon}{\rho_C(x) + \rho_C(y) + 2\varepsilon}, \quad \text{et} \quad \bar{z} := \alpha\bar{x} + (1 - \alpha)\bar{y}.$$

Par convexité de C, $\bar{z} \in C$, soit $\bar{z}/1 \in C$, d'où $\rho_C(\bar{z}) \leq 1$. Mais

$$\bar{z} = \frac{x + y}{\rho_C(x) + \rho_C(y) + 2\varepsilon},$$

donc $\rho_C(x + y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y) + 2\varepsilon$. En prenant la limite quand $[\varepsilon \to 0]$, on obtient la sous-additivité de ρ_C.

Étant donné que $0 \in \mathring{C}$, il existe $r > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}(0, r) \subset C$. Alors

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \frac{x}{\|x\|} r \in C,$$

donc

$$\forall x \in E, \quad \rho_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}.$$

Par sous-additivité de ρ_C, si $x, y \in E$, alors

$$\rho_C(x) \leq \rho_C(x + y) + \rho_C(-y),$$

$$\rho_C(x + y) \leq \rho_C(x) + \rho_C(y),$$

donc

$$|\rho_C(x + y) - \rho_C(x)| \leq \max(\rho_C(y), \rho_C(-y)) \leq \frac{\|y\|}{r}.$$

Ceci montre que ρ_C est Lipschitz, donc continue sur E. □

Théorème 2.3.4 *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \in \mathbf{N}$ et $C \subset E$ un convexe compact d'intérieur non vide. Alors C est homéomorphe à B^n.*

PREUVE. Une translation étant un homéomorphisme, quitte à translater C, on peut supposer que $0 \in \mathring{C}$. Notons

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \rho_C(x)\dfrac{x}{\|x\|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{array} \right. \end{array}$$

Cette application est continue sur $E \setminus \{0\}$ car ρ_C l'est et on a montré précédemment qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \rho_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r},$$

ce qui montre la continuité en 0. C'est de plus une bijection, de réciproque

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\|x\|}{\rho_C(x)}x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{array} \right. \end{array}$$

qui est continue sur $E \setminus \{0\}$. Mais C est compact, donc borné, donc il existe $R > 0$ tel que $C \subset \overline{\mathcal{B}}(0, R)$, et donc

$$\forall x \in E, \quad (R+1)\frac{x}{\|x\|} \notin C,$$

d'où $\rho_C(x) \geq \|x\|/(R+1)$. Ceci montre que f^{-1} est également continue, et donc f est un homéomorphisme. Soit $x \in B^n$, alors par définition de ρ_C, il existe $t > \rho_C(x)$, $x/t \in C$. L'ensemble C étant convexe, pour tout $s \in]\rho_C(x), t]$, $x/s \in C$ donc C étant fermé, $x/\rho_C(x) \in C$. Ainsi, si $\|x\| = 1$, $f^{-1}(x) \in C$. Si $\|x\| < 1$, alors par convexité de C, $f^{-1}(x) \in C$. Donc $f^{-1}(B^n) \subset C$. Réciproquement, si $x \in C$, alors $x/1 \in C$, donc $\rho_C(x) \leq 1$ et donc $\|f(x)\| \leq 1$. Ainsi, $f(x) \in B^n$, d'où $x \in f^{-1}(B_n) = (f^{-1})(B_n)$. Ceci montre bien que $f^{-1}(B^n) = C$, ce qui conclut. $\square$

Théorème 2.3.5 *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $C \subset E$ un convexe compact non vide de E. Alors il existe un entier n tel que C soit homéomorphe à B^n.*

PREUVE. Considérons F le sous-espace affine engendré par C, qui est de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$, muni de la topologie induite. Alors l'intérieur de C est non vide dans F, et il suffit d'appliquer la proposition précédente. $\square$

4 Applications du théorème de Brouwer

Le théorème de Brouwer a de nombreuses applications, nous allons détailler dans cette partie une application à plusieurs milliards de dollars, l'algorithme PageRank à l'origine de Google. Plus exactement, il permet de prouver le théorème de Perron-Frobenius qui donne l'existence de la solution cherchée par l'algorithme.

4.1 Théorème de Perron-Frobenius

Définition 2.4.1 (Matrices et vecteurs positifs) *Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est positive (resp. strictement positive) si $a_{ij} \geq 0$ (resp. $a_{ij} > 0$) pour tout $1 \leq i, j \leq n$. De la même manière, un vecteur $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est positif (resp. strictement positif) si $x_i \geq 0$ (resp. $x_i > 0$) pour $1 \leq i \leq n$.*

Soit $n \leq 2$ un entier naturel. Dans cette partie, toutes les matrices sont carrées d'ordre n, les vecteurs sont dans $\mathbf{R}^n$ et identifiés à des matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Nous noterons $\mathrm{Spec}(A)$ le spectre de la matrice A et $r(A)$ son rayon spectral. On considère la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbf{C}^n$ définie par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. On note de même sa norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on montre facilement qu'alors pour toute matrice M, elle vérifie

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Si v et w sont des vecteurs, $v \leq w$ signifiera $w - v$ est positif. Enfin si v est un vecteur, nous noterons $|v|$ le vecteur dont les composantes sont les modules de celles de v. L'inégalité triangulaire donne alors que si A est une matrice et v un vecteur,

$$|Av| \leq |A||v|.$$

Commençons par deux lemmes assez simples.

Lemme 2.4.2 *Soient A une matrice, v et w des vecteurs.*

1. *On suppose $A \geq 0$, alors*
   (a) *si $v \leq w$, alors $Av \leq Aw$;*
   (b) *si $0 \leq v$, alors $0 \leq Av$.*
2. *On suppose $A > 0$, alors*
   (a) *si $v \leq w$ et s'il existe $1 \leq i_0 \leq n$ tel que $v_{i_0} < w_{i_0}$, alors $Av < Aw$;*
   (b) *si $v \geq 0$ et si $v \neq 0$, alors $Av > 0$.*

Preuve. Montrons les points 1.(a) et 2.(a), les deux autres en découlent immédiatement. Il suffit de voir que la i-ème composante de $A(w - v)$ est :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(w_j - v_j).$$

Pour le point 1, remarquer que tous les termes de la somme sont positifs suffit pour conclure.
Pour le point 2, il faut ajouter que le i_0-ème terme est strictement positif. □

Lemme 2.4.3 *Soient A une matrice, $p \in \mathbf{N}$ tel que $A^p > 0$ et v un vecteur propre de A. Alors, si v est positif, il est en fait strictement positif $v > 0$.*

Preuve. On suppose d'abord que $p = 1$. Le vecteur v ne peut être nul car c'est un vecteur propre, le lemme précédent assure donc que $Av > 0$. Or $Av = \lambda v$ donc v ne peut avoir de composante nulle.
Pour le cas général, on remarque qu'un vecteur propre de A est également vecteur propre de A^p, donc le point précédent donne bien $v > 0$. □

On peut maintenant énoncer et démontrer une version assez générale du théorème de Perron-Frobenius :

Théorème 2.4.4 (Perron-Frobenius) *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice réelle, strictement positive.*

1. *La matrice A possède $r(A)$ pour valeur propre.*
2. *Il existe un vecteur propre strictement positif v associé à $r(A)$.*
3. *L'espace propre associé à $r(A)$ est une droite vectorielle.*
4. *Il n'y pas de vecteur propre positif de A associé à une autre valeur propre que $r(A)$.*
5. *La valeur propre $r(A)$ vérifie :*

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \leq r(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right).$$

Preuve. Montrons 1. et 2. : On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $\|\cdot\|_1$ précédemment définie et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée associée, notée $\|\cdot\|_1$ également. On considère le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$

$$S := \{v = (v_1, ..., v_n) \mid \|v\|_1 = 1,\ v \geq 0 \ \text{ et } r(A)v \leq Av\}.$$

Cet ensemble est borné par définition, fermé comme intersections de fermés (pour la norme considérée ici mais elles sont toutes équivalentes) donc compact. Il est également convexe : si $u, v \in S$, la positivité de u et v permet d'avoir

$$\forall t \in [0,1],\ \|tu + (1-t)v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} tu_i + (1-t)v_i = t\sum_{i=1}^{n} u_i + (1-t)\sum_{i=1}^{n} v_i = t\|u\|_1 + (1-t)\|v\|_1,$$

et le reste est très facile à montrer. Soit λ une valeur propre de module $|\lambda| = r(A)$ et v un vecteur propre normé associé : $\|v\|_1 = 1$. Alors,

$$r(A)|v| = |\lambda v| = |Av| \leq A|v|,$$

ce qui montre que $|v| \in S$ donc en particulier S est non vide. Par théorème, il est homéomorphe à la boule unité de $\mathbf{R}^n$. On définit alors la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S \\ v & \longmapsto & \dfrac{Av}{\|Av\|_1} \end{array} \right. .$$

Vérifions que f est bien définie. Si $u \in S$, $\|u\|_1 = 1$ donc u est non nul et $A > 0$ donc le premier lemme montre que $\forall u \in S,\ Au > 0$. Il est alors clair que si $u \in S$, $f(u) \geq 0$, $\|f(u)\|_1 = 1$ et enfin :

$$r(A)f(u) = \frac{1}{\|Au\|_1} A(r(A)u) \leq \frac{1}{\|Au\|_1} AAu = Af(u),$$

donc $f(S) \subset S$. La fonction f est clairement continue donc par théorème de Brouwer, il existe un point fixe u de f :

$$Au = \mu u \ \text{ avec } \mu = \|Au\|_1 ,$$

et par le second lemme $u > 0$. Or puisque $u \in S$, on a $r(A)u \leq Au = \mu u$ d'où $r(A) \leq \mu$ ce qui implique $\mu = r(A)$.

Montrons 3. : Soit v un vecteur propre associé à $r(A)$ linéairement indépendant de u. Puisque $u > 0$, notons t le réel défini par

$$t := \max_{1 \leq i \leq n} \frac{v_i}{u_i}.$$

Alors, si $i \in [\![1, n]\!]$,

$$tu_i - v_i \geq \frac{v_i}{u_i} u_i - v_i \geq 0,$$

avec égalité pour au moins une composante mais pas pour toutes par indépendance. Ainsi $tu - v$ est un vecteur propre positif de A strictement positive et par lemme il doit être strictement positif ce qui donne une contradiction.

Montrons 4. : La matrice A^T est strictement positive et possède le même spectre que A. Par ce qui précède, il existe un vecteur strictement positif tel que $A^T w = r(A)w$. Supposons alors que z soit un vecteur propre positif associé à une valeur propre λ différente de $r(A)$. On a :

$$\lambda \langle w, z \rangle = \langle w, \lambda z \rangle = \langle w, Az \rangle = \langle A^T w, z \rangle = r(A) \langle w, z \rangle,$$

et puisque $\lambda \neq r(A)$, on doit avoir $\langle w, z \rangle = 0$, impossible car $w > 0$, $z \geq 0$ et $z \neq 0$.

Montrons 5. : On rappelle que u est un vecteur propre unitaire (pour $\|\cdot\|_1$) et strictement positif associé à $r(A)$. En particulier,

$$r(A) = \|Au\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} u_j = \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

On peut alors utiliser l'encadrement pour $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

et puisque $\sum\limits_{j=1}^{n} u_j = 1$, on obtient :

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq r(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

On voudrait "inverser les indices". Pour cela il suffit de reproduire la même preuve en remplaçant A par sa transposée A^T qui est également strictement positive donc admet un vecteur propre unitaire et strictement positif associé à $r(A)$.

□

Remarque 2.4.5 Le théorème de Perron-Frobenius peut être élargi à l'ensemble des matrices positives et irréductibles mais le théorème énoncé plus haut est suffisant pour montrer l'efficacité du théorème du point fixe de Brouwer. Dans le but d'expliquer l'algorithme PageRank, nous avons besoin d'un théorème analogue pour les matrices stochastiques (qui sont positives mais pas nécessairement strictement) :

Définition 2.4.6 (Matrice stochastique) *Une matrice $A = (a_{ij})$ est dite stochastique si elle vérifie*

$$\begin{cases} & A \geq 0 \\ \forall j \in [\![1, n]\!] & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \end{cases}$$

Théorème 2.4.7 (Perron-Frobenius stochastique) *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice stochastique.*

1. *La matrice A possède $r(A) = 1$ pour valeur propre.*
2. *Il existe un vecteur propre positif associé à 1.*

Preuve.

1. Le démonstration du deuxième point montrera que $r(A)$ est valeur propre mais on peut aussi le faire de façon plus élémentaire. On a :

$$A^T \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc 1 est valeur propre de A^T. Or $\det(A) = \det(A^T)$, ce qui entraîne que A et A^T aient même polynôme caractéristique donc même spectre d'où $1 \in \mathrm{Spec}(A)$.
De plus,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

donc en particulier toute matrice stochastique est unitaire pour cette norme, qui est subordonnée, et un résultat d'algèbre linéaire donne alors $r(A) \leq 1$, d'où $r(A) = 1$.

2. La matrice A n'est pas forcément strictement positive. Cette propriété servait dans la preuve de la version "strictement positive" pour assurer que le vecteur propre positif était en fait strictement positif, ce qu'on ne demande pas ici, et pour vérifier qu'on ne divisait pas par 0 dans la définition de

$$f : \left| \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S \\ v & \longmapsto & \dfrac{Av}{\|Av\|_1} \end{array} \right.,$$

où

$$S := \{v = (v_1, ..., v_n) \mid \|v\|_1 = 1,\ v \geq 0 \ \text{ et } v \leq Av\}.$$

Mais ici, par la définition de matrice stochastique, si $v \in S$,

$$\|Av\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \|v\|_1 = 1,$$

donc f est encore bien définie et continue, et on conclut de la même manière par le théorème de Brouwer.

$\square$

4.2 L'algorithme PageRank pour Google

Le problème qui consiste à chercher une information sur Internet semble presque impossible à première vue : une immense bibliothèque avec des milliards de pages, pas de classification naturelle, n'importe qui peut ajouter n'importe quoi... Auparavant, dans les années 90, les premiers moteurs de recherche fonctionnaient avec des algorithmes d'analyse de texte. Tout était décidé par le contenu des pages, ce qui peut sembler naturel. Mais en réalité la taille du web est telle que ce n'est plus envisageable. Le moteur de Google est a priori encore aujourd'hui basé sur l'algorithme PageRank (du nom de son inventeur Larry Page en 1996). Le fonctionnement de Google est le suivant :

1. Un parcours des pages à accès publique est effectué pour indexer les pages par un système de mots-clés (un peu comme les premiers moteurs de recherche).
2. Une note d'importance, appelée PageRank, est attribuée à chaque page (qui est indépendante du contenu de la page).

L'algorithme PageRank qui nous intéresse ici réalise la deuxième partie de l'algorithme. Nous allons voir qu'il est permis par le théorème de Perron-Frobenius stochastique qui est démontré grâce au théorème de point fixe de Brouwer. La version donnée ici est évidemment bien simplifiée.
Il s'agit d'un classement par "affinité de liens" dans lequel un lien agit comme un vote. Une page contenant un lien vers une autre donne un "vote" pour cette page ce qui augmente son PageRank. Et plus une page est importante, plus son vote a de poids. Le calcul du PageRank est réalisé environ une fois par mois.
Pour donner une idée du calcul, supposons que la page A est pointée par les pages $T_1, \ldots, T_n$. La fonction donnant le PageRank d'une page sera noté PR. On pourrait imaginer une formule du type :

$$PR(A) = \sum_{j=1}^{n} PR(T_j).$$

Mais pour éviter la création de pages et de liens pour augmenter artificiellement le PageRank de certaines pages, la contribution de chaque page est pondérée par le nombre total de liens qu'elle contient. On suppose pour simplifier qu'il ne peut y avoir qu'un seul lien sortant par page. Donc si on note n_j le nombre total de pages pointées par T_j et $t_{A,j}$ le nombre qui vaut 1 s'il y a un lien sortant de T_j vers A et 0 sinon pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$PR(A) = \sum_{j=1}^{n} \frac{t_{A,j}}{n_j} PR(T_j)$$

On considère maintenant les N pages constituant Internet $T_1, ..., T_N$. On note encore n_j le nombre total de pages pointées par T_j et $t_{i,j}$ le nombre qui vaut 1 s'il y a un lien de de T_j vers T_i et 0 sinon. Par ce qui précède :

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\},\ PR(T_i) = \sum_{j=1}^{N} \frac{t_{i,j}}{n_j} PR(T_j). \tag{$*$}$$

On appelle alors matrice de liens la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ définie par $a_{ij} = \frac{t_{i,j}}{n_j}$ pour $(i,j) \in [\![1, N]\!]^2$. En particulier,

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2,\ a_{ij} \geq 0 \\ \forall j \in [\![1, N]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{N} a_{ij} = \dfrac{1}{n_j} \sum\limits_{i=1}^{N} t_{i,j} = 1, \end{cases}$$

donc A est stochastique. On considère $X = (x_i)$ le vecteur tel que $x_i = PR(T_i)$ et $Y = \frac{1}{\|X\|_1} X$. La formule $(*)$ montre que :

$$AY = Y,\ Y \geq 0,\ \|Y\|_1 = 1$$

L'existence de ce vecteur est alors donné par le théorème de Perron-Frobenius stochastique.

Remarque 2.4.8 En réalité, l'algorithme est probabiliste puisque l'on ajoute un facteur aléatoire dans le calcul du PageRank.

Chapitre 3

Le théorème du point fixe de Schauder

1 Et en dimension infinie ?

La caractérisation des ensembles homéomorphes à B^n dans un espace vectoriel normé de dimension finie permet d'énoncer le théorème de Brouwer sous cette forme :

Théorème 3.1.1 (Théorème du point fixe de Brouwer) *Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, C une partie compacte, convexe et non vide de E et $f : C \to C$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe.*

Cette forme est intéressante pour au moins deux raisons. Premièrement, elle permet de comprendre pourquoi ce théorème se révèle faux en dimension infinie. En effet l'hypothèse de compacité est primordiale, or la boule unité n'est compacte qu'en dimension finie ! Deuxièmement, elle montre les arguments vraiment essentiels pour une éventuelle généralisation, et effectivement, sous des hypothèses très proches, nous obtiendrons un théorème de point fixe en dimension infinie.

Ce paragraphe consiste à donner un contre-exemple au théorème de Brouwer lorsque l'espace vectoriel normé de dimension finie est remplacé par une généralisation assez simple : un espace de Hilbert de dimension infinie, qui admet une base hilbertienne.
Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \| \cdot \|)$ un espace de Hilbert de dimension infinie admettant une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, et dont on note $\mathcal{B}$ la boule unité. On considère la fonction auxiliaire :

$$T : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ x = \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} a_n e_n & \longmapsto & \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} a_n e_{n+1} \end{array} \right. .$$

On voit facilement que T est linéaire et préserve la norme :

$$\|T(x)\| = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |a_n|^2 = \|x\|.$$

En particulier T est continue, de norme 1. On pose

$$f : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}(1 - \|x\|)e_0 + T(x) \end{array} \right.$$

Montrons que f induit une fonction continue $f_{|\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ qui ne possède aucun point fixe.
La continuité de T donne celle de f. De plus, si $x \in \mathcal{B}$,

$$\|f(x)\| \leq \frac{1}{2}(1 - \|x\|) + \|T(x)\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|x\| \leq 1,$$

donc $f_{|\mathcal{B}}$ laisse stable $\mathcal{B}$. Renommons f l'application induite $f_{|\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ et montrons qu'elle n'admet aucun point fixe. Supposons par l'absurde que $x = \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} a_n e_n$ soit un point fixe de f.

— Si $x = 0$, l'équation $f(x) = x$ donne $\frac{1}{2}e_0 = 0$ ce qui est absurde. Donc x est non nul.

— Si $\|x\| = 1$, on obtient $x = T(x)$ soit $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e_n = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e_{n+1}$ ce qui mène à $a_n = a_{n-1}$ pour $n \in \mathbf{Z}$, soit par récurrence $a_n = a$ pour tout entier n, avec $a \neq 0$ par le cas précédent. Mais alors $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |a|^2$, or la série $\sum |a|^2$ diverge grossièrement donc $0 < \|x\| < 1$.

— L'équation $f(x) = x$ donne après identification sur la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$:

$$\begin{cases} \forall n \neq 0,\ a_n - a_{n-1} = 0 \\ a_0 - a_{-1} = \frac{1}{2}(1 - \|x\|) > 0 \end{cases},$$

ce qui donne $\cdots = a_{-2} = a_{-1} < a_0 = a_1 = \ldots$, contradictoire avec $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |a_n|^2 < +\infty$.

On a donc bien montré que f n'admettait pas de point fixe.

2 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème de Brouwer ne s'applique malheureusement qu'en dimension finie, ce qui rend son utilisation limitée en calcul intégral ou pour les équations différentielles. Cependant il possède une généralisation en dimension infinie qui est le théorème du point fixe de Schauder dont nous verrons deux exemples d'applications dans ces domaines.

Théorème 3.2.1 (Point fixe de Schauder) *Soit V un espace vectoriel topologique localement convexe, C une partie compacte, convexe et non vide de V et $f : C \to C$ une fonction continue. Alors, f admet un point fixe.*

La démonstration dans le cas général est assez longue ; nous décidons de l'omettre ici. On peut néanmoins énoncer et démontrer ce théorème dans un cadre plus restreint, mais suffisant pour la suite.

Théorème 3.2.2 (Point fixe de Schauder) *Soient E un espace de Banach et $C \subset E$ un convexe compact non vide. Alors toute application continue $f : C \to C$ possède un point fixe.*

PREUVE. Soit $f : C \to C$ une application continue. Par théorème de Heine, C étant compact, f est uniformément continue sur C. Soit $\varepsilon > 0$, on prend $\delta > 0$ un module d'uniforme continuité de f. L'ensemble C étant compact, du recouvrement

$$C \subset \bigcup_{x\in C} \mathring{\mathcal{B}}(x, \delta),$$

on peut extraire un recouvrement fini

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{\mathcal{B}}(x_i, \delta).$$

Notons $F := \mathrm{Vect}(f(x_1), \ldots, f(x_n))$, un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. L'ensemble $C^* := C \cap F$ est alors un convexe compact de dimension finie.

On considère une partition de l'unité continue associée à ce recouvrement, i. e. des fonctions $\chi_1, \ldots, \chi_n$ telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

— $\chi_i \in \mathcal{C}^0(C, \mathbf{R})$,

— $\forall x \notin \mathring{\mathcal{B}}(x_i, \delta), \quad \chi_i(x) = 0$,

— $0 \leq \chi_i \leq 1$,

— $\forall x \in C, \quad \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x) = 1$.

L'application

$$g : x \in C^* \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x) f(x_i)$$

est alors continue, et par convexité de C^*, g est à valeurs dans C^*, un convexe compact non vide. D'après le théorème du point fixe de Brouwer, g admet un point fixe $x_\varepsilon \in C^*$, et donc

$$f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon = f(x_\varepsilon) - g(x_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x_\varepsilon)(f(x_\varepsilon) - f(x_j)).$$

Les χ_i étant nulles en dehors de $\mathring{\mathcal{B}}(x_i, \delta)$, si $\chi_i(x_\varepsilon) \neq 0$, alors $\|x_\varepsilon - x_i\| < \delta$, donc $\|f(x_\varepsilon) - f(x_i)\| < \varepsilon$, d'où

$$\|f(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| \leq \sum_{i=1}^{n} \chi_i(x_\varepsilon)\varepsilon = \varepsilon.$$

On définit ainsi une suite $(x_{1/n})_{n>0}$ d'éléments de C^*, un compact, dont on peut extraire une sous-suite $(x_{1/n_k})_k$ convergeant vers $y \in C^*$. La fonction f étant continue, le passage à la limite quand $[k \to +\infty]$ dans l'inégalité précédente montre que $f(y) = y$, et donc f admet un point fixe sur C. $\square$

Remarque 3.2.3 Ce théorème est souvent utilisé pour montrer l'existence de fonctions solutions d'une équation intégrale ou différentielle. L'ensemble C considéré est alors un ensemble de fonctions donc le théorème de Schauder est souvent utilisé après le théorème d'Ascoli.

3 Solutions d'équations intégrales

On se place ici dans un espace compact (et séparé) X muni d'une mesure finie. On note $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs complexes que l'on muni de la norme sup $\|f\|_\infty = \max_{x \in X} |f(x)|$.

Proposition 3.3.1 *Soit X un espace compact, μ une mesure finie régulière sur X et $K : X \times X \to X$ continue. Alors, l'équation*

$$f(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

admet toujours une solution dans $\mathcal{C}(X)$.

Preuve. On définit l'opérateur linéaire

$$T : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X) \\ f & \longmapsto & T(f) : \left| \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_X K(x, y) f(y) d\mu(y) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On voit facilement grâce aux hypothèses que T est bien définie. Nous cherchons à montrer que T admet un point fixe. Soient $f \in \mathcal{C}(X)$ et $x \in X$,

$$|T(f)(x)| = \left| \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y) \right| \leq \|K\| \|f\|_\infty \mu(X).$$

Pour simplifier nous choisissons μ pour que $\|K\|\mu(X) = 1$. Alors $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et T est une application linéaire continue. On note $\mathcal{B}$ la boule unité de $\mathcal{C}(X)$. Montrons que $\overline{T(\mathcal{B})}$ vérifie les hypothèses du théorème de Schauder.
La boule unité $\mathcal{B}$ est convexe et T est linéaire donc $T(\mathcal{B})$ est également convexe. De plus, la convexité est stable par l'opérateur d'adhérence donc $\overline{T(\mathcal{B})}$ est convexe.
Pour montrer sa compacité nous allons utiliser le théorème d'Ascoli. L'espace X est compact et K est continue donc, par théorème de Heine, elle est uniformément continue. Soit $\epsilon > 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in X, \forall y \in X, \quad \|x - x'\| \leq \delta \implies |K(x, y) - K(x', y)| \leq \epsilon.$$

Soient alors $x, x' \in X$ tels que $\|x - x'\| \leq \delta$. On a

$$|T(f)(x) - T(f)(x')| \leq \int_X |K(x, y) - K(x', y)| |f(y)| d\mu(y) \leq \epsilon \|f\|_\infty,$$

ce qui montre que $T(\mathcal{B})$ est équicontinue et $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ assure qu'il est uniformément borné, d'où la compacité de $\overline{T(\mathcal{B})}$ par théorème d'Ascoli et aussi que $T(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, or $\mathcal{B}$ est fermée donc a fortiori $\overline{T(\mathcal{B})} \subset \mathcal{B}$ d'où

$$T\left(\overline{T(\mathcal{B})}\right) \subset T(\mathcal{B}) \subset \overline{T(\mathcal{B})},$$

et $\overline{T(\mathcal{B})}$ est T-stable donc le théorème de Schauder donne l'existence d'un point fixe $f \in \overline{T(\mathcal{B})} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}(X)$ ce qui achève la preuve. $\square$

Théorème 3.3.2 (Théorème de Cauchy-Peano) *Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, Ω un ouvert de $\mathbf{R}$ et $f : (t,x) \in I \times \Omega \mapsto f(t,x) \in \mathbf{R}^n$ une application continue. On considère le problème de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) & = & f(t,x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0. \end{array} \right. \tag{Σ}$$

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe $T > 0$ et $x \in \mathcal{C}^1(]t_0 - T, t_0 + T[), \mathbf{R}^n)$ solution de (Σ).

Preuve. Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$.

Étape 1 : Montrons qu'il existe un cylindre de sécurité pour (Σ). Soit $T_0 > 0$ tel que $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \subset I$ et soit $r_0 > 0$ tel que $\overline{\mathcal{B}}(x_0, r_0) \subset \Omega$. Soit x une solution de (Σ) sur $[t_0 - T_0, t_0 + T_0]$. Par continuité de x, on peut définir $0 < T_x \leq T_0$ le plus petit $t > 0$ tel que $\|x(t) - x_0\| \geq r_0$. Si x ne sort jamais de la boule, on pose $T_x = T_0$. Alors

$$\forall t \in [t_0 - T_x, t_0 + T_x], \quad \|x(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|\mathrm{d}s \right|,$$

mais la fonction f est continue sur le compact $[t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$, donc est majorée dessus par un certain $M > 0$. Ceci permet d'écrire que

$$\forall t \in [t_0 - T_x, t_0 + T_x], \quad \|x(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\|\mathrm{d}s \right| \leq M|t - t_0| \leq M|T_x - t_0| \leq M|T_0 - t_0|.$$

Soit $0 < T_1 \leq T_0$ tel que $M|T_1 - t_0| \leq r_0/2$. Supposons qu'il existe x une solution de (Σ) sur $[t_0 - T_1, t_0 + T_1]$ telle qu'il existe $t \in [t_0 - T_1, t_0 + T_1]$ vérifiant $\|x(t) - x_0\| > r_0$. Alors par continuité de x, il existe $0 < t_1 \leq T_x$ tel que $\|x(t_1) - x_0\| = r_0$, et d'après le calcul précédent, on a

$$r_0 = \|x(t_1) - x_0\| \leq M|T_x - t_0| \leq M|T_1 - t_0| \leq \frac{r_0}{2},$$

ce qui est absurde, donc toute solution de (Σ) définie sur $[t_0 - T_1, t_0 + T_1]$ est à valeurs dans $\overline{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$. Le compact $[t_0 - T_1, t_0 + T_1] \times \overline{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$ est donc un cylindre de sécurité pour (Σ).

Étape 2 : Trouvons une solution de (Σ) sur $[t_0 - T_1, t_0 + T_1]$ grâce au théorème du point fixe de Schauder. On note $C := \mathcal{C}^0([t_0 - T_1, t_0 + T_1], \overline{\mathcal{B}}(x_0, r_0))$, un convexe. Soit l'opérateur

$$\phi : \begin{array}{rcl} C & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([t_0 - T_1, t_0 + T_1], \mathbf{R}^n) \\ x & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} [t_0 - T_1, t_0 + T_1] & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ t & \longmapsto & x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\mathrm{d}s. \end{array} \right) \end{array}$$

Cet opérateur est bien défini car f est continue, donc si $x \in C$, on montre par théorème de continuité sous l'intégrale que $\phi(x)$ est continue. De plus, le calcul fait à l'étape 1 nous assure que $\phi(x)$ est à valeurs dans $\overline{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$, donc $\phi(C) \subset C$. La fonction f est continue, donc soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (s,t), (s',t') \in I \times \Omega, \quad \|(s,t) - (s',t')\| < \delta \implies \|f(s,t) - f(s',t')\| < \varepsilon.$$

Soient $x, y \in C$ tels que $\|x - y\|_\infty < \delta$. Alors

$$\forall s \in [t_0 - T_1, t_0 + T_1], \quad \|x(s) - y(s)\| < \delta,$$

donc

$$\forall s \in [t_0 - T_1, t_0 + T_1], \quad \|(s, x(s)) - (s, y(s))\| < \delta.$$

Ainsi,

$$\forall t \in [t_0 - T_1, t_0 + T_1], \quad \|\phi(x)(t) - \phi(y)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\|\mathrm{d}s \right| \leq \varepsilon|t - t_0| \leq |t_0 - T_1|\varepsilon,$$

d'où $\|\phi(x) - \phi(y)\|_\infty \leq |t_0 - T_1|\varepsilon$, donc ϕ est continue sur C. Montrons que $\phi(C)$ est relativement compact.

— L'intervalle $[t_0 - T_1, t_0 + T_1]$ est compact et $\overline{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$ est complet.

— Pour tout $x \in C$, $\phi(x)$ est à valeurs dans $\overline{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$, donc pour tout $t \in [t_0 - T_1, t_0 + T_1]$, $\{\phi(x)(t) \mid x \in C\} \subset \overline{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$ donc est relativement compact.

— Soient $t_1, t_2 \in [t_0 - T_1, t_0 + T_1]$, $x \in C$, alors par le même calcul qu'à l'étape 1,

$$\|\phi(x)(t_1) - \phi(x)(t_2)\| \leq M|t_2 - t_1|,$$

donc $\phi(C)$ est équicontinue.

Par théorème d'Ascoli, $\phi(C)$ est relativement compact. De plus, si $y \in \overline{\phi(C)}$, alors il existe une suite $(x_n)_n \in C^{\mathbf{N}}$ telle que $(\phi(x_n))_n$ converge vers y en norme uniforme, donc y est continue sur $[t_0 - T_1, t_0 + T_1]$ et y est à valeurs dans $\overline{\mathcal{B}}(x_0, r_0)$. Ceci montre que $\overline{\phi(C)} \subset C$, et donc que $\phi : \overline{\phi(C)} \to \overline{\phi(C)}$ est bien définie. On sait que $\overline{\phi(C)}$ est un compact, et ϕ étant continue, C convexe, $\phi(C)$ est convexe, et donc $\overline{\phi(C)}$ l'est aussi. Par théorème du point fixe de Schauder, ϕ admet un point fixe, qui est alors une solution de (Σ) sur $[t_0 - T_1, t_0 + T_1]$. $\square$

Bibliographie

[1] Florent Berthelin. *Equations différentielles.* Cassini, 2017.

[2] Clémence Minazzo et Kelsey Rider. *Mémoire de Master 1 de Mathématiques : Théorèmes du Point Fixe et Applications aux Equations différentielles.* 2007.

[3] Ioannis Farmakis et Martin Moskowitz. *Fixed point theorems and their applications.* World Scientific, 2013.

[4] Stéphane Gonnord et Nicolas Tosel. *Calcul différentiel.* Ellipses, 1998.

[5] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la license et de l'agrégation.* Cassini, 2003.

[6] Rozhen Texier-Picard. *Notes de cours - Préparation à l'agrégation : Convexité et applications.*