CCINP SESSION 2019

Filière MP

Mathématiques 1

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : tharbreteau@protonmail.com.

EXERCICE I

Q1. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et par croissances comparées, $f(t) = te^{-t}/(1-e^{-t}) = o_{(t\to+\infty)}(1/t^2)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann, elle est intégrable sur $[1,+\infty[$. De plus, comme $f(t) \sim_{(t\to 0)} 1$, f est prolongeable par continuité en 0 donc est intégrable sur $]0,1]$, donc sur $]0,+\infty[$.

Le développement en série entière de la fonction $t \mapsto 1/(1-t)$ montre que

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \frac{t}{e^t-1} = f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(n+1)t}.$$

Notons pour $n \in \mathbf{N}$, $f_n : t \mapsto te^{-(n+1)t}$.

- Les f_n sont continues sur $]0,+\infty[$.
- Les f_n sont prolongeables par continuité en 0 et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n(t) = o_{(t\to+\infty)}(1/t^2)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann, les f_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$.
- Le calcul précédent montre que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers f, continue sur $]0,+\infty[$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ et un réel $x > 0$, par intégration par parties,

$$\int_0^x |f_n| = \left[-\frac{te^{-(n+1)t}}{n+1}\right]_0^x + \frac{1}{n+1}\int_0^x e^{-(n+1)t}\mathrm{d}t = -\frac{xe^{-(n+1)x}}{n+1} + \frac{1-e^{-(n+1)x}}{(n+1)^2},$$

ce qui montre l'intégrabilité de f_n sur $]0,+\infty[$. Par passage à la limite quand $x \to +\infty$, f_n étant positive,

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} f_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

La série $\sum(\int_0^{+\infty} f_n)$ est donc une série de Riemann de paramètre 2, par conséquent elle converge.
Par théorème d'interversion série-intégrale,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2},$$

donc d'après le résultat admis, cette intégrale vaut $\pi^2/6$.

EXERCICE II

Q2. La suite (p_n) étant bornée, d'après le lemme d'Abel, la série entière $\sum p_n t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. De ce fait, sa somme G_X est définie sur $]-1,1[$.

Par produit de Cauchy de deux séries entières absolument convergentes sur $]-1,1[$,

$$\forall t \in]-1,1[, \quad G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)P(X_2=n-k)\right)t^n.$$

Par indépendance de X_1 et X_2 et par probabilités totales,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(S=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1+X_2=n, X_2=n-k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1=k, X_2=n-kk) = \sum_{k=0}^{n} P(X_1=k)P(X_2=n-k),$$

d'où $G_{X_1}G_{X_2} = G_S$.

Pour tout $t \in]-1,1[$, $G_S(t) = E(t^{X_1}t^{X_2})$ et par indépendance de X_1 et X_2, les variables aléatoires t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes, par propriété de l'espérance du produit de deux variables aléatoires indépendates, $G_S(t) = E(t^{X_1})E(t^{X_2}) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$.

Q3. Notons pour $n \in \mathbf{N}$, X_n la variable aléatoire désignant le numéro de la boule tirée au $n^{\text{ème}}$ tirage. Les tirages étant avec remise, indépendants, les X_n sont indépendantes et $S_n = X_1 + \cdots + X_k$. Les X_n suivent toutes la même loi, celle de X_1 et

$$\forall t \in]-1,1[, \quad G_{X_1}(t) = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$, d'après le résultat admis, $G_{S_n} = (G_{X_1})^n$ donc pour tout $t \in]-1,1[$, $G_{S_n}(t) = (t/2 + 1/2)^{2n}$. La fonction génératrice caractérisant la loi de probabilité, S_n suit une loi $\mathcal{B}(2n, 1/2)$.

PROBLÈME

Partie I - Propriétés

Q4. Pour tout $x \in]-1,1[$, $1 - x^n \sim_{(n\to+\infty)} 1$ donc $|a_n x^n/(1-x^n)| \sim_{(n\to+\infty)} |a_n x^n|$. La série entière $\sum a_n z^n$ ayant un rayon de convergence égal à 1, elle converge absolument sur $]-1,1[$. Par comparaison, la série de fonctions $\sum a_n x^n/(1-x^n)$ aussi.

Notons pour $n \geq 1$, $a_n = 1/n^2$. La suite $(42^n/(1-42^n))$ converge vers -1 donc $a_n 42^n/(1-42^n) \sim_{(n\to+\infty)} -1/n^2$. Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum a_n 42^n/(1-42^n)$ converge.

Q5. Soit $b \in]0,1[$, pour $n \geq 1$, notons $f_n : x \mapsto a_n x^n/(1-x^n)$. Pour tous $x \in [-b,b]$ et $n \in \mathbf{N}$, $|a_n x|^n \leq |a_n| b^n$ et $1/|1-x^n| \leq 1/(1-b^n)$, ce qui montre que

$$N_\infty(f_n|_{[-b,b]}) \leq |a_n| \frac{b^n}{1-b^n}.$$

Comme $|b| < 1$, d'après **Q4**, la série $\sum a_n b^n/(1-b^n)$ converge absolument. Par comparaison, la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-b,b]$.

Q6. Avec les notations précédentes, les f_n sont continues sur $]-1,1[$ et d'après **Q5**, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $]-1,1[$. Par transmission de la continuité par convergence uniforme sur tout segment, f est continue sur $]-1,1[$.

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers f une fonction continue sur cet intervalle.
- Pour tout $n \geq 1$,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_n'(x) = a_n \frac{nx^{n-1}(1-x^n) - x^n(-nx^{n-1})}{(1-x^n)^2} = \frac{na_n x^{n-1}}{(1-x^n)^2}.$$

- Par théorème de dérivation des séries entière sur leurs disques ouverts de convergence, la série entière $\sum na_n x^{n-1}$ converge absolument sur $]-1,1[$. Soit $b \in]0,1[$, de même qu'en **Q5**, on montre que

$$\forall n \geq 1, \quad N_\infty(f_n'|_{[-b,b]}) \leq n|a_n| \frac{b^{n-1}}{1-b^n}$$

et d'après **Q4**, la suite $(1/(1-b^n))$ est bornée. Par comparaison, la série $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[-b,b]$.

Par théorème de classe $\mathcal{C}^1$ pour les séries de fonctions, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)^2},$$

d'où $f'(0) = a_1$.

Q7. Soit $n, m \in \mathbf{N}^*$ tels que $n \neq m$, alors $I_n \cap I_m = \emptyset$. Soit $(k,p) \in A$, alors $(k,p) \in I_{kp}$ donc $A \subset \cup_{n>0} I_n$ et réciproquement, si $n \in \mathbf{N}^*$, $(k,p) \in I_n$, alors $(k,p) \in A$ donc $\cup_{n>0} I_n \subset A$, donc (I_n) est une partition de A. La famille $(u_{n,p})$ étant sommable, par théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{(k,p)\in I_n} u_{k,p}\right).$$

Soit $x \in]-1,1[$ et $n \geq 1$, alors $|x|^n \in [0,1[$ donc la série $\sum_p |a_n x^{np}|$ converge et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n x^{np}| = |a_n| \sum_{p=1}^{+\infty} (|x|^n)^p = |a_n x^n| \sum_{p=0}^{+\infty} (|x|^n)^p = |a_n| \frac{|x|^n}{1-|x|^n}.$$

D'après **Q4**, la série $\sum \left(\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n x^{np}| \right)$ converge donc par théorème de sommabilité, la famille $(a_n x^{np})$ est sommable.

D'après ce qui précède,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p)\in I_n} a_k x^{kp} \right) \qquad \text{et } |x^n| < 1 \text{ donc} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p)\in I_n} a_k \right) x^n.$$

Mais soit $n \geq 1$, si $(k,p) \in I_n$, k divise d et réciproquement, si k divise n alors il existe $p \geq 1$ tel que $(k,p) \in I_n$, d'où $\sum_{(k,p)\in I_n} a_k = \sum_{k|n} a_k = b_n$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$$

Partie II - Exemples

Q8. Avec les notations de **Q7**, pour tout $n \geq 1$, $b_n = d_n$. D'après **Q7**,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n.$$

Q9. Remarquons que pour tout $n \geq 1$, $\varphi(n)$ étant le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n et premiers avec n, $\varphi(n) \leq n+1$. Soit $x \in]-1,1|$, par croissances comparées, $|a_n x^n| = o_{(n\to+\infty)}(1/n^2)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série entière $\sum a_n x^n$ converge absolument sur $]-1,1[$. Notons R son rayon de convergence, alors $R \geq 1$ mais la suite (a_n) n'est pas bornée : en effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, a_{2^n} est le nombre d'entiers premiers avec 2^n et inférieurs ou égaux à 2^n, c'est donc le nombre d'entiers impairs entre 0 et 2^n, qui est égal à 2^{n-1}. On a donc $a_{2n} \to_{n\to+\infty} +\infty$, ce qui montre que $R \leq 1$, d'où $R = 1$.

Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12 et $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 1$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(12) = 4$, ce qui montre bien que

$$12 = \sum_{d|12} \varphi(d).$$

D'après **Q7** et le résultat admis sur φ,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p)\in I_n} \varphi(k) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Q10. Par développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n}.$$

Notons pour $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto (-x)^n/n$ et soit $x \in]-1,1[$.

- La suite $(f_n(x))$ est à signes alternés.
- La suite $(|f_n(x)|)$ est décroissante, de limite nulle.

Par théorème spécial sur les séries alternées,

$$\forall x \in]0,1[, \forall n \geq 1, \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $]0,1[$. Par théorème de la double limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Q11. Notons $I = [-1/2, 1/2] \backslash \{0\}$,

$$\forall x \in I, \quad \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}.$$

Notons pour $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto a_n x^{n-1}/(1-x^n)$. La suite (a_n) étant bornée, on montre comme en **Q6** que pour tout $n \geq 1$, $N_\infty(\,f_n|_I) = O_{(n\to+\infty)}(1/2^{n-1})$ donc par croissances comparées, $N_\infty(\,f_n|_I) = o_{(n\to+\infty)}(1/n^2)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur I. Par théorème de la double limite lorsque $x \to 0$, $f(x)/x \to_{(x\to 0)} a_1 = -1$, on retrouve bien le résultat de **Q6**. De plus, $f(x) \sim_{(x\to 0)} -x$.

Q12. Notons pour $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto (1-x)(-x)^n/(1-x^n)$ et remarquons que

$$\forall n \geq 1, \forall x \in]0,1[, \quad |f_n(x)| = x^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^k}\right)^{-1}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in]0,1[$, pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $0 < x^k < 1$ donc $1/x^k > 1$, d'où

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x^k}\right)^{-1} < \frac{1}{n}.$$

On a donc $N_\infty(\,f_n|_{[0,1[}) < 1/n$, ce qui entraîne la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $]0,1[$. Par théorème de la double limite quand x tend vers 1 par valeurs inférieures,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = (1-x)f(x) \xrightarrow[x<1]{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

On conclut avec **Q10** que $f(x) \sim_{(x\to 1,\ x<1)} -\ln(2)/(1-x)$.

FIN
