CCINP - SESSION 2019

Filière MP

Mathématiques 2

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : tharbreteau@protonmail.com.

EXERCICE I

Q1. Soit $n \geq 2$ un entier non premier, il existe $(k, q) \in \mathbf{N}^2$ tel que $n = kq$ et $k, q \geq 2$. Notons $d = \min(k, q)$, alors d divise n et $d^2 \leq n$. Par contraposée, on démontre le critère de l'énoncé, qui permet de justifier que l'algorithme suivant renvoie le bon résultat.

```
def estPremier(n) :
    if n <= 1 :
        return False
    d = 2
    while d^2 <= n :
        if n % d == 0 :
             return False
        d = d + 1
    return True
```

Q2. L'algorithme qui suit est un algorithme naïf dont la complexité est en $O(n^2)$, n étant l'entier pris en argument. On pourrait résoudre le problème plus efficacement avec l'algorithme du Crible d'Érathostène, par exemple.

```
def liste_premiers(n) :
    L = []
    for k in range(2, n+1) :
        if estPremier(k) :
            L.append(k)
    return L
```

Q3. Version non récursive :

```
def valuation_p_adique(n, p) :
    v = 0
    while n % p == 0 :
        v = v + 1
        n = n // p
    return v
```

Q4. Version récursive :

```
def val(n, p) :
    if n % p == 0 :
        return 1 + val(n//p, p)
    return 0
```

Q5. On utilisera la version de la fonction précédente écrite en **Q3**.

```
def decomposition_facteur_premiers(n) :
    D = []
    L = liste_premiers(n)
    for p in L :
        D.append([d,valuation_p_adique(n, p)])
    return L
```

EXERCICE II

Q6. On se place dans $E = \mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Notons $u \in \mathcal{L}(E)$ la rotation d'angle $\pi/2$, on vérifie bien que pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0$ et que u n'est pas nul.

Q7. (i $\implies$ ii) : Par définition de v, par symétrie du produit scalaire et par i,

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, v \circ u(y) \rangle = \langle x, u \circ v(y) \rangle = \langle u \circ v(y), x \rangle = \langle v(y), v(x) \rangle = \langle v(x), v(y) \rangle.$$

(ii $\implies$ iii) : Pour tout $x \in E$, la propriété ii prise pour $y = x$ montre iii.
(iii $\implies$ ii) : Par bilinéarité du produit scalaire et par linéarité de u,

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|u(x+y)\|^2 = \|u(x) + u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 + 2\langle u(x), u(y) \rangle.$$

On obtient une égalité analogue en remplaçant u par v. Grâce à la propriété iii, on peut simplifier toutes les normes apparaissant dans l'écriture de la différence de ces deux égalités, ce qui laisse :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle v(x), v(y) \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle.$$

(ii $\implies$ i) : Par définition de v, par symétrie du produit scalaire,

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \begin{cases} \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, v \circ u(y) \rangle \\ \langle v(x), v(y) \rangle = \langle v(y), v(x) \rangle = \langle u \circ v(y), x \rangle = \langle x, u \circ v(y) \rangle. \end{cases}$$

En soustrayant ces deux lignes, par bilinéarité du produit scalaire, pour tout $y \in E$, $u \circ v(y) - v \circ u(y)$ est dans l'orthogonal de E donc est nul.

Il y a bien équivalence entre ces trois propriétés.

PROBLÈME

Partie I - Étude de quelques exemples

Q8. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices semblables, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

- Par propriété de la trace, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(PBP^{-1}) = \operatorname{tr}(BP^{-1}P) = \operatorname{tr} B$.
- Par propriété du déterminant, $\det A = \det(PBP^{-1}) = (\det P)(\det B)(\det P^{-1}) = \det(PP^{-1}) \det B = \det B$.
- P et P^{-1} étant inversibles, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(PBP^{-1}) = \operatorname{rg} B$.
- Notons χ_A et χ_B les polynômes caractéristiques de A et B, alors $\chi_A = \det(XI_n - A) = \det(XI_n - PBP^{-1}) = \det(P(XI_n - B)P^{-1})$ et par les mêmes arguments que précédemment, $\chi_A = \chi_B$.

Q9. La trace d'une matrice valant la somme de ses coefficients diagonaux, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 5$. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure étant égal au produit de ses coefficients diagonaux, $\det A = \det B = 4$ donc A et B sont toutes deux inversibles, donc de rang 3. De même, en notant χ_A et χ_B les polynômes caractéristiques respectifs de A et B, $\chi_A = \chi_B = (X-1)(X-2)^2$.

Soit $X = (x, y, z)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$,

$$BX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x \\ 2y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

et

$$BX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Les sous-espaces propres de B étant en somme directe, ceci montre que leur somme est de dimension 2. Celle-ci n'étant pas égale à l'espace tout entier, B n'est pas diagonalisable. En revanche,

$$AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2x \\ 2y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow x = -y - z \Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

et

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = x \\ 2y = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Par les mêmes arguments, la somme des sous-espaces propres de A est de dimension 3, donc est égale à $\mathbf{R}^3$, ce qui montre que A est diagonalisable. Ainsi, il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonale telle que $A = PDP^{-1}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que $B = QAQ^{-1}$, alors $B = QPAP^{-1}Q^{-1} = QPA(QP)^{-1}$. Par conséquent, B est diagonalisable, ce qui est absurde, donc A et B ne sont pas semblables.

Notons μ_A et μ_B les polynômes minimaux respectifs de A et B. On vient de voir que A est diagonalisable, donc μ_A est scindé à racines simples. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$, ses racines sont donc 1 et 2, d'où $\mu_A = (X-1)(X-2)$. La matrice B n'étant pas diagonalisable, μ_B n'est pas scindé à racines simples, or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, μ_B divise χ_B, d'où $\mu_B = \chi_B$. Les matrices A et B ont des polynômes minimaux différents.

Q10. *Première méthode* : Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ ainsi que u l'endormorphisme canoniquement associé à A. Remarquons qu'il suffit de permuter les vecteurs de $\mathcal{B}$ pour obtenir le résultat. Posons donc $\epsilon_3 = e_3$, $\epsilon_2 = e_1$, $\epsilon_1 = e_2$ et $\mathcal{B}' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$, il est clair que $\mathcal{B}'$ est une base et que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$. Les matrices A et B sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, donc sont semblables.

Deuxième méthode : Notons χ_A et χ_B les polynômes caractéristiques respectifs de A et B, alors en développant le déterminant χ_A par rapport à sa dernière colonne,

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ -2 & -1 & X \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-1)(1+2X) + (-1)^{3+3}X(X^2-1) = X^3 - 3X - 1.$$

En développant χ_B par rapport à sa première ligne,

$$\chi_B = \det(XI_n - B) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -2 & X \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}(-1)(-2X-1) + (-1)^{3+3}X(X^2-1) = X^3 - 3X - 1,$$

donc $\chi_A = \chi_B$. Remarquons que $\chi_A(-2) = -8+6-1 = -3 < 0$, $\chi_A(-1) = -1+3-1 = 1 > 0$, $\chi_A(0) = -1 < 0$ et $\chi_A(2) = 8-6-1 = 1 > 0$. Les fonctions polynomiales associées à χ_A et χ_B étant continues, par théorème des valeurs intermédiaires, ces deux polynômes admettent chacun 3 racines distinctes sur $\mathbf{R}$, or ce sont des polynômes de degré 3, ils sont donc scindés à racines simples. Par conséquent, A et B sont diagonalisables, comme leurs polynômes caractéristiques sont égaux, elles ont les mêmes valeurs propres, de mêmes multiplicités, ce qui montre qu'elles sont semblables.

Q11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice de rang 1, notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A. D'après le théorème du rang, $\operatorname{Ker} u$ est de dimension $n-1$, soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de cet espace. On la complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de R^n grâce au théorème de la base incomplète, et on vérifie que $U = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme voulue. Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$, $A = U$, sinon les matrices A et U sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes, donc dans tous les cas A et U sont semblables.

Q12. Avec les notations de **Q11**,

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_1a_n \\ \vdots & \ddots & & \vdots & a_2a_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_na_n \end{pmatrix} \neq 0$$

On en déduit en paticulier que a_n est non nul, et par le même calcul, que $U(U - a_nI_n) = 0$. Le polynôme $X(X - a_n)$ est donc scindé à racines simples sur $\mathbf{R}$ et annule U, qui est de ce fait diagonalisable.

Q13. Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbf{C}).$$

Son polynôme caractéristique est $(X-1)(X+1) - i^2 = X^2$, elle admet une unique valeur propre donc si elle était diagonalisable, elle serait en fait diagonale. Ce n'est pas le cas, donc M est une matrice symétrique à coefficients complexes non diagonalisable.

Q14. Remarquons que si $(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2$,

$$\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\\\beta\\\alpha\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda\alpha=\mu\beta\\\mu\alpha=\lambda\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\lambda-\mu)\alpha=(\mu-\lambda)\beta\\\mu\alpha=\lambda\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\lambda-\mu)(\alpha+\beta)=0\\\mu\alpha=\lambda\beta.\end{cases}$$

Comme $\alpha\neq-\beta$,

$$\begin{cases}(\lambda-\mu)(\alpha+\beta)=0\\\mu\alpha=\lambda\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda-\mu=0\\\mu\alpha=\lambda\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=\mu\\\alpha=\beta\end{cases}.$$

Mais $\alpha\neq\beta$, donc les vecteurs $(\alpha,\beta,\alpha,\beta)^T$ et $(\beta,\alpha,\beta,\alpha)^T$ forment une famille libre. On en déduit que A est de rang 2. Par théorème du rang, $\operatorname{Ker}A$ n'est pas réduit à $\{0\}$ donc 0 est valeur propre de A.

De plus, remarquons que

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=2(\alpha+\beta)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad\text{et que}\qquad A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=2(\alpha-\beta)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Les complexes $2(\alpha+\beta)$ et $2(\alpha-\beta)$ sont donc bien valeurs propres de A.

Enfin, remarquons que

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=0\qquad\text{et que}\qquad A\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=0,$$

donc ces deux vecteurs sont des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 0. Par combinaisons linéaires,

$$\begin{aligned}\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)&=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\0\end{pmatrix}\right)\\&=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\2\end{pmatrix}\right)\\&=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Cette dernière famille étant échelonnée, elle est libre, donc de rang 4. La famille formée des 4 vecteurs propres de A trouvés précédemment est donc de rang 4 également, donc est une base de $\mathbf{C}^4$.

Q15. Soient $a,b\in\mathbf{R}^*$ et $\lambda\in\mathbf{R}$. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A ainsi que $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$. Il suffit de modifier le coefficient en haut à gauche de la matrice, donc de modifier le premier vecteur de la base. Notons donc $\epsilon_2=e_2$, $\epsilon_1=\frac{a}{b}e_1$ et $\mathcal{B}'=(\epsilon_1,\epsilon_2)$, qui est alors une base de $\mathbf{R}^2$ car $a\neq0$. On vérifie sans problèmes que B est la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de u, ce qui montre que A et B sont semblables.

Partie II - Démonstration d'un résultat

Q16. On a $PB=AP$, soit $RB+iSB=AR+iAS$. Notons $(\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $(\beta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $(\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $(\gamma_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ les coefficients respectifs des matrices RB, SB, AR et AS, qui sont donc des réels. Pour tout $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$, $\alpha_{i,j}+i\beta_{i,j}=\delta_{i,j}+i\gamma_{i,j}$, donc en prenant les parties imaginaires et réelles dans cette égalité, il vient que $\alpha_{i,j}=\delta_{i,j}$ et $\beta_{i,j}=\gamma_{i,j}$. Ceci conduit bien à $RB=AR$ et $SB=AS$.

Q17. Notons $(R_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $(S_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ les coefficients respectifs de R et S, par définition du déterminant,

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad\det(R+xS)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}(R_{i,\sigma(i)}+xS_{i,\sigma(i)}).$$

Le groupe symétrique S_n étant fini, ceci montre que $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}$. Ainsi, il existe $U \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $U(x) = \det(R + xS)$. La matrice P étant inversible, $U(i) = \det P \neq 0$ donc U n'est pas le polynôme nul, il n'a qu'un nombre fini de racines. Par conséquent, il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $U(x) = \det(R + xS) \neq 0$.

Q18. Définissons le réel x comme en **Q17** et notons $Q = R + xS$ une matrice à coefficients réels, inversible par définition de x. D'après **Q16**, $QB = AQ$, d'où $B = Q^{-1}AQ$, ce qui montre que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q19. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X = X(X + i)(X - i)$, scindé à racines simples dans $\mathbf{C}$. Les matrices A et B sont donc diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{C})$, toutes deux semblables à la matrice $\mathrm{diag}(1, -i, i)$, donc semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ par transitivité de la relation de similitude. On conclut avec **Q18**.

Partie III - Une fausse propriété

Q20. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ de même polynôme caractéristique, noté χ, et de même polynôme minimal, noté μ.

- Si μ est de degré 1, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\mu = X - \lambda$ et donc $A = B = \lambda I_n$.
- Sinon, μ est de degré 2.
  - Si μ est scindé à racines simples dans $\mathbf{C}$, A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ et possèdent les mêmes valeurs propres, de mêmes multiplicités puisqu'elles ont le même polynôme caractéristique. Elles sont donc semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.
  - Sinon, μ possède dans $\mathbf{C}$ une racine double notée λ, donc $\mu = (X - \lambda)^2 = X^2 - 2\lambda X + \lambda^2$. Le polynôme μ étant à coefficients réels, λ est un réel. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, μ divise χ mais tous deux sont de degré 2, donc $\mu = \chi$. De plus, la matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ et admet λ comme valeur propre, donc il existe $(\lambda', a) \in \mathbf{C}^2$ tel que A soit semblable à la matrice

    $$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}.$$

    Par conséquent, $\chi = (X - \lambda)(X - \lambda')$, ce qui montre que $\lambda = \lambda'$. Si $a = 0$, $X - \lambda I_n$ annule A, ce qui contredit la minimalité de μ, d'où $a \neq 0$. On montre de même qu'il existe $b \in \mathbf{C}^*$ tel que B soit semblable à la matrice

    $$\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

    D'après **Q15**, A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

Dans tous les cas, A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ d'après **Q18**.

Q21. Considérons les matrices à coefficients réels

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices ont même polynôme caractéristique, X^4. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, leurs polynômes minimaux divisent X^4, donc sont de la forme X^k, où $k \in \{1, \dots, 4\}$. Comme X n'annule ni l'une ni l'autre tandis que X^2 les annule toutes les deux, leur polynôme minimal est X^2. Elles ont bien même polynôme caractéristique et même polynôme minimal, cependant celle de gauche est de rang 2 tandis que celle de droite est de rang 1. D'après **Q8**, elles ne sont pas semblables.

FIN
