CCINP - SESSION 2019

Filière PSI

MATHÉMATIQUES

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : tharbreteau@protonmail.com.

Problème 1

Partie I - Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

Q1. Notons $g : (x,t) \mapsto e^{-t(1-itx)}$ et soit $x \in \mathbf{R}$. La fonction $g(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ et par croissances comparées, $g(x,t) = o_{(t\to+\infty)}(1/t^2)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann, $g(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ donc f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

Q2. Notons pour $p \in \mathbf{N}$, $h_p : t \mapsto t^p e^{-t}$ et soit $p \in \mathbf{N}$. La fonction h_p est continue sur $\mathbf{R}_+$ et par croissances comparées, $h_p(t) = o_{(t\to+\infty)}(1/t^2)$. Par comparaison à une intégrale de Riemann, h_p est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ et donc Γ_p est bien définie. Soit un réel $x \geq 0$, par intégration par parties,

$$\int_0^x h_{p+1} = \big[-t^{p+1}e^{-t}\big]_0^x + (p+1)\int_0^x h_p = -x^{p+1}e^{-x} + (p+1)\int_0^x h_p.$$

Les fonctions h_p et h_{p+1} sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$ et par croissances comparées, $\lim_{(x\to+\infty)}(x^{p+1}e^{-x}$, on peut donc passer à la limite quand $x \to +\infty$. Il en découle que $\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p$.

Q3. Par récurrence, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\Gamma_p = p!$.

Q4. Définissons la fonction g comme en **Q1**.

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x,\cdot)$ est continue et intégrable sur $\mathbf{R}_+$.
- Pour tous $p \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, $g(x,\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbf{R}$ et par récurrence,

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall t \geq 0, \quad \partial_1^p g(x,t) = (it^2)^p e^{-t(1-itx)}.$$

- Soit $p \in \mathbf{N}$.
  - — Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\partial_1^p g(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.
  - — Pour tout réel $t \geq 0$, $\partial_1^p g(\cdot,t)$ est continue sur $\mathbf{R}$.
  - — En définissant la fonction h_{2p} comme en **Q2**, pour tous $x \in \mathbf{R}$ et $t \geq 0$, $|\partial_1^p g(x,t)| = h_{2p}(t)$ et d'après **Q2**, h_{2p} est continue, intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

Par théorème de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour les fonctions définies par une intégrale, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad f^{(p)}(x) = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t(1-itx)} \mathrm{d}t.$$

Q5. D'après **Q3** et **Q4**, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $f^{(p)}(0) = i^p\Gamma(2p) = i^p(2p)!$ donc pour tout réel $r > 0$,

$$\left|\frac{\dfrac{f^{(p+1)}(0)r^{p+1}}{(p+1)!}}{\dfrac{f^{(p)}(0)r^p}{p!}}\right| = \frac{(2p+1)(2p+2)r}{p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty.$$

D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum f^{(p)}(0)r^p/p!$ diverge. Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum f^{(p)}(0)x^p/p!$ est égal à 0.

Par l'absurde, supposons la fonction f développable en série entière en 0. Il existe alors $R > 0$ et une suite $(a_n) \in \mathbf{R}^N$ tels que

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p.$$

Par récurrence, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $a_p = f^{(p)}(0)/p!$ donc la série entière $\sum f^{(p)}(0)x^p/p!$ a un rayon de convergence strictement positif, ce qui rentre en contradiction avec ce qui précède. La fonction f n'est donc pas développable en série entière en 0.

Q6. Notons pour $k \in \mathbf{N}$, $g_k : x \mapsto e^{-k(1-ikx)}$.

- Par croissances comparées, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g_k(x) = o_{(k\to+\infty)}(1/k^2)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement vers g sur $\mathbf{R}$.
- Il a été vu en **Q4** que
$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall k \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad g_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p e^{-k(1-ikx)}.$$
- Soit $p \in \mathbf{N}$,
$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad |g_k^{(p)}(x)| = k^{2p}e^{-k}$$
donc par croissances comparées, $N_\infty(g_k) = o_{(k\to+\infty)}(1/k^2)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbf{R}$.

Par théorème de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour les séries de fonctions, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad g^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k(1-ikx)}.$$

Q7. Soit $p \in \mathbf{N}$, par positivité de la fonction exp sur $\mathbf{R}$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $k^{2p}e^{-k} \geq 0$. D'après **Q6**,

$$|g^{(p)}(0)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}e^{-k}\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}e^{-k} = \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{+\infty} k^{2p}e^{-k} + p^{2p}e^{-p} \geq p^{2p}e^{-p}.$$

Q8. D'après la formule de Stirling,

$$p! \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi p}\left(\frac{p}{e}\right)^p \qquad \text{donc d'après } \mathbf{Q7}, \qquad \frac{p^p}{\sqrt{p}} = \underset{p\to+\infty}{O}\left(\frac{g^{(p)}(0)}{p!}\right).$$

Par croissances comparées, pour tout $r > 0$, la suite $(p^p r^p/\sqrt{p})$ diverge donc par comparaison, la suite $(g^{(p)}(0)r^p/p!)$ diverge. Ceci montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum g^{(p)}(0)r^p/p!$ est nul.

On montre comme en **Q5** que la fonction g n'est pas développable en série entière en 0.

Partie II - Le théorème de Borel

Q9. Analyse : Soient $a, b \in \mathbf{C}$ qui conviennent, alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{(a+b)x + i(a-b)}{1+x^2}.$$

En particulier, $1 = i(a-b)$ et en multipliant cette relation par x puis en prenant la limite quand $x \to +\infty$, il vient $0 = a+b$, soit $a = -b$ et $b = i/2$.

Synthèse : $a = -i/2$ et $b = i/2$ conviennent.

Q10. Pour tout réel x, $x - i \neq 0$ donc par opérations, la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Notons pour $p \in \mathbf{N}$, $(H_n) : \forall x \in \mathbf{R}, \quad \psi^{(p)}(x) = (-1)^p p!/(x-i)^{p+1}$.

- (H_0) est vraie.
- Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que (H_p) soit vraie. D'après (H_p),
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \psi^{(p+1)}(x) = \frac{(-1)^{p+1}(p+1)!}{(x-i)^{p+2}}$$
donc (H_{p+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbf{N}$, (H_p) est vraie.

Q11. Notons $\chi : x \mapsto 1/(x+i)$, par les mêmes arguments qu'en **Q10**, c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. De même qu'en **Q10**, on montre que

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad \chi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}}.$$

D'après **Q9** et par linéarité de la dérivation,

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{a}{\psi^p(x)} + \frac{b}{\chi^p(x)} = -\frac{i}{2}\frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}} + \frac{i}{2}\frac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}} = \frac{(-1)^p ip!\left((x+i)^{p+1}-(x-i)^{p+1}\right)}{2(1+x^2)^{p+1}}.$$

Q12. *Erreur d'énoncé, on veut montrer que* $|(x+i)^{p+1}-(x-i)^{p+1}| \leq \dots$.

Par inégalité triangulaire,

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad |(x+i)^{p+1}-(x-i)^{p+1}| \leq |x+i|^{p+1} + |x-i|^{p+1} = 2(1+x^2)^{(p+1)/2}.$$

Pour tous $p \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, $(1+x^2)^{p/2} \geq (x^2)^{p/2} = |x|^p$ donc d'après **Q11**,

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \neq 0, \quad |\varphi_1^{(p)}(x)| \leq \frac{p}{(1+x^2)^{(p+1)/2}} \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Q13. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, si $\alpha = 0$, la relation est vraie. Sinon, $\alpha \neq 0$ et pour tout $x \neq 0$, $\alpha x \neq 0$. De plus, remarquons que $\varphi_\alpha : x \mapsto \varphi_1(\alpha x)$. Par récurrence, pour tous $p \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, $\varphi_\alpha^{(p)}(x) = \alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x)$ donc d'après **Q12**, $|\varphi_\alpha^{(p)}(x)|/|\alpha|^p \leq p!/|\alpha x|^{p+1}$. On conclut en multipliant par $|\alpha|^{p+1} \geq 0$, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité.

Q14. Soit $n \in \mathbf{N}$, remarquons que $u_n : x \mapsto a_n x^n \varphi_{\alpha_n}(x)$ et que par opérations, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Par formule de dérivation de Leibniz,

$$\forall p \in \{0,\dots,n\}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} n \underbrace{\times \cdots \times}_{k \text{ fois}} (n-k+1) x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

Q15. Pour tous $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in \{0,\dots,n-1\}$ et $k \in \{0,\dots,p\}$, $n-k \geq 1$ donc **Q14** montre que les dérivées successives de u_n en 0 sont nulles.

De plus, cela montre aussi que $u_n^{(n)}(0) = a_n n! \varphi_{\alpha_n}(0) = a_n n!$.

Q16. *Encore une erreur d'énoncé, le dénominateur dans la majoration est* $\sqrt{n!}$ *et non pas* $\sqrt{n}$.

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \{0,\dots,n-1\}$, **Q15** montre que la relation est vraie pour $x = 0$. Sinon, d'après **Q13**, pour tous $k \in \{0,\dots,p\}$ et $x \neq 0$, $|a_n||\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)| \leq (p-k)!/(|x|^{p+1}\sqrt{n!})$. Par inégalité triangulaire,

$$\forall x \neq 0, \quad |u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{|x|^{n-k}(p-k)!}{|x|^{p-k+1}} \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^{p} \frac{p!n!(p-k)!}{k!(n-k)!(p-k)!} \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}.$$

Mais pour tout $p \in \{0,\dots,n-1\}$, $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, d'où la majoration recherchée.

Q17.
- Soit $x \in \mathbf{R}$, d'après **Q16** et par croissances comparées, $|u_n(x)| = o_{(n\to+\infty)}(1/n^2)$ donc par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.
- Soient $p \in \mathbf{N}$ et $M > 0$, **Q16** montre que pour tout $n \geq p+1$, $N_\infty(u_n^{(p)}|_{[-M,M]}) \leq p! 2^n M^{n-p-1}/\sqrt{n!}$ donc par croissances comparées, $N_\infty(u_n^{(p)}|_{[-M,M]}) = o_{(n\to+\infty)}(1/n^2)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement donc uniformément sur $[-M,M]$, et donc sur tout segment de $\mathbf{R}$.

Par théorème de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour les séries de fonctions, U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall p \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad U^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(x).$$

Q18. D'après **Q15**, pour tous $p \in \mathbf{N}$ et $n \geq p+1$, $u_n^{(p)}(0) = 0$ et $u_p^{(p)}(0) = p! a_p$ donc d'après **Q17**, $U(0) = u_0(0) = a_0$ et

$$\forall p \geq 1, \quad U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p.$$

Q19. Soit $(b_p) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, on définit par récurrence la suite de réels (a_p) et la suite de fonctions (u_p) telles que :

$$\begin{cases} a_0 = b_0, \quad u_0 : x \mapsto \dfrac{a_0}{1 + a_0^2 x^2} \\ \forall p \in \mathbf{N}, \quad a_{p+1} = \dfrac{1}{(p+1)!}\left(b_{p+1} - \displaystyle\sum_{n=0}^{p} u_n^{(p)}(0) \right), \quad u_{p+1} : x \mapsto \dfrac{a_{p+1}x^{p+1}}{1 + (p+1)! a_{p+1}^2 x^2}. \end{cases}$$

Notons f la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, d'après **Q18**, f est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Enfin,

$$\begin{cases} f(0) = a_0 = b_0 \\ \forall p \geq 1, \quad f^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p = b_p, \end{cases}$$

ce qui conclut la preuve du théorème de Borel.

Problème 2

Partie I - Éléments propres d'une matrice

I.1 - Localisation des valeurs propres.

Q20. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{C}^n$, x étant vecteur propre de A associé à λ,

$$Ax = \lambda x \qquad \text{donc} \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i e_i.$$

Par unicité de la décomposition dans une base, on obtient bien le résultat recherché.

Q21. Un vecteur propre étant non nul, $|x_{i_0}| > 0$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|x_i|/|x_{i_0}| \leq 1$. D'après **Q20** et par inégalité triangulaire,

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0}| \frac{|x_i|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0}| \leq \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right).$$

Q22. La matrice $A_n(\alpha, \beta)$ est une matrice symétrique réelle, d'après le théorème spectal elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ce qui montre bien que ses valeurs propres sont réelles.

Q23. Notons $(A_n(\alpha, \beta)_{i,j})_{(1 \leq i,j \leq n)}$ les coefficients de $A_n(\alpha, \beta)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la somme $\sum_{j=1}^{n} |A_n(\alpha, \beta)_{i,j}|$ vaut soit $|\alpha| + |\beta|$, soit $|\alpha| + 2|\beta|$. Le réel $|\beta|$ étant positif, ces sommes sont toutes majorées par $|\alpha| + 2|\beta|$ et le résultat découle alors alors de **Q21**.

I.2 - Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$.

Q24. Soit λ une valeur propre de $A_n(0, 1)$, d'après **Q23**, $|\lambda| \leq 2$. La fonction cos étant une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, on conclut.

Q25. Soit $n \geq 3$,

$$\chi_{A_n(0,1)} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & X & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

donc par développement par rapport à la dernière ligne,

$$\chi_{A_n(0,1)} = (-1)^{n+n} X \chi_{A_{n-1}(0,1)} + (-1)^{n+n-1}(-1) \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & X & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

et par développement par rapport à la dernière colonne,

$$\chi_{A_n(0,1)} = X\chi_{A_{n-1}(0,1)} + \left((-1)^{n-1+n-1}(-1)\chi_{A_{n-2}(0,1)}\right) = X\chi_{A_{n-1}(0,1)} - \chi_{A_{n-2}(0,1)}.$$

On en déduit que pour tout $n \geq 3$, $U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}$.

Q26. Notons pour $n \geq 1$, $(H_n) : \forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)/\sin(\theta)$.
- Soit $\theta \in]0, \pi[$, $U_1(\cos\theta) = 2\cos\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, comme $\sin\theta \neq 0$, (H_1) est vraie.
- Soit $n \geq 1$ tel que (H_n) soit vraie, d'après **Q25**,

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)U_n(\cos\theta) + U_{n-1}(\cos\theta)$$

donc d'après (H_n),

$$\begin{aligned}\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_{n+1}(\cos\theta) &= 2\cos(\theta)\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) - \sin(n\theta)}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin((n+2)\theta)}{\sin\theta},\end{aligned}$$

donc (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, pour tout $n \geq 1$, (H_n) est vraie.

Q27. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $j\pi/(n+1) \in]0, \pi[$ et **Q26** montre que $\cos(j\pi/(n+1))$ est racine de U_n, donc que $2\cos(j\pi/(n+1))$ est racine de $\chi_{A_n(0,1)}$. Il s'agit du polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ donc il est de degré n. On en a trouvé n racines distinctes, ce qui montre qu'il est scindé à racines simples. Par conséquent, la matrice $A_n(0,1)$ est diagonalisable, ses valeurs propres sont de multiplicités égales à 1 et

$$\mathrm{Sp}(A_n(0,1)) = \left\{\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \mid j \in \{1, \dots, n\}\right\}.$$

De plus, par caractérisation de la diagonalisabilité, la multiplicité de chaque valeur propre de $A_n(0,1)$ est égale à la dimension du sous-espaces propre associé, donc ceux-ci sont tous de dimension 1.

Q28. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à $2\cos\theta_j$, la relation $A_n(0,1)x = 2\cos(\theta_j)x$ montre le résultat.

Q29. L'espace E est inclus dans $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, qui est un espace vectoriel et est stable par combinaisons linéaires, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Soit $u \in E$, alors u est une suite récurrente linéaire double à coefficients constants, d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos(\theta_j)r + 1 = 0$, donc de discriminant $\Delta = 4(\cos^2(\theta_j) - 1)$. Étant donné que $\theta_j \in]0, \pi[$, $\Delta < 0$ donc les racines complexes de cette équation sont

$$\frac{2\cos(\theta_j) \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = \cos\theta_j \pm i|\sin\theta_j| = \cos\theta_j \pm i\sin\theta_j = e^{\pm i\theta_j}.$$

Il existe donc $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_k = A\cos(\theta_j k) + B\sin(\theta_j k)$, ce qui montre que

$$E = \mathrm{Vect}\left(k \mapsto \cos(\theta_j k), k \mapsto \sin(\theta_j k)\right),$$

donc E est de dimension 2.

Q30. Soit $u \in E$, d'après **Q29**, il existe $(A, B) \in \mathbf{R}^2$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_k = A\cos(\theta_j k) + B\sin(\theta_j k)$, et alors

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= 0 \\ B\sin((n+1)\theta_j) &= 0. \end{cases}$$

Comme $\sin((n+1)\theta_j) = \sin(j\pi) = 0$, on a l'équivalence $(u_0 = u_{n+1}) \Leftrightarrow (u \in \mathrm{Vect}(k \mapsto \sin(\theta_j k))$.

Q31. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à $2\cos\theta_j$. Définissons la suite de réels u telle que

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad u_k = x_k \\ u \text{ est } (n+1)\text{-périodique.} \end{cases}$$

D'après **Q28**, $u \in E$ et par périodicité, $u_0 = u_{n+1} = 0$. D'après **Q31**, $u \in \mathrm{Vect}(k \mapsto \sin(\theta_j k))$, d'où l'existence de $A \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = A\sin(\theta_j k)$. Ceci montre que le sous-espace propre associé à $2\cos\theta_j$ est $\mathrm{Vect}((\sin\theta_j, \dots, \sin(n\theta_j))^T)$.

Q32. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$, remarquons que $A_n(\alpha,\beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0,1)$. Si $\beta = 0$, $A_n(\alpha,\beta)$ est une homotéthie de rapport α donc son unique valeur propre est α, de sous-espace propre associé $\mathbf{R}^n$. Sinon, $\beta \neq 0$ et on a montré en **Q27** que $A_n(0,1)$ est diagonalisable, donc qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ telle que en notant $D = \operatorname{diag}(2\cos\theta_1,\dots,2\cos\theta_n)$, $A_n(0,1) = PDP^{-1}$. On a donc $A_n(\alpha,\beta) = P(\alpha I_n + \beta D)P^{-1}$, ce qui montre que $A_n(\alpha,\beta)$ est diagonalisable et que

$$\operatorname{Sp}(A_n(\alpha,\beta)) = \left\{\alpha + 2\beta\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \mid j \in \{1,\dots,n\}\right\}.$$

Cette matrice possède donc n valeurs propres distinctes, qui sont par conséquent toutes de multiplicités 1, et par caractérisation de la diagonalisabilité, ses sous-espaces propres sont de dimension 1. Soit $j \in \{1,\dots,n\}$, d'après **Q31**, si $x \in \operatorname{Vect}((\sin\theta_j,\dots,\sin(n\theta_j))^T)$, x est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à $2\cos\theta_j$ et donc $A_n(\alpha,\beta)x = (\alpha + 2\beta\cos\theta_j)x$. Ainsi, x est un vecteur propre de $A_n(\alpha,\beta)$ associé à $\alpha + 2\beta\cos\theta_j$. Par un argument de dimension, le sous-espace propre de $A_n(\alpha,\beta)$ associé à $\alpha + 2\beta\cos\theta_j$ est $\operatorname{Vect}((\sin\theta_j,\dots,\sin(n\theta_j))^T)$.

Partie II - Système différentiel

II.1 - Matrices par blocs.

Q33. Par produit matriciel par blocs, comme C et D commutent,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ CD-DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Q34. Supposons D inversible, en appliquant la fonction déterminant au résultat de **Q33**, on obtient par déterminant par blocs pour une matrice triangulaire par blocs la relation

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)\det D = \det(AD-BC)\det D.$$

Comme $\det D \neq 0$, ceci démontre la relation (1).

Q35. Si D est inversible, le résultat a été démontré en **34**. Sinon, 0 n'est pas valeur propre de D. Comme $\operatorname{Sp}(D)$ est fini, il existe un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$ ne contenant aucune valeur propre de D, or $1/p \to_{(p\to+\infty)} 0$, donc il existe $p_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $p \geq p_0$, $-1/p$ n'est pas valeur propre de D, c'est-à-dire que $D + \frac{1}{p}I_n$ est inversible.

Q36. Définissons $p_0 \in \mathbf{N}^*$ comme en **Q34**. Pour tout $p \geq p_0$, la matrice $D + \frac{1}{p}I_n$ est inversible et on vérifie aisément qu'elle commute avec C, donc d'après la relation (1),

$$\forall p \geq p_0, \quad \det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p}I_n \end{pmatrix}\right) = \det\left(\left(A\left(D + \frac{1}{p}I_n\right) - BC\right)\right).$$

Par continuité de det sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, par passage à la limite quand $p \to 0$, on conclut.

Q37. D'après **Q36**, $\chi_N = \det(XI_{2n} - N) = \det(X^2 I_n - M)$. Les valeurs propres d'une matrice étant les racines de son polynôme caractéristique, $\mu \in \mathbf{C}$ est valeur propre de N si et seulement si μ^2 est valeur propre de M.

Q38. Le vecteur x étant un vecteur propre, il est non nul donc $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}$ est non nul. Par produit par blocs,

$$N\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ Mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ \mu^2 x \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $(x,\mu x)^T$ est bien un vecteur propre de N associé à μ.

Q39. Dans ce cas, il existe une base $(e_1,\dots,e_n)$ de vecteurs propres de M. Notons $\mu_1,\dots,\mu_n \in \mathbf{C}$ les valeurs propres de M associées respectivement à $e_1,\dots,e_n$. La matrice M étant inversible, les μ_i sont tous non nuls donc admettent chacun deux racines carrées complexes distinctes. Notons pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $\lambda_{2i-1}, \lambda_{2i} \in \mathbf{C}$ tels que $\lambda_{2i-1}^2 = \lambda_{2i}^2 = \mu_i$ et $\lambda_{2i-1} \neq \lambda_{2i}$, ainsi que

$$\epsilon_{2i-1} = \begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_{2i-1}e_i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \epsilon_{2i} = \begin{pmatrix} e_i \\ \lambda_{2i}e_i \end{pmatrix}.$$

Soit une relation de dépendance linéaire $a_1\epsilon_1 + \cdots + a_{2n}\epsilon_{2n} = 0$ où $(a_1,\dots,a_{2n}) \in \mathbf{C}^{2n}$, alors

$$\begin{cases} (a_1+a_2)e_1 + \cdots + (a_{2n-1}+a_{2n})e_n = 0 \\ (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)e_1 + \cdots + (a_{2n-1}\lambda_{2n-1} + a_{2n}\lambda_{2n})e_n = 0. \end{cases}$$

La famille $(e_1,\dots,e_n)$ étant une famille libre,

$$\begin{cases} a_1+a_2=\cdots=a_{2n-1}+a_{2n}=0 \\ a_1(\lambda_1-\lambda_2)=\cdots=a_{2n-1}(\lambda_{2n-1}-\lambda_{2n})=0, \end{cases}$$

mais pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, $\lambda_{2i-1}\neq\lambda_{2i}$, d'où $a_1=\cdots=a_{2n}=0$. La famille $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{2n})$ est donc une famille libre de $\mathbf{C}^{2n}$ à $2n$ éléments, c'est-à-dire une base de $\mathbf{C}^{2n}$, composée de vecteurs propres de N d'après **Q38**, d'où la diagonalisabilité de N. Par construction, les valeurs propres de N, qui sont d'après **Q37** les λ_i, sont toutes non nulles, ce qui montre l'inversibilité de N.

II.2 - Application à un système différentiel dans le cas où $n=2$.

Q40. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$,

$$BX=X'\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \alpha x_1+\beta x_2 \\ \beta x_1+\alpha x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_1'' \\ x_2''\end{pmatrix}$$

donc le couple $(\alpha,\beta)=(-2,1)$ convient.

Le théorème de Cauchy indique que l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 4.

Q41. D'après **Q37** et **Q40**, $\mathrm{Sp}(B)=\{\mu\in\mathbf{C}\mid\mu^2\in\mathrm{Sp}(A_2(-2,1)\}$ mais d'après **Q32**, $\mathrm{Sp}(A_2(-2,1))=\{-2+2\cos(\pi/3),-2+2\cos(2\pi/3)\}=\{-1,-3\}$ d'où $\mathrm{Sp}(B)=\{-i,i,-i\sqrt{3},i\sqrt{3}\}$. Comme $B\in\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$, cela montre que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbf{C})$.

Q42. D'après **Q32**, une base de vecteurs propres de $A_2(-2,1)$ est $((\sin(\pi/3),\sin(2\pi/3))^T,(\sin(2\pi/3),\sin(4\pi/3))^T)=((\sqrt{3}/2,\sqrt{3}/2)^T,(\sqrt{3}/2,-\sqrt{3}/2)^T)$, donc $((1,1)^T,(1,-1)^T)$ en est une également. D'après **Q38**, des vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $-i\sqrt{3}$, $i\sqrt{3}$, $-i$ et i de B sont

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-i\sqrt{3}\\i\sqrt{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\i\sqrt{3}\\-i\sqrt{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-i\\-i\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}1\\1\\i\\i\end{pmatrix}.$$

Notons

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&-1&1&1\\-i\sqrt{3}&i\sqrt{3}&-i&i\\i\sqrt{3}&-i\sqrt{3}&-i&i\end{pmatrix},$$

les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres de B associés à des valeurs propres distinctes, donc forment une base de vecteurs propres de B donc P est inversible. Par construction, il s'agit de la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteur propres de B. La formule de changement de base montre que $B=PDP^{-1}$.

Q43. La matrice $\exp(tB)$ étant inversible pour tout $t\in\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} Y'=DY &\Leftrightarrow\forall t\in\mathbf{R},\quad \exp(-tD)Y'-\exp(-tD)DY=0 \\ &\Leftrightarrow\forall t\in\mathbf{R},\quad \frac{\mathrm{d}(\exp(-tD)X)}{\mathrm{d}t}=0 \\ &\Leftrightarrow\exists C\in\mathbf{R}^4,\forall t\in\mathbf{R},\quad \exp(-tD)X=C \\ &\Leftrightarrow\exists C\in\mathbf{R}^4,\forall t\in\mathbf{R},\quad Y=\exp(tD)C. \end{aligned}$$

On vient de montrer que l'ensemble des solutions du système est inclus dans l'ensemble $\{t\mapsto\exp(tD)C\mid C\in\mathbf{R}^4\}$ et on vérifie sans problèmes l'inclusion réciproque, il y a donc égalité entre ces deux ensembles. La matrice tD étant diagonale pour tout $t\in\mathbf{R}$,

$$\forall t\in\mathbf{R},\quad\exp(tD)=\begin{pmatrix}e^{-it\sqrt{3}}&0&0&0\\0&e^{it\sqrt{3}}&0&0\\0&0&e^{-it}&0\\0&0&0&e^{it}\end{pmatrix}.$$

Q44. Écrivons comme en **Q42**, $B=PDP^{-1}$. La matrice P étant inversible,

$$X'=BX\Leftrightarrow X'=PDP^{-1}X\Leftrightarrow P^{-1}X'=DP^{-1}X.$$

D'après **Q43**, l'ensemble des solutions de ce système est $\{t \mapsto P\exp(tD)C \mid C \in \mathbf{R}^4\}$. Mais remarquons qu'en posant $C = \frac{1}{4}(1,1,1,1)^T$, $PC = (1,0,0,0)$, donc en définissant la fonction $X : t \mapsto P\exp(tD)C$, on a $X(0) = PC = (1,0,0,0)$ et d'après **Q43**,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad X(t) = P\exp(tD)C = \frac{1}{4}P\begin{pmatrix} e^{-it\sqrt{3}} \\ e^{it\sqrt{3}} \\ e^{-it} \\ e^{it} \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Cauchy, X est l'unique solution de (2) prenant en 0 la valeur $(1,0,0,0)^T$. On en déduit que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{4}(e^{-it\sqrt{3}} + e^{it\sqrt{3}} + e^{-it} + e^{it}) = \dfrac{1}{2}(\cos(t\sqrt{3}) + \cos(t)) \\ x_2(t) = \dfrac{1}{4}(-e^{-it\sqrt{3}} - e^{it\sqrt{3}} + e^{-it} + e^{it}) = \dfrac{1}{2}(-\cos(t\sqrt{3}) + \cos(t)). \end{cases}$$

FIN
