MINES

Session 2019 - MP

MATHÉMATIQUES I

Proposition de corrigé par Thomas Harbreteau. Pour toute question ou remarque éventuelle, vous pouvez me contacter à l'adresse mail suivante : tharbreteau@protonmail.com.

1. Soient $n \geq 1$ et $z \in \mathbf{C}$,

$$\frac{\dfrac{(p(n+1))^r}{(p(n+1)!)}z^{n+1}}{\dfrac{(pn)^r}{(pn)!)}z^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \frac{1}{p(n+1)\times\cdots\times(pn+1)}|z|$$

mais $(1+1/n)^r|z| \to_{(n\to+\infty)} |z|$ et $p>0$ donc

$$0 \leq \frac{1}{p(n+1)\times\cdots\times(pn+1)} \leq \frac{1}{pn+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que le rapport précédent tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc par critère de d'Alembert, la série entière $\sum(pn)^r z^n/(pn)$ converge absolument pour tout $z \in \mathbf{C}$, donc a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

De plus, soient $n \geq 1$ et $z \in \mathbf{C}$,

$$\frac{\dfrac{(p(n+1))^r}{(p(n+1)!)}z^{p(n+1)}}{\dfrac{(pn)^r}{(pn)!)}z^{pn}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^r \frac{1}{p(n+1)\times\cdots\times(pn+1)}|z|^p$$

donc par les mêmes arguments, le rayon de convergence de la série entière $\sum(pn)^r z^{pn}/(pn)!$ est égal à $+\infty$.

A Équivalence entre $(H_{r,p})$ et $(H_{r,1})$ lorsque $r>0$

2. Comme $r>0$, la fonction $t\mapsto(t-1)^r$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et la fonction $t\mapsto t^{1-r}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$. Par opérations, φ_x est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall t>1,\quad \varphi_x'(t) = (1-r)t^{-r}(t-1)^r + t^{1-r}r(t-1)^{r-1} = t^{-r}(t-1)^{r-1}((1-r)(t-1)+rt) = t^{1-r}(t-1)^{r-1} > 0.$$

La fonction φ_x est donc strictement croissante sur $]1,+\infty[$, mais $\varphi_x(1) = -x < 0$ et $\varphi_x(t) \to_{(t\to+\infty)} +\infty$. Cette fontion étant continue sur $]1,+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule en au moins un $t_x > 1$ mais par stricte croissance, ce t_x est unique. On en déduit que φ_x est négative sur $[1,t_x]$ et positive sur $[t_x,+\infty[$.

Soit $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{(n+1)^r}{(n+1)!}x^{n+1} - \frac{n^r}{n!}x^n = \frac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n(x - n^r(n+1)^{1-r}) = -\frac{(n+1)^{r-1}}{n!}x^n\varphi_x(n+1).$$

Étant donné que $\lfloor t_x\rfloor \leq t_x < \lfloor t_x\rfloor \leq +1$, $u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$ si et seulement si $n \geq \lfloor t_x\rfloor$, d'où la croissance de la suite $(u_n(x))_{0\leq n\leq\lfloor t_x\rfloor}$ et la décroissance de $(u_n(x))_{n\geq\lfloor t_x\rfloor}$.

3. Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $x \geq |\alpha|+1$, alors $x+\alpha \geq 1$ et

$$\varphi_x(x+\alpha) = (x+\alpha)^{1-r}(x+\alpha-1)^r - x = x\left(\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{1-r}\left(1+\frac{\alpha-1}{x}\right)^r - 1\right).$$

Comme les quantités α/x et $(\alpha-1)/x$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on peut écrire les développements limités à l'ordre 1 suivants :

$$\varphi_x(x+\alpha) = x\left(\left(1+(1-r)\frac{\alpha}{x}\right)\left(1+r\frac{\alpha-1}{x}\right) - 1 + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \alpha - r + \underset{x\to+\infty}{o}(1).$$

La limite recherchée est donc $\alpha - r$. A fortiori, $\varphi_x(x+r) \to_{(x\to+\infty)} 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $A > 1$ tel que pour tout $x > A$, $|\varphi_x(x+r)| < \varepsilon$. D'après la question 2, t_x est l'unique point d'annulation de φ_x, donc il existe $\delta_x > 0$ tel que pour tout $t \geq 1$, $|t - t_x| < \delta_x$ si et seulement si $|\varphi_x(t)| < \varepsilon$. Mais pour tout $x > 0$, on peut choisir un $\delta_x \leq \varepsilon$. Ainsi, si $x > A$, alors $|\varphi_x(x+r)| < \varepsilon$ donc $|x + r - t_x| < \delta_x \leq \varepsilon$. Ceci montre bien que $t_x - x - r \to_{(x\to+\infty)} 0$.

4. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Remarquons que pour tout $x > 0$, $u_{\lfloor x \rfloor}(x) > 0$.
- Si $k > 0$, soit $x > 0$, alors

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} = \frac{(\lfloor x\rfloor+k)^r}{\lfloor x\rfloor^r} \frac{1}{(\lfloor x\rfloor+k)\times\cdots\times(\lfloor x\rfloor+1)} x^k.$$

Mais pour tout $i \in \{\lfloor x\rfloor+1, \dots, \lfloor x\rfloor+k\}$, $1/(\lfloor x\rfloor+k) \leq 1/i \leq 1/(\lfloor x\rfloor+1)$, donc

$$\frac{x^k}{(\lfloor x\rfloor+k)^k} \leq \frac{x^k}{(\lfloor x\rfloor+k)\times\cdots\times(\lfloor x\rfloor+1)} \leq \frac{x^k}{(\lfloor x\rfloor+1)^k}.$$

Par théorème d'encadrement, $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)/u_{\lfloor x\rfloor}(x) \to_{(x\to+\infty)} 1$, d'où l'équivalent recherché.
- Si $k = 0$, le résultat est évident.
- Si $k < 0$,

$$\frac{u_{\lfloor x\rfloor+k}(x)}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} = \frac{(\lfloor x\rfloor+k)^r}{\lfloor x\rfloor^r} \frac{1}{(\lfloor x\rfloor+k+1)\times\cdots\times\lfloor x\rfloor} x^k,$$

et on montre le résultat comme dans le cas $k > 0$.

Dans tous les cas, $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) \sim_{(x\to+\infty)} u_{\lfloor x\rfloor}(x)$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, on a donc

$$\frac{1}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} n+1.$$

Soit $\varepsilon > 0$, par définition de la limite, il existe donc $A > n$ tel que pour tout $x > A$,

$$\left| \frac{1}{u_{\lfloor x\rfloor}(x)} \left(\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) \right) - (n+1) \right| < \varepsilon.$$

La positivité de $u_{\lfloor x\rfloor}(x)$ permet de réécrire ceci

$$\sum_{i=\lfloor x\rfloor-n}^{\lfloor x\rfloor} u_i(x) > (n+1-\varepsilon)u_{\lfloor x\rfloor}(x),$$

donc pour $\varepsilon = 1$, on obtient bien la majoration voulue.

5. Soit $k \in \mathbf{Z}$, d'après la question 4, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $A_n > |k| + n$ tel que pour tout $x > A_n$, $\lfloor x+k\rfloor - n \geq 0$ et

$$n u_{\lfloor x+k\rfloor}(x) \leq \sum_{i=\lfloor x+k\rfloor-n}^{\lfloor x+k\rfloor} u_i(x) = \sum_{i=\lfloor x+k\rfloor-n}^{\lfloor x+k\rfloor} \frac{i^r x^i}{i!} \leq \lfloor x+k\rfloor^r \sum_{i=\lfloor x+k\rfloor-n}^{\lfloor x+k\rfloor} \frac{x^i}{i!} \leq \lfloor x+k\rfloor^r e^x.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lfloor x+k\rfloor^r/x^r \to_{(x\to+\infty)} 1$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x > B$, $\lfloor x+k\rfloor^r/x^r < (1+\varepsilon)$. De plus, il existe $N > 0$ tel que $(1+\varepsilon)/N < \varepsilon$. Notons $C = \max\{A_N, B\}$, alors pour tout $x > C$,

$$0 \leq \frac{u_{\lfloor x+k\rfloor}(x)}{x^r e^x} \leq \frac{\lfloor x+k\rfloor^r}{N x^r} \leq \frac{1+\varepsilon}{N} < \varepsilon.$$

Étant donné que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lfloor x+k\rfloor = \lfloor x\rfloor + k$, ceci montre que $u_{\lfloor x\rfloor+k}(x) = o_{(x\to+\infty)}(x^r e^x)$.

D'après la question 3, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $-1 < x + r - t_x < 1$. Soit $x > A$, alors $t_x - r - 1 < x < t_x + 1 - r$, donc $\lfloor t_x\rfloor - r - 1 < x < \lfloor t_x\rfloor + 2 - r$, d'où $\lfloor t_x\rfloor - \lfloor r\rfloor - 2 < x < \lfloor t_x\rfloor + 2 - \lfloor r\rfloor$. L'entier $\lfloor x\rfloor$ étant le plus grand entier vérifiant $\lfloor x\rfloor \leq x$, ceci montre que $\lfloor t_x\rfloor - \lfloor r\rfloor - 2 \leq \lfloor x\rfloor < \lfloor t_x\rfloor + 2 - \lfloor r\rfloor$. Posons $I = \{\lfloor r\rfloor - 1, \dots, \lfloor r\rfloor + 2\}$, il existe donc $i \in I$ tel que $\lfloor t_x\rfloor = \lfloor x\rfloor + i$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question 5, il existe pour tout $i \in I$ un réel strictement positif A_i tel que pour tout $x > A_i$, $0 \leq u_{\lfloor x\rfloor+i}(x)/(x^r e^x) < \varepsilon$. Notons $B = \max_{i\in I}\{A_i\}$, alors pour tout $x > \max\{A, B\}$, $0 \leq M_x/(x^r e^x) < \varepsilon$, ce qui montre bien que $M_x = o_{(x\to+\infty)}(x^r e^x)$.

6. Soient $x > 0$ et $N \geq 1$, comme $u_0(x) = 0$,

$$\sum_{n=1}^{N} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^{N-1} D_{n+1}u_n(x) - \sum_{n=1}^{N} D_n u_n(x) = -D_N u_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1} u_n(x)z^n = -D_N u_N(x) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n^r}{n!}(zx)^n.$$

Par croissances comparées, $u_N(x) \to_{(N\to+\infty)} 0$ et comme $z \neq 1$, $|D_N| = |(1-z^N)/(1-z)| \leq 2/|1-z|$. La suite (D_N) est donc bornée et d'après la question 1, la série $\sum n^r(zx)^n/n!$ converge. Ceci montre que la série $\sum D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x))$ converge et que, par passage à la limite quand $N \to +\infty$, sa somme vaut $S_{r,1}(zx)$.

Soit $N > \lfloor t_x \rfloor$, les calculs précédents et l'inégalité triangulaire montrent que

$$\left| \sum_{n=1}^{N} D_n(u_{n-1}(x) - u_n(x)) \right| \leq \frac{2}{|1-z|} \left(\sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor+1}^{N} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \right).$$

Mais d'après la question 2, si $n \geq \lfloor t_x \rfloor$, $u_{n-1}(x) \leq u_n(x)$ et si $n > \lfloor t_x \rfloor$, l'inégalité est renversée. Comme $u_0(x) = 0$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor+1}^{N} |u_{n-1}(x) - u_n(x)| \right) &= \left(\sum_{n=1}^{\lfloor t_x \rfloor} (u_n(x) - u_{n-1}(x)) + \sum_{n=\lfloor t_x \rfloor+1}^{N} (u_{n-1}(x) - u_n(x)) \right) \\ &= u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) + u_{\lfloor t_x \rfloor}(x) - u_N(x).\end{aligned}$$

Le terme $u_N(x)$ étant positif et M_x étant un majorant de la suite $(u_n(x))$, alors $M_x \geq u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$ donc en passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient bien $|S_{r,1}(x)| \leq 4M_x/|1-z|$.

On en déduit que $S_{r,1}(x) = O_{(x\to+\infty)}(M_x)$, donc d'après la question 5, $S_{r,1}(x) = o_{(x\to+\infty)}(x^r e^x)$.

7. Soient $x > 0$ et $N \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{N} \frac{n^r}{n!}(\xi^k x)^n = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{n^r}{n!} \xi^{nk} x^n.$$

La série $\sum n^r(\xi^k x)^n/n!$ étant convergente, la série $\sum(\sum_{k=0}^{p-1} n^r x^n \xi^{nk}/n!)$ l'est aussi et par passage à la limite quand $N \to +\infty$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n \left(\sum_{k=0}^{p-1} (\xi^n)^k \right).$$

De plus, pour tout $n \geq 1$, étant donné que $\xi^n = e^{2i\pi n/p}$, la somme $\sum_{k=0}^{p-1}(\xi^n)^k$ vaut 0 si n n'est pas un multiple de p et p sinon, d'où

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = p \sum_{\substack{n=1 \\ n \in p\mathbf{N}}}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} x^n = p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} x^{pn} = pS_{r,p(x)}.$$

D'après la question 6, pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, $S_{r,1}(\xi^k x)/(x^r e^x) \to_{(x\to+\infty)} 0$. Ceci montre bien que $pS_{r,p}(x)/(x^r e^x)$ est équivalent à $S_{r,1}(x)/(x^r e^x)$ quand x tend vers $+\infty$, donc que les énoncés $(H_{r,1})$ et $(H_{r,p})$ sont équivalents.

B Une démonstration probabiliste

8. Soit $\alpha > 0$, pour tout $x > 0$, X_x suit une loi de poisson de paramètre x, donc son espérance et sa variance sont égales à x. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, pour tout $x > 0$, $\mathbf{P}(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}) \leq x/(\alpha x^{2/3}) \leq 1/(\alpha x^{1/3})$, d'où $\mathbf{P}(|X_x - x| > \alpha x^{2/3}) \to_{(x\to+\infty)} 0$.

9. Soit $x > 1$, remarquons que $0 \leq A_x \leq (1 - x^{-1/3})^r$ et $0 \leq B_x \leq (1 + x^{-1/3})^r$. Ces deux variables aléatoires donc sont bornées, donc admettent une espérance finie.

De plus, par croissance et linéarité de l'espérance, A_x étant positive, $0 \leq \mathbf{E}(A_x) \leq (1 - x^{-1/3})^r \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})})$. Mais $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{(Z_x < 1 - x^{-1/3})}) = \mathbf{P}(Z_x < 1 - x^{-1/3})$ et $\mathbf{P}(Z_x < 1 - x^{-1/3}) = \mathbf{P}(1 - Z_x > x^{-1/3}) \leq \mathbf{P}(|1 - Z_x| > x^{-1/3}) \leq \mathbf{P}(|X_x - x| > x^{2/3})$ car $x > 0$. La question 8 montre que cette dernière quantité tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc par théorème d'encadrement, $\mathbf{E}(A_x) \to_{(x\to+\infty)} 0$.

De même, on montre que $(1 - x^{-1/3})\mathbf{P}(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) \leq \mathbf{E}(B_x) \leq (1 + x^{-1/3})\mathbf{P}(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3})$. D'après la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}(|Z_x - 1| > x^{-1/3}) + \mathbf{P}(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) = 1$, donc la question 8 montre que $\mathbf{P}(|Z_x - 1| \leq x^{-1/3}) \to_{(x\to+\infty)} 1$. Par théorème d'encadrement, $\mathbf{E}(B_x) \to_{(x\to+\infty)} 1$.

10. Soit $x > 0$, il existe $(a_0, \dots, a_{N-1}) \in \mathbf{R}^N$ tels que $\prod_{k=0}^{N-1}(X_x - k) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X_x^k$. La variable aléatoire X_x suit une loi de Poisson de paramètre x, donc si $k \in \{0, \dots, N-1\}$, d'après le théorème de transfert, X_x admet un moment d'ordre k si et seulement si la série $\sum e^{-x} x^n n^k / n!$ converge. Cependant, par croissances comparées, $e^{-x} x^n n^k / n! = o_{(n \to +\infty)}(1/n^2)$. Par comparaison à une série de Riemann, ces séries convergent donc X_x admet des moments d'ordre $0, 1, \dots, N-1$. Par inégalité triangulaire, $|Y_{N,x}| \leq |\prod_{k=0}^{N-1}(X_x - k)| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |a_k| X_x^k$, ce qui montre que $Y_{N,k}$ admet bien une espérance finie.

On peut alors appliquer le théorème de transfert, ce qui conduit à :

$$\mathbf{E}(Y_{N,k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X_x = n) \left(\mathbf{1}_{(n > x + x^{2/3})} \prod_{k=0}^{N-1} (n-k) \right) = \sum_{\substack{n=N \\ n > x + x^{2/3}}}^{+\infty} \frac{e^{-x} x^n}{(n-N)!} = x^N \sum_{\substack{n=0 \\ n > x + x^{2/3} - N}}^{+\infty} \mathbf{P}(X_x = n).$$

Ceci montre bien que $\mathbf{E}(Y_{N,k}) = x^N \mathbf{P}(X_x > x + x^{2/3} - N)$.

Enfin, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $x^{2/3} - N \geq x^{2/3}/2$, d'où $\mathbf{P}(X_x > x + x^{2/3} - N) \leq \mathbf{P}(X_x > x + x^{2/3}/2)$. D'après la question 8, $\mathbf{P}(X_x > x + x^{2/3}/2)$ admet une limite nulle quand x tend $+\infty$, d'où $\mathbf{E}(Y_{N,x}) = o_{(x \to +\infty)}(x^N)$.

11. Notons pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, le polynôme $P_k = \prod_{i=0}^{k-1}(X - i)$, qui est de degré k. La famille $(1, P_0, \dots, P_N)$ est une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc est libre. Comme elle possède $N+1$ éléments, c'est une base de $\mathbf{R}_N[X]$. Le polynôme X^N étant dans $\mathbf{R}_N[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$ tels que $X^N = \sum_{k=1}^{N} a_k P_k + a_0$ et l'évaluation de cette relation en 0 montre que $a_0 = 0$. Soit $x > 0$, alors

$$X_x^N = \sum_{k=1}^{N} a_k \left(\prod_{k=0}^{N-1} (X_x - k) \right), \qquad \text{d'où} \qquad \mathbf{1}_{(X_x > x + x^{2/3})} X_x^N = \sum_{k=1}^{N} a_k Y_{k,x}.$$

D'après la question 10, pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, $Y_{k,x}$ admet une espérance finie, qui est négligeable devant x^N quand x tend vers $+\infty$. Par linéarité de l'espérance,

$$\frac{\mathbf{E}(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^N)}{x^N} = \sum_{k=1}^{N} a_k \frac{\mathbf{E}(Y_{k,x})}{x^N} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

12. Soit $x > 0$, soit $\omega \in \Omega$. Si $Z_x(\omega) \leq 1 + x^{-1/3}$, $\mathbf{1}_{(Z_x(\omega) > 1 + x^{-1/3})} Z_x^r(\omega) = 0$ et sinon, $Z_x^r(\omega) \leq Z_x^{\lfloor r \rfloor + 1}(\omega)$. On en déduit que $0 \leq \mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^r \leq \mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^{\lfloor r \rfloor + 1}$. Par croissance de l'espérance, $0 \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^r) \leq \mathbf{E}(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^{\lfloor r \rfloor + 1})$. Comme $\lfloor r \rfloor + 1 \in \mathbf{N}^*$, d'après la question 11, le membre de droite de l'inégalité admet une limite nulle quand x tend vers 0, ce qui montre que $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^r) \to_{(x \to +\infty)} 0$.

Soit $x > 0$, remarquons que $Z_x^r = A_x + B_x + \mathbf{1}_{(Z_x > 1 + x^{-1/3})} Z_x^r$ donc d'après la question 9, Z_x^r admet une espérance finie, qui tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Par formule de transfert, on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_x = x) \frac{n^r}{x^r} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \qquad \text{d'où} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n n^r}{n!} \underset{x \to +\infty}{\sim} x^r e^x.$$

Ceci prouve l'énoncé $(H_{r,1})$.

13. Notons pour $n \in \mathbf{N}$, $a_n = (pn)^{r-p}/(pn)!$ ainsi que $b_n = (p(n+1))^r/(p(n+1))!$.

- Un calul analogue à celui fait à la question 1 montre que, par critère de d'Alembert, la série $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
- Les b_n sont tous strictement positifs.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(pn)^{r-p}}{(p(n+1))^r} \frac{(p(n+1))!}{(pn)!} = \frac{1}{p^p n^p} \left(\frac{n}{n+1} \right)^r (pn+1) \times \cdots \times p(n+1).$$

  Comme $(pn+1) \times \cdots \times p(n+1) \sim_{(n \to +\infty)} (pn)^p$, le rapport a_n/b_n tend quand n tend vers $+\infty$ vers 1, d'où $a_n \sim_{(n \to +\infty)} b_n$.

Par lemme de comparaison asymptotique des séries entières, comme $x^p \to_{(x \to +\infty)} +\infty$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{pn} \underset{x \to +\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{pn}, \qquad \text{d'où} \qquad S_{r,p}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^p S_{r-p,p}(x).$$

Si $(H_{r,p})$ est vraie, $S_{r,p}(x) \sim_{(x \to +\infty)} x^r e^x / p$ donc $S_{r-p,p}(x) \sim_{(x \to +\infty)} x^{r-p} e^x / p$, ce qui montre $(H_{r-p,p})$.

On montre ainsi par récurrence que pour tout $k \in \mathbf{N}$, pour tout $s > 0$, $(H_{s-kp,p})$ est vraie. Or il existe $q \in \mathbf{N}$ tel que $r + qp > 0$ et alors $(H_{r+qp,p})$ est vraie, d'où $(H_{r,p})$ est vrai.

C Application à l'équation d'Airy

14. Pour tout $n \geq 2$,

$$v_n - v_{n-1} = \ln n + x \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln(x+n) = -\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - x\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Le développement limité à l'ordre 2 quand $n \to +\infty$ s'écrit

$$v_n - v_{n-1} = -\left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2}\right) - x\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{x^2}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum(v_n - v_{n-1})$ converge.

Par correspondance suite-série, la suite (v_n) converge, notons $l \in \mathbf{R}$ sa limite. Pour tout $n > 0$,

$$v_n = \ln(n!) + \ln(n^x) - \ln\left(\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right) = \ln\left(n!n^x\left(\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right)^{-1}\right).$$

Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbf{R}$,

$$n!n^x\left(\prod_{k=0}^{n}(x+k)\right)^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^l.$$

En notant $\Gamma(x) = e^l > 0$, on obtient bien l'équivalent recherché.

15. L'équation différentielle (Ai) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de la forme $a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x = 0$ où $a = 1$, donc ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Par théorème de Cauchy-Lipschitz, (Ai) admet une unique solution sur $\mathbf{R}$ vérifiant les conditions en 0 de l'énoncé.

16. Supposons la fonction f développable en série entière en 0 sur $\mathbf{R}$, il existe $(a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telle que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Par théorème de dérivation des séries entières sur leur disque ouvert de convergence,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}.$$

La fonction f étant d'après la question 15 une solution de (Ai),

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = t\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, \qquad \text{donc :} \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}t^n.$$

Par unicité du développement en série entière, $a_2 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}$. De plus, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, donc $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. On en déduit que pour tout $n \geq 1$, $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{3n} = (3n+3)(3n+2)a_{3(n+1)}$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_{3n} = \left(\prod_{k=1}^{n}(3k)(3k-1)\right)^{-1} = \left(3^n n! \prod_{k=1}^{n}(3k-1)\right)^{-1} = \left(3^n n! \prod_{k=0}^{n-1}(3k+2)\right)^{-1}.$$

On a donc pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} t^{3n}.$$

Mais pour tout $r > 0$,

$$\left|\frac{a_{3(n+1)}r^{3(n+1)}}{a_{3n}r^{3n}}\right| = \frac{r^3}{3(n+1)(3n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'après le critère de d'Alembert, pour tout $r > 0$, la série $\sum a_n r^n$ converge absolument, donc a bien un rayon de convergence égal à $+\infty$. La fonction f est donc effectivement développable en série entière en 0 sur $\mathbf{R}$.

17. D'après la question 15,

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{2}{3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n-1)^{2/3}(n-1)!}{\Gamma(2/3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1/3}(n-1)!}{\Gamma(2/3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{n^{1/3}\Gamma(2/3)}.$$

Mais d'après la question 16, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{3n} = (3^{2n}n!\prod_{k=0}^{n-1}(k+2/3))^{-1}$ donc on obtient bien l'équivalent voulu.

D'après la formule de Stirling,

$$(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \qquad \text{et} \qquad (n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}, \qquad \text{d'où} \qquad (n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}\frac{(2n)!}{2^{2n}}.$$

On en déduit bien l'équivalent recherché.

18. Notons pour $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n = a_{3n}$ ainsi que $b_n = n^{-1/6}\Gamma(2/3)(2/3)^{2n}/(\sqrt{\pi}(2n)!)$.

- Pour tous $n > 0$ et $r > 0$,

$$\left|\frac{b_{n+1}r^{n+1}}{b_n r^n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/6}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{(2n)!}{(2(n+1))!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/6}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

  D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum b_n r^n$ converge absolument pour tout $r > 0$, donc a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
- Les suites (α_n) et (b_n) sont équivalentes d'après la question 17.
- La constante $\Gamma(2/3)$ étant strictement positive d'après la question 15, les b_n sont tous strictement positifs.

D'après le lemme de comparaison asymptotique des séries entières, comme t^3 tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n t^{3n} \sim_{(n\to+\infty)} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^{3n}$, d'où, d'après la question 16,

$$\begin{aligned} f(t) &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{+\infty} n^{-1/6}\frac{(2t^{3/2}/3)^{2n}}{(2n)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}2^{1/6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)^{-1/6}}{(2n)!}\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right)^{2n} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}2^{1/6}S_{-1/6,2}\left(\frac{2t^{3/2}}{3}\right). \end{aligned}$$

D'après l'équivalent de $S_{-1/6,2}(2t^{3/2}/3)$ établi à la question 17,

$$f(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt{\pi}}2^{1/6}\frac{(2t^{3/2}/3)^{-1/6}e^{2t^{3/2}/3}}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(2/3)3^{1/6}}{\sqrt{\pi}}t^{-1/4}e^{2t^{3/2}/3}.$$

On en déduit que $C = \Gamma(2/3)3^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

FIN
