Oraux de mathématiques du Magistère de l'ENS Rennes

Thomas Harbreteau

Session 2019

Commentaires généraux : Un accueil très chaleureux, des gâteaux, du thé et du café étaient à disposition dans une salle d'attente, dans laquelle on pouvait discuter avec les autres candidats.
Les oraux sont constitués d'une vingtaine de minutes de préparation, puis d'une vingtaine de minutes de présentation.
L'attente entre les épreuves est très aléatoire, allant de l'enchaînement des deux oraux de mathématiques à une attente de plusieurs heures entre les deux. À l'image de l'attente, les exercices semblent d'un niveau très hétérogène, même si certains sont finissables.
L'entretien n'est pas une épreuve, mais une discussion avec le responsable de la formation, qui explique en détail les étapes du cursus. La seule chose attendue du candidat est d'expliquer (très brièvement) pourquoi il candidate au Magistère. Il semble fortement conseillé de dire que l'on souhaite passer l'agrégation.

Algèbre

Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note f un endomorphisme linéaire de E.

1. Soit $x \in E$, montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire μ_x de $\mathbf{K}[X]$ tel que

$$\forall Q \in \mathbf{K}[X], \quad x \in \operatorname{Ker} Q(f) \iff \mu_x \mid Q.$$

On dit que f est *cyclique* s'il existe $x \in E$ tel que

$$\operatorname{Vect}(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)) = E.$$

2. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) f est cyclique

(ii) le polynôme caractéristique de f est égal à son polynôme minimal.

Commentaires : Un examinateur très enthousiaste, bougeant beaucoup, qui a eu du mal à formuler une indication.

▷ **Solution.**

1. L'énoncé parle d'un unique polynôme unitaire qui en divise d'autres, ce qui fait fortement penser à la caractérisation des idéaux de $\mathbf{K}[X]$.

Notons donc

$$I_x = \{Q \in \mathbf{K}[X] \mid x \in \operatorname{Ker} Q(f)\}.$$

On vérifie facilement que I_x est bien un idéal de $\mathbf{K}[X]$, non vide car il contient le polynôme minimal de f, d'où le résultat.

2. Il y a à première vue plus de choses à dire sur (i) que sur (ii), on commence donc par montrer le sens direct. On notera μ_f le polynôme minimal de f et χ_f son polynôme caractéristique.

(i) $\implies$ (ii) : Supposons f cyclique, alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E, donc est libre, donc

$$\forall (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbf{K}^n, \quad (\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0) \implies (\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0).$$

On en déduit que

$$\forall P \in \mathbf{K}_{n-1}[X], \quad (P(f)(x) = 0) \implies (P = 0),$$

donc aucun polynôme unitaire de degré inférieur ou égal à $n-1$ n'annule f, d'où $\deg \mu_f \geq n$. Le théorème de Cayley-Hamilton montre alors que μ_f divise χ_f, qui est de degré n, donc μ_f l'est aussi. Enfin, ces deux polynômes étant unitaires, de mêmes degrés, et l'un divisant l'autre, ils sont égaux.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Par l'absurde, supposons que f n'est pas cyclique et montrons qu'il existe un polynôme annulateur de f de degré strictement inférieur à n. Pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ est liée donc il existe $(\lambda_{0,x}, \ldots, \lambda_{n-1,x}) \in \mathbf{K}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$\lambda_{0,x} x + \cdots + \lambda_{n-1,x} f^{n-1}(x) = 0,$$

ce qui montre que le polynôme $Q_x = \lambda_{0,x} + \lambda_{1,x} X + \cdots + \lambda_{n-1,x} X^{n-1}$, de degré au plus $n-1$, vérifie $Q_x(f)(x) = 0$. D'après **1**, pour tout $x \in E$, μ_x divise Q_x, donc μ_x est de degré au plus $n-1$. De plus, pour tout $x \in E$, μ_x divise μ_f.

Indication de l'examinateur : Combien de diviseurs μ_f admet-il ?

Le polynôme μ_f admet un nombre fini de diviseurs, donc comme les μ_x divisent μ_f et qu'ils sont une infinité, beaucoup sont égaux. Il existe donc $p \in \mathbf{N}$ et $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ tels que pour tout $x \in E$, $\mu_x \in \{\mu_{x_1}, \ldots, \mu_{x_p}\}$.

Indication de l'examinateur : Considérez l'ensemble

$$A = \bigcup_{x \in E} \operatorname{Ker} \mu_x(f).$$

Pour $x \in E$ fixé, quel élément (très simple) de E appartient à $\operatorname{Ker} \mu_x$?

D'après ce qui précède,

$$A = \bigcup_{i \in \{1, \ldots, p\}} \operatorname{Ker} \mu_{x_i}(f).$$

De plus, pour tout $x \in E$, avec les notations introduites en **1**, $\mu_x \in I_x$ donc $x \in \operatorname{Ker} \mu_x(f)$, d'où $A = E$. Mais si une union finie d'espaces vectoriels est égale à un espace vectoriel, il y en a un qui les contient tous.

Remarque de l'examinateur : Pas besoin de démontrer ce résultat.

Il existe donc $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $A = E = \operatorname{Ker} \mu_{x_i}(f)$, donc μ_{x_i}, un polynôme de degré strictement inférieur à n, annule f. C'est absurde car son polynôme minimal est de degré n, car égal à son polynôme caractéristique. Par conséquent, f est bien cyclique.

Analyse

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n} = \int_0^1 t^{-t} \mathrm{d}t.$$

Commentaires : Un examinateur souriant, mais plutôt avare de paroles, sa seule réplique étant “Vous êtes sûr ?”.

▷ **Solution.**

Commençons par montrer que les objets introduits existent. La fonction $t \mapsto t^{-t} = e^{-t \ln t}$ tend vers 1 en 0 par croissances comparée, donc est intégrable sur $]0, 1]$. De plus, $n^{-n} = o_{(n \to +\infty)}(1/n^2)$ donc par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum n^{-n}$ converge.

On veut montrer qu'une somme est égale à une intégrale, on a bien envie de développer quelque chose en série entière puis d'intervertir une somme et une intégrale. Il y a une intégrale dans le membre de gauche, on va donc partir de là et faire apparaître une somme. On écrit t^{-t} sous forme exponentielle et on développe l'exponentielle en série entière, ce qui conduit à

$$\int_0^1 t^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t \ln t)^n}{n!}.$$

Notons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n : t \mapsto (-t \ln t)^n / n$, la fonction $t \mapsto t \ln t$ est bornée sur $]0, 1]$, notons $M > 0$ un de ses majorants. On a alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in]0, 1], \quad |f_n(t)| \leq \frac{M^n}{n!},$$

d'où

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad N_\infty(f_n) \leq \frac{M^n}{n!}.$$

La série $\sum M^n / n!$ converge (c'est la série exponentielle) donc la série $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $]0, 1]$, ce qui permet d'intervertir les symboles somme et intégrale. Par conséquent,

$$\int_0^1 t^{-t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\int_0^1 (t \ln t)^n \mathrm{d}t \right).$$

Mais si $n \in \mathbf{N}^*$, par intégration par parties,

$$\int_0^1 (t \ln t)^n \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t)^n\right] - \frac{n}{n+1} \int_0^1 t^n \ln(t)^{n-1} \mathrm{d}t,$$

et le crochet est nul par croissances comparées.

Remarque de l'examinateur : On peut écrire le crochet directement, pas besoin de repasser par des intégrales et crochets entre $\varepsilon > 0$ et 1, puis passer à la limite lorsque ε tend vers 0.

On voit que la puissance du ln a diminué de 1 tandis que la puissance de t est restée la même, on va donc faire n intégrations par parties successives pour calculer cette intégrale, ce qui mène à

$$\int_0^1 (t \ln t)^n \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Cette expression est aussi vraie pour $n = 0$, ce qui conclut.