Solution des exercices

Thomas Harbreteau

8 août 2019

Table des matières

Préambule

Tous les énoncés de ce document sont tirés des feuilles d'exercices de la MPSI de La Martinière Monplaisir [1]. Les solutions qui les accompagnent sont des propositions de corrigé et peuvent comporter des erreurs. Si vous en trouvez, vous pouvez me contacter à l'adresse mail en bas de page [2]. Les solutions sont rédigées rigoureusement mais leur objectif est d'expliquer les étapes des raisonnements et non pas d'être élégantes et concises.

Seuls les exercices ✍ sont traités. Ils sont considérés comme globalement plus difficiles que les autres, car moins guidés ou plus techniques, mais leur difficulté ainsi que leur intérêt reste très variable. Ils sont plutôt typés exercices d'oraux. Il n'est intéressant de regarder complètement une solution qu'une fois l'exercice cherché, mais il est possible d'en lire une partiellement se débloquer.

Vous pouvez vous déplacer facilement dans le document en cliquant sur la feuille d'exercice qui vous intéresse dans la table des matières. Vous pouvez revenir à cette dernière à tout moment en cliquant sur le symbole 📘 en bas à droite de chaque page. Attention, il se peut que sur téléphone, les liens ne fonctionnent pas. Bonne lecture.

Thomas Harbreteau

1. `https://mpsilamartin.github.io/maths/TD.html`
2. `tharbreteau@protonmail.com`

Feuille d'exercice n° 1 : **Fonctions usuelles**

Exercice 17 ()

Résoudre : $\operatorname{Arcsin} 2x = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}x)$.

▷ **Solution.**

Notons (E) cette équation, la fonction Arcsin étant définie sur $[-1,1]$, (E) est définie sur $[-1/2, 1/2]$.

Analyse : Soit $x \in [-1/2, 1/2]$ solution de (E). On cherche à éliminer les Arcsin, on commence donc par appliquer la fonction sinus à notre équation, ce qui mène à

$$2x = \sin(\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}x)).$$

En développant le sinus, il vient

$$2x = \sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}x)) + \sin(\operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}x))\cos(\operatorname{Arcsin} x) = x\cos(\operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}x)) + \sqrt{2}x\cos(\operatorname{Arcsin} x).$$

Comme $\cos = \sqrt{1-\sin^2}$, ceci se réécrit

$$2x = x\sqrt{1-\sin(\operatorname{Arcsin}(\sqrt{2}x))^2} + \sqrt{2}x\sqrt{1-\sin(\operatorname{Arcsin} x)^2} = x\sqrt{1-2x^2} + \sqrt{2}x\sqrt{1-x^2},$$

soit

$$x\left(2 - \sqrt{1-2x^2} - \sqrt{2(1-x^2)}\right) = 0.$$

Par conséquent, $x = 0$ ou $2 - \sqrt{1-2x^2} - \sqrt{2(1-x^2)} = 0$. Notons $(\mathcal{E})$ l'équation

$$2 - \sqrt{1-2t^2} - \sqrt{2(1-t^2)} = 0,$$

définie sur $[-1/2, 1/2]$. Elle semble difficile à résoudre, cela nous arrangerait qu'elle n'admette aucune solution. Étant donné que $t \in [-1/2, 1/2]$,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-2t^2} \leq 1 \\ \sqrt{\dfrac{3}{2}} \leq \sqrt{2(1-t^2)} \leq \sqrt{2} \end{cases}, \quad \text{d'où} \quad 2-(1+\sqrt{2}) \leq 2 - \sqrt{1-2t^2} + \sqrt{2(1-t^2)} \leq 2 - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},$$

soit

$$1-\sqrt{2} \leq 2 - \sqrt{1-2t^2} + \sqrt{2(1-t^2)} \leq 2 - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}.$$

Enfin,

$$2 - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \geq 0 \iff 2\sqrt{2} \geq \sqrt{3}+1 \iff (2\sqrt{2})^2 \geq (\sqrt{3}+1)^2 \iff 8 \geq 4 + 2\sqrt{3} \iff 2 \geq \sqrt{3} \iff 4 \geq 3.$$

Comme $4 < 3$, $2 - (\sqrt{3}+1)/\sqrt{2} < 0$, et donc $(\mathcal{E})$ n'admet pas de solution. On en déduit que $x = 0$.

Synthèse : On vérifie bien que 0 est solution de (E).

Ceci montre que (E) admet 0 pour unique solution.

Feuille d'exercice n° 4 : **Nombres complexes**

Exercice 5

Résoudre pour $z \in \mathbf{C}$, $2\arg(z+\mathrm{i}) = \arg(z) + \arg(\mathrm{i})\ [2\pi]$.

▷ **Solution.**

Notons (E) cette équation. Soit $z \in \mathbf{C}$,

$$2\arg(z+\mathrm{i}) = \arg(z) + \arg(\mathrm{i})\ [2\pi] \iff \arg(z+\mathrm{i})^2 = \arg(z\mathrm{i})\ [2\pi] \iff \arg((z+\mathrm{i})^2) - \arg(z\mathrm{i}) = 0\ [2\pi].$$

On aimerait rassembler les termes du membre de gauche, mais le cas $z = 0$ pose problème. On vérifie que 0 n'est pas solution de (E) et on l'exclut. Soit donc $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}
\arg((z+\mathrm{i})^2) - \arg(z\mathrm{i}) = 0\ [2\pi] &\iff \arg\left(\frac{(z+\mathrm{i})^2}{z\mathrm{i}}\right) = 0\ [2\pi] \\
&\iff \frac{(z+\mathrm{i})^2}{z\mathrm{i}} \in \mathbf{R}_+ \\
&\iff \frac{z^2 + 2\mathrm{i}z - 1}{z\mathrm{i}} \in \mathbf{R}_+ \\
&\iff -\mathrm{i}z + 2 + \frac{\mathrm{i}}{z} \in \mathbf{R}_+.
\end{aligned}$$

Notons $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ le module et l'argument de z, alors

$$-\mathrm{i}z + 2 + \frac{\mathrm{i}}{z} = -\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\theta} + 2 + \frac{\mathrm{i}}{r}e^{-\mathrm{i}\theta} = -\mathrm{i}r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) + 2 + \mathrm{i}\frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{r} = 2 + \sin(\theta)\left(r + \frac{1}{r}\right) + \mathrm{i}\cos(\theta)\left(\frac{1}{r} - r\right),$$

d'où

$$-\mathrm{i}z + 2 + \frac{\mathrm{i}}{z} \in \mathbf{R}_+ \iff \begin{cases} 2 + \sin(\theta)\left(r + \frac{1}{r}\right) \geq 0 \\ \cos(\theta)\left(\frac{1}{r} - r\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 + \sin(\theta)\left(r + \frac{1}{r}\right) \geq 0 \\ (\cos\theta = 0) \quad \text{ou} \quad \left(\left(\frac{1}{r} - r\right) = 0\right) \end{cases}.$$

Comme $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\cos\theta = 0 \iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\},$$

et comme $r > 0$,

$$\frac{1}{r} - r = 0 \iff 1 = r^2 \iff r = 1.$$

Enfin, comme $r > 0$,

$$2 + \sin(\theta)\left(r + \frac{1}{r}\right) \geq 0 \iff 2 + \frac{r^2+1}{r}\sin\theta \geq 0 \iff \sin\theta \geq -\frac{2r}{r^2+1}.$$

- Si $r = 1$, $-2r/(r^2+1) = -1$ et donc pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $\sin\theta \geq -2r/(r^2+1)$.
- Si $\theta = \pi/2$, $\sin\theta = 1$, or $r > 0$ donc $-2r/(r^2+1) < 0$, d'où $\sin\theta \geq -2r/(r^2+1)$.
- Si $\theta = 3\pi/2$, $\sin\theta = -1$ et alors

$$\sin\theta \geq -\frac{2r}{r^2+1} \iff -1 \geq -\frac{2r}{r^2+1} \iff r^2 + 1 \leq 2r \iff r^2 + 1 - 2r \leq 0 \iff (r-1)^2 \leq 0 \iff r = 1.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} 2 + \sin(\theta)\left(r + \frac{1}{r}\right) \geq 0 \\ (\cos\theta = 0) \quad \text{ou} \quad \left(\left(\frac{1}{r} - r\right) = 0\right) \end{cases} \iff \left((r = 1) \quad \text{ou} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Par conséquent, les solutions de (E) sont exactement les nombres complexes dont le module est égal à 1 ou dont l'argument est égal à $\pi/2$, sauf 0 qui n'est pas solution.

Exercice 10

Soit $(n, z) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{C}$ tel que $z^n = (z+1)^n = 1$. Montrer que n est multiple de 6 et que $z^3 = 1$.

▷ **Solution.**

Notons $\theta \in \mathbf{R}$ l'argument de z. Comme $z^n = 1$, $|z| = 1$ donc $z = e^{i\theta}$. De plus, $(z+1)^n = 1$ donc $|z+1| = 1$. En utilisant la technique de l'angle moitié ainsi que les formules d'Euler, on obtient que

$$|z+1| = |e^{i\theta} + 1| = |e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})| = \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 1.$$

Par conséquent, $\cos(\theta/2) = \pm 1/2$, donc $\theta/2$ est égal à $\pi/3$ ou à $2\pi/3$ modulo π, donc θ est égal à $2\pi/3$ ou à $4\pi/3$ modulo 2π, ce qui montre au passage que $z^3 = 1$.

- Si $\theta = 2\pi/3\ [2\pi]$,
$$(z+1)^n = (e^{i2\pi/3} + 1)^n = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = (e^{i\pi/3})^n = e^{in\pi/3} = 1,$$
donc $n\pi/3 = 0\ [2\pi]$, soit $n = 0\ [6]$.
- Si $\theta = 4\pi/3\ [2\pi]$,
$$(z+1)^n = (e^{i4\pi/3} + 1)^n = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = (e^{-i\pi/3})^n = e^{-in\pi/3} = 1,$$
donc $n\pi/3 = 0\ [2\pi]$, soit $n = 0\ [6]$.

Dans tous les cas, n est bien un multiple de 6.

Exercice 13

Soit n un entier naturel non nul, notons $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n.$$

▷ **Solution.**

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \omega^{kj}.$$

Mais on sait calculer la somme géométrique $\sum_k \omega^{kj}$, d'où l'idée d'inverser les deux sommes. Comme elles sont finies, cela ne pose pas de problèmes et

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\omega^{kj} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{j}\omega^{kj} = \sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k\right).$$

On reconnaît bien une somme géométrique. Soit $j \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\omega^j = 1 \iff e^{2ij\pi/n} = 1 \iff 2j\pi/n = 0\ [2\pi] \iff j = 0\ [n].$$

- Si $j = 0\ [n]$, c'est-à-dire si $j = 0$ ou $j = n$,
$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k = n.$$
- Si $j \neq 0\ [n]$, $\omega^j \neq 1$ donc par formule de sommation géométrique,
$$\sum_{k=0}^{n-1} (\omega^j)^k = \frac{1-\omega^{jn}}{1-\omega}.$$
Mais $\omega^{jn} = e^{2ij\pi} = 1$, donc cette somme est nulle.

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n = \sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-1}(\omega^j)^k\right) = \binom{n}{0}n + \binom{n}{n}n = 2n.$$

Feuille d'exercice n° 5 : **Équations différentielles**

Exercice 2

Soit $a, b \in \mathbf{R}$, soit $I(a,b) = \displaystyle\int_a^b \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$.

1) Montrer que $I(a,b) = I(-b,-a)$.

2) Soient a et b de même signe. Montrer que $I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) = I(a,b)$. En déduire que $I\left(a,\frac{1}{a}\right) = 0$.

3) Soit $y \in [1,+\infty[$, montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $y = \mathrm{ch}(x)$. On note alors $x = \mathrm{Argch}(y)$.
Remarque : on dit que x est *l'argument cosinus hyperbolique* de y.

4) Exprimer $e^{\mathrm{Argch}(y)}$ en fonction de y.
Facultatif : exprimer $\mathrm{Argch}(y)$ en fonction de y et étudier la fonction Argch.

5) Calculer $I(a,b)$ pour $a \geq 1$ et $b \geq 1$ en commençant par poser $u = x + \frac{1}{x}$, puis $u = \sqrt{2}\,\mathrm{ch}(t)$.

6) En déduire $I(a,b)$ lorsque a et b sont de même signe (non nul).

▷ **Solution.**

1) Le seul outil dont on dispose pour changer les bornes d'une intégrale est le changement de variable, on se doute donc que c'est ce qu'il faut utiliser dans les premières questions. Le changement de variable affine $x = -u$ montre que

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x = -\int_{-a}^{-b} \frac{(-u)^2-1}{((-u)^2+1)\sqrt{(-u)^4+1}}\mathrm{d}u = \int_{-b}^{-a} \frac{u^2-1}{(u^2+1)\sqrt{u^4+1}}\mathrm{d}u = I(b,-a).$$

2) Le changement de variable $x = 1/u$ montre que

$$\begin{aligned}
I(a,b) &= \int_a^b \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{1/a}^{1/b} \frac{\frac{1}{u^2}-1}{\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\sqrt{\frac{1}{u^4}+1}}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) \\
&= \int_{1/a}^{1/b} \frac{-\left(1-u^2\right)}{u^2\left(\frac{1}{u^2}+1\right)u^2\sqrt{\frac{1}{u^4}+1}}\mathrm{d}u \\
&= \int_{1/a}^{1/b} \frac{u^2-1}{(1+u^2)\sqrt{1+u^4}}\mathrm{d}u \\
&= I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)
\end{aligned}$$

3) La fonction ch est continue, strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$, $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\mathrm{ch}(x) \to_{(x\to+\infty)} +\infty$. C'est donc une bijection de $\mathbf{R}_+$ dans $[1,+\infty[$, d'où l'existence d'un unique $x \in \mathbf{R}_+$ tel que $y = \mathrm{ch}(x)$.

4) Notons $x \in \mathbf{R}_+$ le réel défini en **3)**, alors $e^{\mathrm{Argch}(y)} = e^x$, mais $y = \mathrm{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$. Par conséquent,

$$2ye^x = e^{2x}+1, \quad \text{soit} \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

Considérons l'équation $t^2 - 2yt + 1 = 0$. Son discriminant Δ est égal à $4y^2 - 4 = 4(y^2-1)$, donc ses racines sont $(2y \pm \sqrt{4(y^2-1)})/2 = y \pm \sqrt{y^2-1}$. On en déduit que $e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$, mais $y - \sqrt{y^2-1}$ semble trop petit pour valoir e^x. En effet, $x \in \mathbf{R}_+$ donc $e^x \geq 1$ et

$$y - \sqrt{y^2-1} \geq 1 \iff (y-1)^2 \geq y^2 - 1 \iff y^2 - 2y + 1 \geq y^2 - 1 \iff y \leq 1,$$

la première équivalence venant du fait que $y-1 \geq 0$. Par conséquent, $e^x = y - \sqrt{y^2-1}$ si et seulement si $y=1$. Mais quand $y=1$, on a aussi $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$, ce qui montre que $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$, donc que $e^{\operatorname{Argch}(y)} = y + \sqrt{y^2-1}$.

On en déduit que

$$\operatorname{Argch} : y \in [1,+\infty[\mapsto \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

Par opérations, Argch est dérivable sur $[1,+\infty[$, avec

$$\forall y \in [1,+\infty[, \quad \operatorname{Argch}'(y) = \frac{1 + \dfrac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}}{y+\sqrt{y^2-1}} = \frac{2y + 2\sqrt{y^2-1}}{2\sqrt{y^2-1}(t+\sqrt{y^2-1})} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Elle est donc strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.

5) Soient $a \geq 1$ et $b \geq 1$. L'énoncé suggère le changement de variable $u = x + 1/x$, on va donc commencer par faire apparaître des facteur $x + 1/x$ dans l'intégrale :

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)x\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x.$$

Le numérateur correspond à $\mathrm{d}u$, exprimons $\sqrt{x^2+1/x^2}$ en fonction de u. Le facteur x^2+1/x^2 apparaît dans l'expression de u^2, en effet $x^2+1/x^2 = u^2-2$, d'où

$$\int_a^b \frac{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x = \int_{a+1/a}^{b+1/b} \frac{1}{u\sqrt{u^2-2}}\mathrm{d}u.$$

L'énoncé suggère ensuite le changement de variable $u = \sqrt{2}\operatorname{ch}(t)$, ce qui donne, en notant $\alpha = \operatorname{Argch}(a+1/a)$ et $\beta = \operatorname{Argch}(b+1/b)$,

$$\int_{a+1/a}^{b+1/b} \frac{1}{u\sqrt{u^2-2}}\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{2}\operatorname{sh}(t)}{\sqrt{2}\operatorname{ch}(t)\sqrt{2\operatorname{ch}(t)^2-2}}\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{sh}(t)}{\sqrt{2}\operatorname{ch}(t)\sqrt{\operatorname{ch}(t)^2-1}}\mathrm{d}t.$$

Mais $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$, et Argch est à valeurs dans $[1,+\infty[$, donc $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$. Si $t \geq 1$, $\sqrt{\operatorname{ch}(t)^2-1} = |\operatorname{sh}(t)| = \operatorname{sh}(t)$, d'où

$$\int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{sh}(t)}{\sqrt{2}\operatorname{ch}(t)\sqrt{\operatorname{ch}(t)^2-1}}\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{ch}(t)}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_\alpha^\beta \frac{e^t}{e^{2t}+1}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\big[\arctan(e^t)\big]_\alpha^\beta.$$

D'après **2)**, on a donc

$$I(a,b) = \sqrt{2}\big[\arctan(e^t)\big]_\alpha^\beta = \sqrt{2}\left[\arctan\left(a+\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1}\right) - \arctan\left(b+\frac{1}{b}+\sqrt{\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-1}\right)\right].$$

6) Supposons a et b non nuls, de même signe. La question précédente incite à distinguer des cas.

- Si $a \geq 1$ et $b \geq 1$, le calcul a été fait en **5)**.
- Si $a \leq 1$ et $b \geq 1$, alors $1/a \geq 1$. Par relation de Chasles,

$$I(a,b) = I\left(a,\frac{1}{a}\right) + I\left(\frac{1}{a},b\right),$$

  et $I(a,1/a) = 0$ d'après **2)**. On est ramené au cas précédent.
- Si $a \geq 1$ et $b \leq 1$, $I(a,b) = -I(b,a)$ et on est ramené au cas précédent.
- On traite les cas négatifs en se ramenant aux cas positifs avec **1)**.

Exercice 8 (🚲⛰)

On étudie les équations différentielles d'Euler, qui sont de la forme $(\mathcal{E})$: $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$, où a, b et c sont des constantes et g est une fonction.

1) On suppose que l'on étudie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbf{R}_+^*$ uniquement et l'on pose $z(t) = y(e^t)$. Montrer que y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux, à coefficients constants (à déterminer en fonction de a, b et c).

2) Résoudre $x^2y'' + xy' - y = 2x\ln(x)$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

3) Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

4) Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ sur $\mathbf{R}$.

▷ **Solution.**

1) La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$, donc

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = g(x) \iff \forall t \in \mathbf{R}, \quad ae^{2t}y''(e^t) + be^ty'(e^t) + cy(e^t) = g(e^t).$$

Comme $z = y \circ \exp$,

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbf{R}, & z'(t) = e^ty'(e^t) \\ \forall t \in \mathbf{R}, & z''(t) = e^ty'(e^t) + e^{2t}y''(e^t) \end{cases},$$

d'où

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad ae^{2t}y''(e^t) + be^ty'(e^t) + cy(e^t) = g(e^t) \iff \forall t \in \mathbf{R}, \quad az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t) = g(e^t).$$

On en déduit que

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g \iff az'' + (b-a)z' + cz = g \circ \exp\,.$$

2) D'après **1)**, y est solution de cette équation si et seulement si $z = y \circ \exp$ vérifie $z'' - z = 2te^t$. L'équation caractéristique de cette équation est $t^2 - 1 = 0$, de solutions 1 et -1. Les solutions homogènes sont donc de la forme

$$t \mapsto Ae^t + Be^{-t}, \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbf{R}^2.$$

Notons le polynôme $P = 2X$ ainsi que $\lambda = 1$, alors l'équation est de la forme $z'' - z = P(t)e^{\lambda t}$. Comme λ est racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $t \mapsto (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)e^t$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$. Soit f une fonction de cette forme, alors

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbf{R}, & f'(t) = (2\alpha t + \beta)e^t + (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)e^t = (\alpha t^2 + (2\alpha + \beta)t + \beta + \gamma)e^t \\ \forall t \in \mathbf{R}, & f''(t) = (2\alpha t + 2\alpha + \beta)e^t + (\alpha t^2 + (2\alpha+\beta)t + \beta + \gamma)e^t = (\alpha t^2 + (4\alpha + \beta)t + 2\alpha + 2\beta + \gamma)e^t. \end{cases}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f'' - f = 2te^t &\iff \forall t \in \mathbf{R}, \quad (\alpha t^2 + (4\alpha+\beta)t + 2\alpha + 2\beta + \gamma)e^t - (\alpha t^2 + \beta t + \gamma)e^t = 2te^t \\ &\iff \forall t \in \mathbf{R}, \quad ((4\alpha - 2)t + 2\alpha + 2\beta)e^t = 0 \\ &\iff \forall t \in \mathbf{R}, \quad (4\alpha - 2)t + 2\alpha + 2\beta = 0, \end{aligned}$$

par stricte positivité de l'exponentielle. L'évaluation en 0 et la limite quand t tend vers $+\infty$ montrent que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad (4\alpha - 2)t + 2\alpha + \beta = 0 \iff \begin{cases} 4\alpha - 2 = 0 \\ 2\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

On peut prendre $\gamma = 0$ pour la solution particulière. On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $z'' - z = 2te^t$ est

$$\left\{ t \mapsto Ae^t + Be^{-t} + \frac{1}{2}(t^2 - t)e^t \mid (A,B) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Mais d'après ce que l'on a dit au début, z est solution de cette équation si et seulement $y = z \circ \ln$ est solution de $x^2y'' + xy' - y = 2x\ln(x)$. Ainsi, les solutions de cette équation sont

$$\left\{x \mapsto Ae^{\ln(x)} + Be^{-\ln(x)} + \frac{1}{2}(\ln(x)^2 - \ln(x))x \mid (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\},$$

soit

$$\left\{x \mapsto Ax + \frac{B}{x} + \frac{1}{2}x\ln(x)(\ln(x)-1) \mid (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

3) D'après **1)**, y est solution de cette équation si et seulement si $z = y\circ\exp$ vérifie $z''+2z'+z = (e^t+1)^2 = e^{2t}+2e^t+1$. L'équation caractéristique de cette équation est $t^2+2t+1 = (t+1)^2 = 0$, dont l'unique solution est -1. Les solutions homogènes sont donc de la forme

$$t \mapsto (At+B)e^{-t}, \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbf{R}^2.$$

On cherche une solution particulière de l'équation, qui peut être exprimée comme somme de solutions particulières des équations

$$z'' + 2z' + z = e^{2t} \tag{1}$$
$$z'' + 2z' + z = 2e^{t} \tag{2}$$
$$z'' + 2z' + z = 1 \tag{3}$$

- On cherche une solution de (1) de la forme $t \mapsto \alpha e^{2t}$. Soit f une fonction de cette forme,

  $$f'' + 2f' + f = e^{2t} \iff \forall t \in \mathbf{R}, \quad (4\alpha + 4\alpha + \alpha - 1)e^{2t} = 0 \iff \alpha = \frac{1}{9},$$

  par stricte positivité de l'exponentielle.
- On cherche une solution de (2) de la forme $t \mapsto \beta e^{t}$. Soit g une fonction de cette forme,

  $$g'' + 2g' + g = 2e^{t} \iff \forall t \in \mathbf{R}, \quad (\beta + 2\beta + \beta - 2)e^{t} = 0 \iff \beta = \frac{1}{2},$$

  par stricte positivité de l'exponentielle.
- La fonction constante égale à 1 est solution de (3).

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $z'' + 2z' + z = (e^t+1)$ est

$$\left\{t \mapsto (At+B)e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{t} + 1 \mid (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Mais d'après ce que l'on a dit au début, z est solution de cette équation si et seulement $y = z \circ \ln$ est solution de $x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$. Par conséquent, les solutions de cette équation sont

$$\left\{x \mapsto (A\ln(x) + B)e^{-\ln(x)} + \frac{1}{9}e^{2\ln(x)} + \frac{1}{2}e^{\ln(x)} + 1 \mid (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\},$$

soit

$$\left\{x \mapsto \frac{A\ln(x)+B}{x} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \mid (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

4) Notons $(\mathcal{E})$ cette équation, définie sur $\mathbf{R}$, ainsi que $(\mathcal{E}_+)$ et $(\mathcal{E}_-)$ les restrictions respectives de $(\mathcal{E})$ à $\mathbf{R}_+$ et à $\mathbf{R}_-$. On a montré en **3)** que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_+)$ était

$$\left\{x \mapsto \frac{A\ln(x)+B}{x} \mid (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

La fonction $-\exp$ étant une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_-^*$, de même qu'en **1)**, on montre que si $z = y \circ (-\exp)$,

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g \iff az'' - (b-a)z' + cz = g \circ (-\exp).$$

Des calculs analogues à ceux faits en **3)** montrent que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_-)$ est

$$\left\{x \mapsto \frac{A\ln(-x)+B}{x} \mid (A,B) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Analyse : Soit y une solution de $(\mathcal{E})$, alors ses restrictions à $\mathbf{R}_+^*$ et à $\mathbf{R}_-^*$, notées respectivement y_+ et y_- sont solutions respectivement de $(\mathcal{E}_+)$ et de $(\mathcal{E}_-)$. Il existe donc $(A,B,C,D) \in \mathbf{R}^4$ tel que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad y_+(x) = \dfrac{A\ln(x)+B}{x} \\ \forall x \in \mathbf{R}_-^*, \quad y_-(x) = \dfrac{C\ln(-x)+D}{x} \end{cases}.$$

De plus, y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, donc y, y' et y'' sont continues en 0. Mais y_+ et y_- semblent diverger en 0, ce qui pose problème pour la continuité de y. En effet, si $(A,B) \neq (0,0)$,

$$y_+(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} \pm\infty, \quad \text{donc} \quad y(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} \pm\infty.$$

La fonction y ne peut être pas continue à droite de 0 si $(A,B) \neq (0,0)$ et on montre de même qu'elle ne peut pas être continue à gauche de 0 si $(C,D) \neq (0,0)$. Par conséquent, $A=B=C=D=0$, donc $y=0$.

Synthèse : La fonction nulle est bien solution de $(\mathcal{E})$.

Finalement, $(\mathcal{E})$ admet une unique solution, la fonction nulle.

Feuille d'exercice n° 7 : **Notion d'application**

Exercice 5 ( )

Soient E, E', F, F' quatre ensembles, $u : E' \to E$, $v : F \to F'$ deux applications. On définit l'application $\varphi : f \in F^E \mapsto v \circ f \circ u \in F'^{E'}$.

1) Vérifier que φ est bien définie.

2) Montrer que si v est injective et u surjective alors φ est injective.

3) Montrer que si v est surjective et u injective alors φ est surjective.
Remarque : cette dernière question est sensiblement plus difficile que les deux pemières.

▷ **Solution.**

1) Soit $f \in F^E$, pour tout $x \in E'$, $u(x) \in E$ donc $f(u(x)) \in F$, et donc $v(f(u(x))) \in F'$. Ainsi, la fonction $\varphi(f) = v \circ f \circ u$ est bien définie, et est une fonction de E' dans F'. Ceci étant vrai pour tout $f \in F^E$, la fonction φ est bien définie sur F^E.

2) Supposons v injective et u surjective. Soient f et g dans F^E telles que $\varphi(f) = \varphi(g)$, soit $v \circ f \circ u = v \circ g \circ u$. On veut montrer que les fonctions f et g sont égales. La fonction v étant injective, $f \circ u = g \circ u$. Pour tout $y \in E$, par surjectivité de u, il existe $x \in E'$ tel que $u(x) = y$, donc $f \circ u(x) = g \circ u(x)$, soit $f(y) = g(y)$. Ceci montre que $f = g$, et donc que la fonction φ est injective.

3) Supposons v surjective et u injective. Soit $g \in F'^{E'}$, on veut montrer qu'il existe $f \in F^E$ tel que $\varphi(f) = v \circ f \circ u = g$. Pour tout $y \in E'$, v étant surjective, il existe $x_y \in F$ tel que $g(y) = v(x_y)$. On cherche à définir une fonction $f \in F^E$ qui, pour tout $y \in E'$, associe à $u(y)$ l'élément $x_y \in F$. Ainsi, on aura bien pour tout $y \in E'$, $g(y) = v(x_y) = v(f(u(y))) = v \circ f \circ u(y)$. Cette fonction f devra donc prendre en les éléments de $\mathrm{Im}(u)$ certaines valeurs bien précises, mais les valeurs qu'elle prend sur $E \setminus \mathrm{Im}(u)$ n'ont aucune importance.

Soit $z \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $y \in E'$ tel que $u(y) = z$, et on aimerait définir $f(z) = f(u(y)) = x_y$. Mais pour cela, il faut vérifier que la valeur de $f(z)$ ne dépend pas du représentant y de z. Si $y, y' \in E'$ vérifient $u(y) = u(y') = z$, par injectivité de u, $y = y'$ donc $x_y = x_{y'}$. On peut donc bien définir $f(z) = x_y \in F$. On vient de définir f sur $\mathrm{Im}(u)$, il reste à la définir sur $E \setminus \mathrm{Im}(u)$. Pour cela, pas de contraintes, à tout $x \in E \setminus \mathrm{Im}(u)$ on dit que f associe un élément quelconque de F.

Ainsi, on vient de construire une fonction $f \in F^E$ vérifiant $g = v \circ f \circ u$, ce qui montre la surjectivité de φ.

Exercice 7 ( )

1) Soient $f : F \to E$ et $g : G \to E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \to F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si : $g(G) \subset f(F)$.

2) Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si : $\forall x, y \in E, \quad (f(x) = f(y) \implies g(x) = g(y))$.

▷ **Solution.**

1) ($\Longrightarrow$) : Supposons qu'il existe $h : G \to F$ vérifiant $g = f \circ h$. Pour tout $y \in \mathrm{Im}(g)$, il existe $x \in G$ tel que $g(x) = y$, soit $g(x) = f(h(x)) \in \mathrm{Im}(f)$. Ceci montre que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

($\Longleftarrow$) : Supposons que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f)$. Pour tout $y \in G$, $g(y) \in \mathrm{Im}(g)$ donc il existe $x_y \in F$ vérifiant $f(x_y) = g(y)$. Notons donc pour tout $y \in G$, $h(y) = x_y$. La fonction $h : G \to F$ vérifie bien

$$\forall y \in G, \quad g(y) = f(x_y) = f \circ h(y).$$

2) ($\Longrightarrow$) : Supposons qu'il existe $h : F \to G$ vérifiant $g = h \circ f$. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$, alors en appliquant la fonction h à cette égalité, il vient que $g(x) = g(y)$.

($\Longleftarrow$) : Supposons que

$$\forall x, y \in E, \quad (f(x) = f(y) \implies g(x) = g(y)).$$

On cherche à construire une fonction h qui, pour tout $x \in E$, associe à $f(x)$ l'élément $g(x)$. Cette fonction prend donc des valeurs bien précises sur $\mathrm{Im}(f)$, mais les valeurs qu'elle prend sur $F \setminus \mathrm{Im}(f)$ n'ont pas d'importance.

Pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x_y \in E$ tel que $f(x_y) = y$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, on aimerait définir $h(y) = h(f(x_y)) = g(x_y)$, mais on doit au préalable s'assurer que cette définition de $h(y)$ ne dépend pas du représentant x_y de y. Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x') = y$, alors $g(x) = g(x')$. On peut bien définir $h(y) = g(x_y)$. Enfin, on dit qu'à tout $y \in F \setminus \mathrm{Im}(f)$, h associe un élément quelconque de G. On vient donc de construire une fonction $h : F \to G$ vérifiant

$$\forall x \in E, \quad g(x) = h(f(x)).$$

Exercice 10

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1) **a)** Montrer que, pour toute partie A de E, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

b) Montrer que f est injective si et seulement si, pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.

2) **a)** Montrer que, pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.

▷ **Solution.**

1) **a)** Soit une partie A de E. Pour tout $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$, d'où $A \subset f^{-1}(f(A))$.

b) ($\Longleftarrow$) : Supposons que pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$. Soient x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$, alors $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$, or $x, y \in f^{-1}(f(\{x\}))$, donc $x, y \in \{x\}$. Par conséquent, $x = y$, ce qui montre l'injectivité de f.

($\Longrightarrow$) : Supposons f injective. Soit A une partie de E, supposons par l'absurde que $f^{-1}(f(A)) \neq A$. L'inclusion montrée en **1)a)** prouve alors que $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$. Il existe donc $x \in f^{-1}(f(A)) \setminus A$. Mais $f(x) \in f(A)$, d'où l'existence de $y \in A$ tel que $f(y) = f(x)$ et $x \neq y$. Ceci est absurde car contredit l'injectivité de f, donc $f^{-1}(f(A)) = A$.

2) **a)** Soit une partie B de F. Pour tout $x \in f^{-1}(B)$, $f(x) \in B$ donc $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) ($\Longleftarrow$) : Supposons que pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$. A fortiori, F étant une partie de lui-même, $F = f(f^{-1}(F)) \subset f(F)$. La fonction f étant à valeurs dans F, $f(F) = F$, d'où sa surjectivité.

($\Longrightarrow$) : Supposons f surjective. Soit une partie B de F, supposons par l'absurde que $f(f^{-1}(B)) \neq B$. L'inclusion montrée en **2)a)** prouve alors que $B \not\subset f(f^{-1}(B))$. Ainsi, il existe $y \in B \setminus f(f^{-1}(B))$. Mais f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$, d'où $y \in f(f^{-1}(B))$. C'est absurde, donc $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 12

Soit $f : E \to F$ une application, et $\mathcal{S} = \{X \subset E \mid f^{-1}(f(X)) = X\}$.

1) Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{S}$.

2) Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par intersection et réunion.

3) Soient $X \in \mathcal{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \emptyset$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \emptyset$.

4) Soient X et $Y \in \mathcal{S}$. Montrer que $\overline{X}$ et $Y \setminus X$ appartiennent à $\mathcal{S}$.

5) Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbf{P}(f(E)) \\ A \mapsto f(A) \end{cases}$$

est une bijection.

▷ **Solution.**

1) Soit une partie A de E, alors $f(f^{-1}(f(A))) = \{f(x) \mid x \in E,\ f(x) \in f(A)\} = f(A)$, d'où $f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) = f^{-1}(f(A))$. Ceci montre bien que $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{S}$.

2) Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{S}$, si l'un des deux est l'ensemble vide, le résultat est évident. Supposons donc les deux non vides, alors $f^{-1}(f(X)) \cap f^{-1}(f(Y)) = X \cap Y$. Soit $x \in X \cap Y$, alors $f(x) \in f(X \cap Y)$, donc $x \in f^{-1}(f(X \cap Y))$. Ainsi, $X \cap Y \subset f^{-1}(f(X \cap Y))$.

Remarque : On vient de montrer plus généralement que pour tout $A \subset E$,

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \tag{$*$}$$

Soit $y \in f^{-1}(f(X \cap Y))$, alors $f(y) \in f(X \cap Y)$ donc il existe $z \in X \cap Y$ tel que $f(y) = f(z)$. Comme $z \in X$, $f(z) = f(y) \in f(X)$ donc $y \in f^{-1}(f(X))$. De même, $y \in f^{-1}(f(Y))$, donc $y \in f^{-1}(f(X)) \cap f^{-1}(f(Y))$. Par conséquent, $f^{-1}(f(X \cap Y)) \subset f^{-1}(f(X)) \cap f^{-1}(f(Y)) = X \cap Y$, d'où $X \cap Y = f^{-1}(f(X \cap Y))$. L'ensemble $\mathcal{S}$ est bien stable par intersection.

De plus, $f^{-1}(f(X)) \cup f^{-1}(f(Y)) = X \cup Y$. D'après $(*)$, $X \cup Y \subset f^{-1}(f(X \cup Y))$. Soit $x \in f^{-1}(f(X \cup Y))$, alors $f(x) \in f(X \cup Y)$ donc il existe $y \in X \cup Y$ tel que $f(x) = f(y)$.

- Si $y \in X$, $f(y) = f(x) \in f(X)$ donc $x \in f^{-1}(f(X))$.
- Si $y \in Y$, $f(y) = f(x) \in f(Y)$ donc $x \in f^{-1}(f(Y))$.

On en déduit que $x \in f^{-1}(f(X)) \cup f^{-1}(f(X))$, donc $f^{-1}(f(X \cup Y)) \subset f^{-1}(f(X)) \cup f^{-1}(f(X)) = X \cup Y$, d'où $X \cup Y = f^{-1}(f(X \cup Y))$. L'ensemble $\mathcal{S}$ est bien stable par réunion.

3) Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in X \cap f^{-1}(f(A))$, alors $x \in X$ donc $f(x) \in f(X)$. De même, $x \in f^{-1}(f(A))$ donc $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $(y, z) \in X \times A$ tel que $f(x) = f(y) = f(z)$. Mais alors $f(z) = f(y)$ donc $z \in f^{-1}(f(X)) = X$, d'où $z \in X \cap A$. C'est absurde, donc $x \in X \cap f^{-1}(f(A)) = \emptyset$.

4) D'après $(*)$, $\overline{X} \subset f^{-1}(f(\overline{X}))$ et d'après **3)**, comme $X \in \mathcal{S}$, $\overline{X} \subset E$ et $X \cap \overline{X} = \emptyset$, $X \cap f^{-1}(f(\overline{X})) = \emptyset$. On en déduit que $f^{-1}(f(\overline{X})) \subset \overline{X}$, d'où $\overline{X} = f^{-1}(f(\overline{X}))$, et donc $\overline{X} \in \mathcal{S}$.

De plus, $Y \setminus X = Y \cap \overline{X}$. D'après ce qui précède, $\overline{X} \in \mathcal{S}$ et $Y \in \mathcal{S}$, mais d'après **2)**, $\mathcal{S}$ est stable par intersection, d'où $Y \cap \overline{X} = Y \setminus X \in \mathcal{S}$.

5) Notons φ cette application.

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{S}$ tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$, alors $f(A) = f(B)$. Ainsi, $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(B))$, d'où $A = B$, donc φ est injective.

Soit $Y \in \mathcal{P}(f(E))$, il existe $X \subset f(E)$ telle que $f(X) = Y$. D'après **1**, $f^{-1}(f(X)) \in S$, et $\varphi(f^{-1}(f(X))) = f(f^{-1}(f(X))) = f(X) = Y$, donc φ est surjective.

La fonction φ est donc une bijection de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{P}(f(E))$.

Feuille d'exercice n° 8 : Relation d'ordre et d'équivalence, et ensembles de nombres usuels

Exercice 2

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive sur un ensemble E. On définit la relation $\mathcal{S}$ sur E par : $x\mathcal{S}y$ si ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$).

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalence de $\mathcal{S}$.

▷ **Solution.**

- Pour tout $x \in E$, $\mathcal{R}$ étant réflexive, $x\mathcal{R}x$. Par conséquent, $x\mathcal{S}x$, d'où la réflexivité de $\mathcal{S}$.
- Soient x, y et z des éléments de E vérifiant $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$, alors

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \\ y\mathcal{R}x \text{ et } z\mathcal{R}y \end{cases}, \quad \text{donc par transitivité de } \mathcal{R}, \quad \begin{cases} x\mathcal{R}z \\ z\mathcal{R}x \end{cases}.$$

  Ainsi, $x\mathcal{S}z$ donc $\mathcal{S}$ est transitive.
- Soient x et y dans E tels que $x\mathcal{S}y$, alors $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Par conséquent, $y\mathcal{S}x$ donc $\mathcal{S}$ est symétrique.

Ceci montre que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence sur E.

Remarque : On note $E_{/\mathcal{S}}$ l'ensemble des classes d'équivalence de E pour $\mathcal{S}$, ainsi que pour tout $x \in E$, $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x pour $\mathcal{S}$.

Il faut maintenant définir une relation d'ordre sur $E_{/\mathcal{S}}$ en utilisant $\mathcal{R}$. Les éléments de $E_{/\mathcal{S}}$ sont des sous-ensembles de E, tandis que $\mathcal{R}$ est une relation sur les éléments de E. Il semble donc naturel d'utiliser des représentants des classes d'équivalences de $\mathcal{S}$ pour les comparer. La relation la plus simple semble la relation $\preceq$ sur $E_{/\mathcal{S}}$ définie par :

Soient a et b dans $E_{/\mathcal{S}}$, de représentants respectifs x et y dans E, alors $a \preceq b$ si $x\mathcal{R}y$.

Il faut tout d'abord montrer que cette relation est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas des représentants choisis. Soient donc a et b dans $E_{/\mathcal{S}}$, de représentants respectifs x et y dans E, tels que $a \preceq b$. Soient aussi x' et y' dans E tels que $\dot{x'} = \dot{x} = a$ et $\dot{y'} = \dot{y} = b$. Comme $x\mathcal{S}x'$, on a $x'\mathcal{R}x$, et comme $y\mathcal{S}y'$, on a aussi $y\mathcal{R}y'$. De plus, $x\mathcal{R}y$, donc par transitivité de $\mathcal{R}$, $x'\mathcal{R}y'$. La relation $\preceq$ est donc bien définie sur $E_{/\mathcal{S}}$.

- Soit $a \in E_{/\mathcal{S}}$, notons $x \in E$ un de ses représentants. Par réflexivité de $\mathcal{R}$, $x\mathcal{R}x$ donc $a \preceq a$. La relation $\preceq$ est réflexive.
- Soient a, b et c des éléments de $E_{/\mathcal{S}}$, de représentants respectifs x, y et z dans E, vérifiant $a \preceq b$ et $b \preceq c$. Par conséquent, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, donc par transitivité de $\mathcal{R}$, $x\mathcal{R}z$ donc $a \preceq c$. La relation $\preceq$ est transitive.
- Soient a et b dans $E_{/\mathcal{S}}$, de représentants respectifs x et y dans E, tels que $a \preceq b$ et $b \preceq a$. Par conséquent, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, d'où $x\mathcal{S}y$. Ceci montre bien que $\dot{x} = \dot{y}$, donc que $a = b$. La relation $\preceq$ est antisymétrique.

Finalement, $\preceq$ est bien une relation d'ordre sur $E_{/\mathcal{S}}$.

Exercice 10

Soient X et Y deux ensembles non vides et $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ majorée. Montrer

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) = \sup_{x\in X}\ \sup_{y\in Y} f(x,y).$$

▷ **Solution.**

Pour tout $(x,y) \in X\times Y$, $f(x,y) \leq \sup_{(a,b)\in X\times Y} f(a,b)$. Fixons $x \in X$, alors pour tout $y \in Y$, $\sup_{(a,b)\in X\times Y} f(a,b)$ majore la fonction $y \in Y \mapsto f(x,y)$. Par définition de la borne supérieure comme le plus petit des majorants, $\sup_{b\in Y} f(x,b) \leq \sup_{(a,b)\in X\times Y} f(a,b)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in X$, par les mêmes arguments,

$$\sup_{a\in X}\ \sup_{b\in Y} f(a,b) \leq \sup_{(a,b)\in X\times Y} f(a,b).$$

Fixons $(x,y) \in X\times Y$, alors $f(x,y) \leq \sup_{b\in Y} f(x,b)$, donc $f(x,y) \leq \sup_{a\in X}\ \sup_{b\in Y} f(a,b)$. Le réel $\sup_{a\in X}\ \sup_{b\in Y} f(a,b)$ est donc un majorant de f, d'où

$$\sup_{(a,b)\in X\times Y} f(a,b) \leq \sup_{a\in X}\ \sup_{b\in Y} f(a,b).$$

Il en découle l'égalité recherchée.

Feuille d'exercice n° 9 : **Arithmétique**

Exercice 6

Soient a, b et $c \in \mathbf{Z}$, avec $(a,b) \neq (0,0)$. On souhaite résoudre l'équation $ax+by=c$, notée $\star$, d'inconnue $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$.

1) Montrer que $\star$ n'a pas de solution si c n'est pas un multiple de $a \wedge b$.

2) On suppose dans cette quetion que $a \wedge b$ divise c.

a) En considérant un couple de Bézout de (a,b), montrer que $\star$ possède une solution (x_0,y_0).

b) En s'appuyant sur (x_0,y_0), résoudre complètement $\star$.

3) Résoudre les deux équations $2x+5y=13$ et $7x-12y=3$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$.

▷ **Solution.**

1) Supposons que $\star$ admet une solution $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$, alors $ax+by=c$. Comme $a \wedge b$ divise a et b, il divise aussi c. Par contraposée, si c n'est pas un multiple de $a \wedge b$, $\star$ n'admet pas de solution.

2) a) Par hypothèse, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $c = k(a \wedge b)$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(u,v) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $au+bv = a \wedge b$, donc $a(ku)+b(kv)=c$. L'équation $\star$ admet donc $(ku,kv) \in \mathbf{Z}^2$ pour solution.

b) Analyse : Soit $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ un couple solution de $\star$, alors

$$\begin{cases} ax+by=c \\ ax_0+by_0=c \end{cases}.$$

En soustrayant la deuxième ligne à la première, il vient que $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$, soit $a(x-x_0)=b(y_0-y)$. Notons $(\alpha,\beta) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $a=\alpha(a \wedge b)$ et $b=\beta(a \wedge b)$, alors $\alpha \wedge \beta = 1$ et $\alpha(x-x_0)=\beta(y_0-y)$. Par lemme de Gauss, α divise y_0-y donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $y_0-y=k\alpha$, soit $y=y_0-k\alpha$. De plus, $\alpha(x-x_0)=\beta(k\alpha)$ donc $x=x_0+k\beta$.

Synthèse : Soit $k \in \mathbf{Z}$,

$$a(x_0+k\beta)+b(y_0-k\alpha) = c+k(a\beta-b\alpha) = c+(\alpha(a\wedge b)\beta - b\alpha) = c+k(\alpha b - b\alpha) = c,$$

donc $(x_0+k\beta, y_0-k\alpha)$ est bien solution de $\star$.

L'ensemble des solutions de $\star$ est donc $\{(x_0+k\beta, y_0-k\alpha) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

3) Remarquons que $(-1,3)$ est une solution particulière de la première équation. De plus, $2 \wedge 5 = 1$ donc d'après **2)b)**, l'ensemble des solutions de $2x+5y=13$ est $\{(5k-1, 3-2k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Remarquons que $(-3,-2)$ est une solution particulière de la deuxième équation. De plus, $7 \wedge 12 = 1$ donc d'après **2)b)**, l'ensemble des solutions de $7x-12y=3$ est $\{(-3-12k, -2-7k) \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

Exercice 17

Soit F l'application définie sur $\mathbf{N}$ par $n \mapsto 2^{2^n}+1$. Si $n \in \mathbf{N}$, $F(n)$ est appelé n^{e} nombre de Fermat.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $F(n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} F(k)+2$.

2) Montrer que, pour tout couple $(m,n) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m \neq n$, $F(m)$ et $F(n)$ sont premiers entre eux.

3) Montrer que pour tout entier naturel n qui n'est pas de la forme 2^m possède un diviseur impair autre que 1. En déduire que, si le nombre 2^n+1 est premier, alors soit c'est un nombre de Fermat, soit $n=0$.

4) Montrer que $F(5)$ est divisible par 641.

▷ **Solution.**

1) Notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, (H_n) : $F(n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} F(k) + 2$.

- Comme $F(0) = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ et que $F(1) = 5$, la relation $F(1) = F(0) + 2$ est vérifiée. Ainsi, (H_1) est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que (H_n) soit vraie, alors

$$F(n+1) = 2^{2^{n+1}} + 1 = (2^{2^n})^2 + 1 = (F(n) - 1)^2 + 1 = F(n)^2 - 2F(n) + 2.$$

Mais d'après (H_n),

$$F(n)^2 = F(n)\left(\prod_{k=0}^{n-1} F(k) + 2\right) = \prod_{k=0}^{n} F(k) + 2F(n), \quad \text{d'où} \quad F(n+1) = \prod_{k=0}^{n} F(k) + 2,$$

donc (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence,

$$\forall n > 0, \quad F(n) = \prod_{k=0}^{n-1} F(k) + 2.$$

2) Soit $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ tel que $m \neq n$. On peut supposer sans perte de généralités que $m < n$. D'après **1)**,

$$F(n) - F(m) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} F(k) = 2.$$

Par conséquent, $\text{pgcd}(F(m), F(n))$ divise 2, il est donc égal à 1 ou 2. Mais il divise également $F(m)$ et $F(n)$, des entiers impairs, donc il ne peut pas être pair. Il est donc égal à 1 et le théorème de Bézout montre que $F(m)$ et $F(n)$ sont premiers entre eux.

3) Soit $n \in \mathbf{N}$ qui n'est pas de la forme 2^m. La décomposition en produit de facteurs premiers de n est donc de la forme

$$n = \prod_{p \text{ premier}} p^{\nu_p(n)} = 2^{\nu_2(n)} \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \neq 2}} p^{\nu_p(n)},$$

où le produit

$$\prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \neq 2}} p^{\nu_p(n)}$$

est impair, différent de 1 car n n'est pas de la forme 2^m. Ceci montre que n admet bien un diviseur impair autre que 1.

Supposons que $2^n + 1$ est premier.

- Si $n = 0$, ce n'est pas un nombre de Fermat.
- Si $n \neq 0$, supposons par l'absurde que ce n'est pas un nombre de Fermat. Dans ce cas, n n'est pas de la forme 2^m, donc ce qui précède montre qu'il existe un entier impair k autre que 1 et $m \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2^m k$. On aimerait alors montrer que $2^n + 1 = (2^{2^m})^k + 1$ n'est pas premier, donc qu'il admet un diviseur autre que 1 et lui-même. On voudrait donc le factoriser. Or le seul cas où l'on sait factoriser une somme d'entiers est lorsque la somme est de la forme $a^p - b^p$, où $p \in \mathbf{N}$. Mais k étant impair, $1 = -(-1)^k$, d'où

$$2^n + 1 = (2^{2^m})^k - (-1)^k = (2^{2^m} + 1) \sum_{i=0}^{k-1} (2^{2^m})^i (-1)^{k-1-i}.$$

L'entier $2^{2^m} + 1$ est donc un diviseur du nombre premier $2^n + 1$, donc égal à 1 ou à $2^n + 1$. Comme il est strictement plus grand que 1, on en déduit que $2^{2^m} + 1 = 2^n + 1$, donc $n = 2^m$. Ceci est absurde, donc n est un nombre de Fermat.

Remarque : On n'a pas montré que $2^n + 1$ n'est pas premier comme on le voulait au départ, et le raisonnement par l'absurde n'est en fait pas nécéssaire. Cependant, il permet de penser à la factorisation, et l'énoncé semble préconiser son utilisation avec la question précédente.

4) Le calcul de $F(5)$ se fait bien en utilisant **1)**, et une division euclidienne montre alors le résultat.

Feuille d'exercice n° 10 : **Suites**

Exercice 3

Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_0 + \cdots + u_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

1) Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Soit $l \in \overline{\mathbf{R}}$, montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

3) Donner un exemple où (v_n) converge mais (u_n) diverge.

▷ **Solution.**

1) Supposons que $u_n \to_{(n\to+\infty)} 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| < \varepsilon$. On a donc une information sur les u_n à partir d'un certain rang, d'où l'idée de séparer la somme v_n en deux. Soit $n \geq N+1$,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1} u_k.$$

Par inégalité triangulaire,

$$|v_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}|u_k| < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}|u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}\varepsilon = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}|u_k| + \frac{n-N}{n}\varepsilon \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}|u_k| + \varepsilon.$$

De plus, la somme $\sum_{k=0}^{N-1}|u_k|$ est une constante, positive, donc $(\sum_{k=0}^{N-1}|u_k|)/n \to_{(n\to+\infty)} 0$. Il existe donc $N' \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $(\sum_{k=0}^{N-1}|u_k|)/n < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $n \geq \max(N, N')$,

$$|v_n| < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}|u_k| + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Mais on peut couper les ε précédents en deux, ce qui montre que (v_n) a une limite nulle.

2) Si $l \in \mathbf{R}$, $(u_n - l)$ a une limite nulle donc d'après **1)**, en notant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = ((u_0-l)+\cdots+(u_{n-1}-l))/n = v_n - l$, (w_n) a une limite nulle. Ainsi, $v_n \to_{(n\to+\infty)} l$.

Si $l = +\infty$, soit $A > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > A$. Si $n \geq N+1$,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1} u_k > \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1} A > \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} u_k + \frac{n-N}{n}A > \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{N-1} u_k - NA\right) + A.$$

Mais $\sum_{k=0}^{N-1} u_k - NA$ est une constante, donc $(\sum_{k=0}^{N-1} u_k - NA)/n \to_{(n\to+\infty)} 0$. Il existe donc $N' \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $|\sum_{k=0}^{N-1} u_k - NA|/n < 1$, soit $(\sum_{k=0}^{N-1} u_k - NA)/n > -1$. Par conséquent, pour tout $n \geq \max(N, N')$,

$$v_n > \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{N-1} u_k - NA\right) + A > A - 1.$$

Mais on peut ajouter 1 à A dans les calculs précédents, ce qui montre que $v_n \to_{(n\to+\infty)} +\infty$.

Si $l = -\infty$, on montre de même que $v_n \to_{(n\to+\infty)} -\infty$.

3) Une suite divergente dont la somme des premiers termes est bornée ferait l'affaire. On pose donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-1)^n$. Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1, donc par caractérisation séquentielle de la limite, (u_n) diverge. De plus, par formule de sommation géométrique,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \frac{1}{n}\frac{1-(-1)^n}{2}.$$

Ainsi, $v_n \to_{(n\to+\infty)} 0$ mais (u_n) diverge.

Exercice 8 (✍)

On appelle *ouvert* de $\mathbf{R}$ toute partie U de $\mathbf{R}$ vérifiant la propriété suivante.

«Pour tout $x \in U$, il existe un intervalle I ouvert tel que $x \in I \subset U$. »

Soient U et V deux ouverts denses de $\mathbf{R}$. Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de $\mathbf{R}$.

▷ **Solution.**

Soit $x \in U$, il existe un intervalle ouvert I tel que $x \in I \subset U$. Ainsi, I n'est pas vide, et comme V est dense dans $\mathbf{R}$, $I \cap V \neq \emptyset$, donc $U \cap V \neq \emptyset$.

Soit $x \in U \cap V$, U et V étant des ouverts, il existe I et J deux intervalles ouverts tels que $x \in I \subset U$ et $x \in J \subset V$, et donc $I \cap J$ est un intervalle ouvert contenant x, inclus dans $U \cap V$. Cet ensemble est donc un ouvert. Plus généralement, on vient de montrer que si l'intersection de deux ouverts est non vide, alors c'est encore un ouvert.

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. L'ensemble U est dense dans $\mathbf{R}$, donc $U \cap I \neq \emptyset$. On sait que V rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Or $U \cap I$ n'est pas un intervalle, on aimerait donc trouver une partie de $U \cap I$ qui soit un intervalle ouvert. On a montré précédemment que $U \cap I$ est l'intersection non vide de deux ouverts (un intervalle ouvert étant évidemment ouvert), donc est ouvert. Soit $x \in U \cap I$, il existe donc un intervalle ouvert J non vide tel que $x \in J \subset U \cap I$. L'ensemble V étant dense dans $\mathbf{R}$, $J \cap V \neq \emptyset$ donc $U \cap V \cap I \neq \emptyset$. L'ensemble $U \cap V$ rencontre donc ainsi intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$, donc il est dense dans $\mathbf{R}$.

Par conséquent, $U \cap V$ est bien un ouvert dense de $\mathbf{R}$.

Exercice 14 (✍)

Étudier la suite $(z_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ vérifiant $|z_0| \leq 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n}{2 - z_n}$.

▷ **Solution.**

Il faut tout d'abord vérifier que la suite est bien définie, c'est à dire qu'elle ne prend jamais la valeur 2. Soit $n \in \mathbf{N}$,

$$z_{n+1} = 2 \iff \frac{z_n}{2 - z_n} = 2 \iff z_n = 4 - 2z_n \iff 3z_n = 4 \iff z_n = \frac{4}{3},$$

et par un calcul analogue,

$$z_{n+1} = \frac{4}{3} \iff z_n = \frac{8}{7}.$$

On peut continuer ainsi, et on constate que chaque équivalence est de la forme $|z_{n+1}| = \text{truc}$ si et seulement si $|z_n| = \text{machin}$, avec $\text{machin} > 1$. Le plus simple serait de montrer que les $|z_n|$ sont tous inférieurs ou égaux à 1. Regardons $|z_1|$. Par inégalité triangulaire, $|2 - z_0| \geq |2 - |z_0||$ et $|z_0| \leq 1$, donc $|2 - z_0| \geq 1$. On en déduit que $|z_1| \geq |z_0| \geq 1$. Il semble également que si $|z_n| \leq 1$, $|z_{n+1}| \leq |z_n|$. Notons donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(H_n) : |z_n| \leq 1$.

- Comme $|z_0| \leq 1$, (H_0) est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que (H_n) soit vraie. Par inégalité triangulaire, $|2 - z_n| \geq |2 - |z_n||$ et d'après (H_n), $|z_n| \leq 1$ donc $|2 - z_n| \geq 1$. Ainsi, $|z_{n+1}| \leq |z_n| \leq 1$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|z_n| \leq 1$ et on a au passage montré que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|z_{n+1}| \leq |z_n|$. La suite $(|z_n|)$ est donc décroissante, minorée par 0, donc converge. Notons l sa limite, alors $0 \leq l \leq 1$. Les calculs précédents montrent que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |z_{n+1}| \leq \frac{|z_n|}{2 - |z_n|},$$

donc l vérifie $l \leq l/(2 - l)$, soit $l(1 - l) \leq 0$. Comme $l \geq 0$ et $1 - l \geq 0$, nécéssairement $l = 0$ ou $l = 1$.

- Si $|z_0| < 1$, $l < 1$ donc $l = 0$ et $z_n \to_{(n \to +\infty)} 0$.
- Si $|z_0| = 1$, notons $\theta \in \mathbf{R}$ l'argument de z_0, alors

$$\begin{aligned}
|z_1| = 1 &\iff |2 - z_0| = 1 \\
&\iff |2 - \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta| = 1 \\
&\iff (2 - \cos\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \\
&\iff 4 - 4\cos\theta = 0 \\
&\iff \cos\theta = 1 \\
&\iff z_0 = 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $z_0 \neq 1$, alors $|z_1| < 1$. Ainsi, $l < 1$, d'où $l = 0$ et $z_n \to_{(n\to+\infty)} 0$. Mais si $z_0 = 1$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_n = 1$, donc $z_n \to_{(n\to+\infty)} 1$.

Feuille d'exercice n° 11 : **Groupes, anneaux, corps**

Exercice 7 (🚲⛰)

Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R},+)$ non réduit à $\{0\}$. On pose $\alpha = \inf(\mathbf{R}_+^* \cap G)$.

1) Montrer que si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbf{Z} = \{k\alpha \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

2) Montrer que si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel x et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in G$ vérifiant $|x-y| \leq \varepsilon$.

▷ **Solution.**

1) Supposons $\alpha > 0$. Supposons par l'absurde que $\alpha \notin G$. Il existe donc une infinité d'éléments de G très proches de α, mais alors la différence de deux de ces éléments est toujours dans G et peut être strictement plus petite que α, ce qui est absurde. Étant donné que 2α n'est pas la borne inférieure de $\mathbf{R}_+^* \cap G$, il existe $x \in]\alpha, 2\alpha[\cap G$, et par les mêmes arguments, il existe aussi $y \in]\alpha, x[\cap G$. Ainsi, $\alpha < y < x < 2\alpha$, donc $0 < x - y < \alpha$. Mais G est un groupe donc $x - y \in G$, ce qui contredit le fait que $\alpha = \inf(\mathbf{R}_+^* \cap G)$. C'est absurde, donc $\alpha \in G$, et G étant un groupe, $\alpha\mathbf{Z} \subset G$.

Soit $x \in G$, notons $k = \lfloor x/\alpha \rfloor$. Par définition de la partie entière, $k \leq x/\alpha < k+1$, et $\alpha > 0$ donc $\alpha k \leq x < \alpha(k+1)$, soit $0 \leq x - \alpha k < \alpha$. Mais αk et x sont dans G, donc $x - \alpha k \in \mathbf{R}_+ \cap G$ est strictement inférieur à $\alpha = \inf(\mathbf{R}_+^* \cap G)$. Par conséquent, $x - \alpha k = 0$, d'où $x = \alpha k$, donc $G \subset \alpha\mathbf{Z}$.

Par double inclusion, $G = \alpha\mathbf{Z}$.

2) Supposons que $\alpha = 0$. Soient $x \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\alpha = \inf(\mathbf{R}_+^* \cap G) = 0$, il existe $y \in]0, \varepsilon[\cap G$, et alors en notant $k = \lfloor x/y \rfloor$, $k \leq x/y < k+1$. Étant donné que $y > 0$, $ky \leq x < (k+1)y$, donc $0 \leq x - ky < y < \varepsilon$. Mais G étant un groupe, $ky \in G$ et vérifie $|x - ky| < \varepsilon$. Le groupe G est donc dense dans $\mathbf{R}$.

Feuille d'exercice n° 13 : **Continuités**

Exercice 7

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

1) La fonction f est continue en 0 et $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(2x) = f(x)\cos x$.
Indication : On fera bon usage de la formule $2\cos(x)\sin(x) = \sin(2x)$.

2) La fonction f est continue et $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(2x+1) = f(x)$.

▷ **Solution.**

1) Analyse : Soit une telle fonction f. Soit $x \in \mathbf{R}$, en utilisant la relation fonctionnelle vérifiée par f, il vient que

$$f(2x) = f(x)\cos x = f\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x = f\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos x,$$

et ainsi de suite. Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

On aimerait passer à la limite quand n tend vers $+\infty$, mais on n'est pas certain que le produit admette une limite. Il faut donc le transformer.

Remarque : L'indication n'est pas dans l'énoncé original, mais sans elle le calcul du produit est très astucieux.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, l'indication permet d'écrire

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right).$$

Mais alors

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right).$$

En multipliant le produit par $\sin(x/2^n)$, on peut donc le transformer en un seul sinus. Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin x}{2^n}.$$

Si $x \neq 0$, il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sin(x/2^n) \neq 0$, d'où

$$\forall n \geq N, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)2^n}.$$

Mais $\sin(u)/u \to_{(u\to 0)} \sin'(0) = \cos(0) = 1$, et

$$\forall n \geq N, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\frac{\sin x}{x\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}}.$$

La fonction f étant continue en 0, $f(x/2^n) \to_{(n\to+\infty)} f(0)$, donc par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$,

$$f(x) = f(0)\frac{\sin x}{x}.$$

Synthèse : Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, notons

$$f : x \mapsto \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0 \\ \alpha\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

Comme $\sin(u)/u \to_{(u\to 0)} 1$, f est continue en 0 et

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad f(2x) = \alpha\frac{\sin(2x)}{2x} = \alpha\frac{\sin(x)\cos(x)}{x} = f(x)\cos x,$$

et $f(2\times 0) = f(0)\cos(0)$, donc f vérifie bien les conditions de l'énoncé.

L'ensemble des fonctions vérifiant les conditions de l'énoncé est donc

$$\left\{ x \mapsto \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0 \\ \alpha\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \mid \alpha \in \mathbf{R} \right\}.$$

2) Analyse : Soit une telle fonction f. La relation fonctionnelle vérifiée par f nous montre que $f(0) = f(1) = f(3) = f(5)\dots$, donc on connaît f en certains entiers. Mais qu'en est-il entre ces entiers ? Lorsque x décrit l'intervalle $[0,1]$, $2x+1$ décrit l'intervalle $[1,3]$, donc d'après la relation fonctionnelle, $f([0,1]) = f([1,3])$. Ainsi, connaître f sur $[0,1]$, c'est la connaître sur $[1,3]$. Mais quand x décrit $[1,3]$, $2x+1$ décrit alors $[3,7]$, et donc $f([0,1]) = f([1,3]) = f([3,7])$, et ainsi de suite. On peut donc supposer que $f([0,1]) = f([0,+\infty[)$.

Pour la démonstration, on s'appuie sur le schéma précédent. Définissions la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. La relation fonctionnelle vérifiée par f montre que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f([u_n, u_{n+1}]) = f([u_{n+1}, u_{n+2}])$. On en déduit par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f([u_n, u_{n+1}]) = f([u_0, u_1]) = f([0,1])$. De plus, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geq n$. Par conséquent, $u_n \to_{(n\to+\infty)} +\infty$ donc $[0,+\infty[= \cup_{n\in\mathbf{N}}[u_n, u_{n+1}]$. Soit $y \in f([0,+\infty[)$, il existe $x \in [0,+\infty[$ tel que $f(x) = y$. Il existe alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $x \in [u_n, u_{n+1}]$, donc $f(x) = y \in f([u_n, u_{n+1}]) = f([0,1])$. Ceci montre que $f([0,+\infty[) \subset f([0,1])$. L'inclusion réciproque étant immédiate, on conclut que $f([0,+\infty[) = f([0,1])$.

Mais existe-t-il un plus petit intervalle vérifiant une propriété analogue, donc de la forme $[\alpha, \beta]$, et dont l'image par f est égale à $f([\alpha,+\infty[)$? On peut essayer d'un trouver un en inversant le processus précédent, c'est-à-dire que si x parcourt $[\alpha,\beta]$, alors $2x+1$ parcourt $[0,1]$. On pose naturellement la fonction $g : x \mapsto (x-1)/2$ et on arrive à $\alpha = g(0) = -1$ et $\beta = g(1) = 0$. Si l'on réitère ce processus pour trouver de nouveaux α et β, on trouve $\alpha = -1$ et $\beta = -1/2$. On se rend compte que -1 est un point fixe de g, donc notre α restera constant, égal à -1. Il s'agit donc d'étudier le comportement des β.

Soit la suite (β_n), définie par $\beta_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $\beta_{n+1} = g(\beta_n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, quand x parcout $[\beta_{n+2}, \beta_{n+1}]$, $2x+1$ parcourt $[\beta_{n+1}, \beta_n]$, donc $f([\beta_{n+2}, \beta_{n+1}]) = f([\beta_{n+1}, \beta_n])$. Fixons $n \in \mathbf{N}$ et définissons la suite (v_k) telle que $v_0 = \beta_{n+1}$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $v_{k+1} = 2v_k + 1$. En reprenant le raisonnement précédent avec non plus (u_n), mais (v_k), on montre que $f([\beta_{n+1}, \beta_n]) = f([\beta_{n+1}, +\infty[)$. Mais g est croissante sur $\mathbf{R}$ et si $x \in [-1,+\infty[$, $g(x) = (x-1)/2 \geq -1$ donc $[-1,+\infty[$ est stable par g. Comme $\beta_1 = (\beta_0 - 1)/2 = 0 < \beta_0$, la suite (β_n) est décroissante, et minorée par -1 donc converge. Si $x \in \mathbf{R}$,

$$g(x) = x \iff \frac{x-1}{2} = x \iff x = -1,$$

donc -1 est l'unique point fixe de g sur $\mathbf{R}$. Par conséquent, $\beta_n \to_{(n\to+\infty)} -1$.

On aimerait faire une sorte de passage à la limite, pour montrer que $f([-1,-1]) = \{f(-1)\} = f([-1,+\infty[)$. La fonction f serait donc constante sur $[-1,+\infty[$, égale à $f(-1)$. Mais cela reviendrait à parler des limites des suites $(f([\beta_{n+1}, \beta_n]))$ et $(f([\beta_{n+1}, +\infty]))$, des suites d'intervalles, donc pour lesquelles la notion de limite n'est pas définie. Il faut donc faire autrement.

Soit $y \in f([-1,+\infty[)$. La décroissance de (β_n) et le fait qu'elle converge vers 1 assure l'existence de $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\beta_n \leq y$, donc $y \in f([\beta_n, +\infty[)$. Étant donné que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f([\beta_{n+1}, \beta_n]) = f([\beta_{n+1}, +\infty[)$, pour tout $n \geq N$, $y \in f([\beta_{n+1}, \beta_n])$. Il existe donc pour tout $n \geq N$, $x_n \in [\beta_{n+1}, \beta_n]$ tel que $f(x_n) = y$. Mais par théorème d'encadrement, $x_n \to_{(n\to+\infty)} -1$. Par continuité de f, $f(x_n) \to_{(n\to\infty)} f(-1)$, mais la suite $(f(x_n))$ est constante, égale à y, donc sa limite est y. Par unicité de la limite, $y = f(-1)$. Enfin, un travail en tout point analogue montre que pour tout $y \in f(]-\infty,-1])$, $y = f(-1)$.

Synthèse : Toute fonction f constante sur $\mathbf{R}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = f(2x+1).$$

Finalement, l'ensemble des fonctions vérifiant les conditions de l'énoncé est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbf{R}$.

Exercice 8 ()

Montrer qu'une fonction définie sur $\mathbf{R}$, continue, périodique et non constante possède une plus petite période (strictement positive).

▷ **Solution.**

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continue, périodique et non constante. Notons Γ l'ensemble des périodes de f,

$$\Gamma = \{T > 0 \mid \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = f(x+T)\}.$$

La fonction f étant périodique, $\Gamma \neq \emptyset$ et donc par théorème de la borne inférieure, Γ admet une borne inférieure, notée α. Par l'absurde, supposons que $\alpha \notin \Gamma$. Comme 0 minore Γ, $\alpha \geq 0$. De plus, il existe une infinité de périodes de f aussi proches de α que l'on veut. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha + 1/n > \alpha$, donc il existe $T_n \in \Gamma$ tel que $\alpha < T_n \leq \alpha + 1/n$. Soit $x \in \mathbf{R}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f(x) = f(x + T_n)$. Par théorème d'encadrement, $T_n \to_{(n\to+\infty)} \alpha$, donc par continuité de f, $f(x + T_n) \to_{(n\to+\infty)} f(x+\alpha)$. Comme la suite $(f(x+T_n))$ est constante, égale à $f(x)$, sa limite est $f(x)$. Par unicité de la limite, $f(x) = f(x+\alpha)$. Si $\alpha > 0$, alors $\alpha \in \Gamma$, ce qui n'est pas le cas, donc $\alpha = 0$. De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f([0, T_n]) = f(\mathbf{R})$, f étant T_n-périodique. Mais on sait que $T_n \to_{(n\to+\infty)} 0$, on se doute donc que f va être constante. En effet, soit $y \in f(\mathbf{R})$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $x_n \in [0, T_n]$ tel que $f(x_n) = y$. De plus, par théorème d'encadrement, $x_n \to_{(n\to+\infty)} 0$. Par continuité de f, $f(x_n) \to_{(n\to+\infty)} f(0)$. La suite $(f(x_n))$ étant constante, égale à y, sa limite est y et par unicité de la limite, $y = f(0)$. Ceci montre que f est constante sur $\mathbf{R}$. C'est absurde, donc $\alpha \in \Gamma$ et donc f admet bien une plus petite période strictement positive, qui est α.

Feuille d'exercice n° 14 : **Polynômes**

Exercice 9

Montrer que si $P \in \mathbf{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifie $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ ses racines sont parmi 0, 1, $-j$, $-j^2$. En déduire tous les polynômes solution de cette équation.

▷ **Solution.**

Analyse : Soit $P \in \mathbf{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifiant $P(X^2) = P(X)P(X+1)$. Les seuls polynômes constants satisfisant cette relation sont 0 et 1, mais $P \neq 0$ et 1 est solution. Supposons $P \neq 1$, alors P n'est pas constant, donc sur $\mathbf{C}$, il est scindé. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ une racine de P, alors $P(\lambda^2) = 0$ donc λ^2 est aussi racine de P. Mais λ^4 est encore racine de P, et ainsi de suite, donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, λ^{2n} est racine de P. Cela fait beaucoup de racines. En effet, si $|\lambda| > 1$, les λ^{2n} sont tous de modules différents, donc tous distincts, et il en va de même si $0 < |\lambda| < 1$. Le polynôme P étant non nul, il n'a qu'un nombre fini de racines, et donc $|\lambda| = 1$ ou $|\lambda| = 0$, soit $\lambda = 0$. Si $|\lambda| = 1$, notons $\theta \in \mathbf{R}$ l'argument de λ. Le complexe $\lambda - 1$ est de plus racine de $P(X+1)$, donc $(\lambda-1)^2$ est racine de P, et par les mêmes arguments que précédemment, $\lambda - 1 = 0$, donc $\lambda = 1$, ou $|\lambda - 1| = 1$. Dans ce dernier cas,

$$|\lambda - 1| = |e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 1,$$

donc $\theta/2 = \pm\pi/6$ $[\pi]$, d'où $\theta = \pm\pi/3$ $[2\pi]$. Étant donné que $j = e^{2i\pi/3}$, $-j = e^{i\pi}e^{2i\pi/3} = e^{5i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$ et $-j^2 = e^{i\pi}e^{4i\pi/3} = e^{7i\pi/3} = e^{i\pi/3}$, les racines de P sont donc parmis 0, 1, $-j$ et $-j^2$. Mais si $-j$ est racine, alors $(-j)^2$ l'est aussi, or $j^2 \neq -j^2 \neq j$, donc $-j$ n'est pas racine. De même, $-j^2$ ne l'est pas non plus. Il existe donc $\alpha \in \mathbf{R}$, n et m deux entiers non tous deux nuls tels que $P = \alpha X^n(X-1)^m$, et la relation vérifiée par P montre que $\alpha = 1$ et $n = m$, et donc que $n \neq 0$.

Synthèse : Soit $n \in \mathbf{N}$, notons $P = X^n(X-1)^n \in \mathbf{R}[X] \setminus \{0\}$. On vérifie bien que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Finalement, l'ensemble des solutions de cette équation est $\{X^n(X-1)^n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1) Montrer qu'il existe des polynômes U, V, vérifiant $(1-X)^n U + X^n V = 1 \quad (\star)$.

2) Déterminer deux polynômes U_1, V_1 de degré strictement inférieur à n, satisfaisant $(\star)$.
Indication : On pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

3) En déduire tous les polynômes U, V vérifiant $(\star)$.

4) Montrer que U_1 et V_1 sont les seuls polynômes de degré strictement inférieur à n satisfaisant $(\star)$.

5) Déterminer les coefficients de U_1 et de V_1.

▷ **Solution.**

Remarque : On prendra les polynômes dans $\mathbf{R}[X]$.

1) L'unique racine de $(X-1)^n$ est 1, tandis que celle de X^n est 0, donc ces deux polynômes n'ont aucune racine commune, ils sont premiers entre eux. Le théorème de Bézout assure l'existence de polynômes U et V vérifiant $(\star)$.

2) Analyse : Soient U_1 et V_1, de degrés respectifs p et q, strictement inférieurs à n, vérifiant $(\star)$, notons

$$U_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k X^k \quad \text{et} \quad V_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k X^k.$$

Ainsi, $X^n V_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k X^{n+k}$, donc $X^n V_1$ ne possède aucun terme de degré strictement inférieur à n. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(1-X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^k.$$

Notons pour tout $k \in \mathbf{N}$, $a_k = \binom{n}{k}(-1)^k$ si $k \leq n$ et $a_k = 0$ sinon. Par formule du produit de deux polynômes,

$$(1-X)^n U_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} u_i \right) X^k.$$

Comme $(1-X)^n U_1 = 1 - X^n V_1$, $(1-X)^n U_1$ n'a aucun terme de degré $1, 2, \ldots, n-1$, et son terme constant est 1, donc

$$\begin{cases} a_0 u_0 = u_0 = 1 \\ \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad \displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} u_i = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, comme $a_0 = 1$,

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad u_k = -\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-i} u_i \end{cases}.$$

Enfin, $X^n V_1 = (1-X)^n U_1 - 1$, donc

$$V_1 = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} u_i \right) X^{k-n} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{j+n} a_{j+n-i} u_i \right) X^j.$$

Synthèse : Définissons la suite (u_n) par $u_0 = 1$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $u_k = -\sum_{i=0}^{k} a_{k-i} u_i$ et pour tout $k \geq n$, $u_k = 0$. Notons ensuite

$$U_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k X^k, \quad \text{et} \quad V_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k+n} a_{k+n-i} u_i \right) X^k.$$

On vérifie bien que $\deg U_1 = n-1 < n$ et $\deg V_1 < n$, et que (U_1, V_1) est solution de $(\star)$.

3) Analyse : Soit $(U, V) \in \mathbf{R}[X]^2$ solution de $(\star)$, alors $(1-X)^n(U - U_1) = X^n(V_1 - V)$. Comme $\mathrm{pgcd}((1-X)^n, X^n) = 1$, d'après le lemme de Gauss, $(1-X)^n$ divise $(V_1 - V)$, donc il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $V = V_1 - P(1-X)^n$, et donc $U = U_1 + PX^n$.

Synthèse : Soit $P \in \mathbf{R}[X]$, on vérifie que $(U_1 + PX^n, V_1 - P(1-X)^n)$ est solution de $(\star)$.

4) Soit $(U, V) \in \mathbf{R}[X]^2$ une solution de $(\star)$, d'après **3)**, il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $U = U_1 + PX^n$ et $V = V_1 - P(1-X)^n$. Si $P = 0$, $U = U_1$ et $V = V_1$. Si $P \neq 0$, comme $\deg U_1 < \deg(PX^n)$, alors $\deg U = \deg(PX^n) \geq n$ et de même, $\deg V \geq n$. Ainsi, l'unique couple solution de $(\star)$ de degré strictement inférieur à n est (U_1, V_1).

5) Dans la question **2)**, on a trouvé une relation de récurrence que vérifiaient les coefficients de U_1, mais expliciter ces coefficients à partir de cette relation semble pour le moins compliqué. Le fait est qu'on ne s'est pas réellement servi de l'indication en **2)**. Une manière astucieuse de voir les choses, avec l'indication en tête, est de remarquer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $1 = (X + (1-X))^k$, et la formule du binôme de Newton permet alors d'écrire

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i (1-X)^{k-i} = 1.$$

Sachant que l'on cherche $(U_1, V_1) \in \mathbf{R}_{n-1}[X]^2$ qui vérifient $(1-X)^n U_1 + X^n V_1 = 1$, on va séparer cette somme en deux. On veut que i prenne des valeurs supérieures ou égales à n, pour trouver V_1, donc si $k \geq n$,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i (1-X)^{k-i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{k}{i} X^i (1-X)^{k-i} + X^n \sum_{i=n}^{k} \binom{k}{i} X^{i-n} (1-X)^{k-i}.$$

On veut de plus que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $k - i \geq n$, pour trouver U_1, donc on veut que $k \geq 2n-1$. Mais si $k \geq 2n$, $k - n \geq n$ donc ce qui semble être V_1 sera de degré supérieur ou égal à n, ce que l'on ne veut pas. Par conséquent, on choisit $k = 2n-1$, donc

$$(1-X)^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-1}{i} X^i (1-X)^{n-1-i} + X^n \sum_{i=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} X^{i-n} (1-X)^{2n-1-i}.$$

On pose donc

$$U_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-1}{i} X^i (1-X)^{n-1-i}, \quad \text{et} \quad V_1 = \sum_{i=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{i} X^{i-n} (1-X)^{2n-1-i},$$

qui vérifient $(1-X)^n U_1 + X^n V_1 = 1$. Le terme de plus haut degré de U_1 étant de degré $n+n-1-n = n-1$, et celui de V_1 étant de degré $n-n+2n-1-n = n-1$, ces polynômes sont aussi tous deux de degrés strictement inférieurs à n. Enfin, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} U_1 &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n-1}{i} X^i (1-X)^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-i} \binom{2n-1}{i} \binom{n-1-i}{j} (-1)^j X^j X^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} \binom{2n-1}{i} \binom{n-1-i}{k-i} (-1)^{k-i} X^k. \end{aligned}$$

Ces deux sommes étant finies, on peut les intervertir, et alors

$$U_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{2n-1}{i} \binom{n-1-i}{k-i} (-1)^{k-i} \right) X^k.$$

Ainsi, on a trouvé les coefficients de U_1, et de même, on trouve que

$$V_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{2n-1}{i-n} \binom{n-1-i}{k-i} (-1)^{k-i} \right) X^k.$$

Feuille d'exercice n° 15 : **Dérivation**

Exercice 1

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue en 0, soit $l \in \mathbf{R}$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = l$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (h,k) \in]0,\delta[^2, \quad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h+k} - l \right| \leq \varepsilon.$$

▷ **Solution.**

($\Longleftarrow$) : Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (h,k) \in]0,\delta[^2, \quad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h+k} - l \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $h \in]0,\delta[$, alors l'inégalité précédente est vraie pour tout $k \in]0,\delta[$, on peut donc passer à la limite quand k tend vers 0. Par continuité de f, $f(-k) \to_{(k\to 0)} f(0)$, et les inégalités larges étant conservées par passage à la limite,

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} - l \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = l$.

($\Longrightarrow$) : Soit $\varepsilon > 0$, on veut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall (h,k) \in]0,\delta[^2, \quad |f(h) - f(-k) - (h+k)l| \leq (h+k)\varepsilon.$$

La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = l$, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\delta,\delta[\setminus \{0\}, \quad \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - l \right| \leq \varepsilon,$$

soit

$$\forall x \in]-\delta,\delta[\setminus \{0\}, \quad |f(x) - f(0) - xl| \leq |x|\varepsilon.$$

A fortiori,

$$\begin{cases} \forall h \in]0,\delta[, \quad |f(h) - f(0) - hl| \leq h\varepsilon \\ \forall k \in]0,\delta[, \quad |f(-k) - f(0) + kl| \leq k\varepsilon \end{cases},$$

donc en sommant ces deux lignes, il vient que

$$\forall (h,k) \in]0,\delta[^2, \quad |f(h) - f(0) - hl| + |f(-k) - f(0) + kl| \leq (h+k)\varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $(h,k) \in]0,\delta[^2$,

$$|f(h) - f(-k) - (h+k)l| \leq |f(h) - f(0) - hl - (f(-k) - f(0) + kl)| \leq |f(h) - f(0) - hl| + |f(-k) - f(0) + kl| \leq (h+k)\varepsilon,$$

et $h + k > 0$, ce qui permet d'écrire

$$\left| \frac{f(h) - f(-k)}{h+k} - l \right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 6

Soit $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que par tout point $(x_0, 0)$ avec $x_0 \in \mathbf{R} \setminus [a,b]$, il passe au moins une tangente à la courbe représentative de f.

▷ **Solution.**

Soit $x_0 \in \mathbf{R} \setminus [a,b]$. L'équation de la tangente en $c \in [a,b]$ à la courbe représentative de f est $y = f'(c)(x-c) + f(c)$, donc il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par $(x_0, 0)$ si et seulement si il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c)(x_0 - c) + f(c) = 0$. On pose naturellement la fonction $g : x \mapsto f'(x)(x_0 - x) + f(x)$, et on cherche à montrer qu'elle s'annule au moins une fois sur $[a,b]$. Cela fait penser à une utilisation du théorème des valeurs intermédiaires, mais ici, on sait seulement que f est dérivable. Les fonctions f' et g ne sont pas nécéssairement continue. Cependant, un célèbre théorème, le théorème de Darboux, généralise le théorème des valeurs intermédiaires aux fonctions dérivées de fonctions à valeurs réelles.

Énoncé du théorème de Darboux : Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ dérivable sur $[a,b]$. Pour tout $y \in [f'(a), f'(b)]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = y$.
Démonstration : Soit $y \in [f'(a), f'(b)]$, notons la fonction $g : x \mapsto f(x) - yx$, alors $g'(a) = f'(a) - y \leq 0$ et $g'(b) = f'(b) - y \geq 0$.

- Si $g'(a) = 0$ ou $g'(b) = 0$, alors $y = f'(a)$ ou $y = f'(b)$.
- Sinon, si $g'(a) < 0$ et $g'(b) > 0$, g étant dérivable en a à droite,

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} g'(a) < 0.$$

Par continuité de $x \mapsto (g(x) - g(a))/(x - a)$ sur $]a,b]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a+\varepsilon[\cap [a,b]$, $(g(x) - g(a))/(x - a) < 0$, soit $g(x) < g(a)$. Il existe donc $x_1 \in]a,b]$ tel que $g(x_1) < g(a)$. On montre de même qu'il existe $x_2 \in [a,b[$ tel que $g(x_2) < g(b)$. La fonction g étant continue sur $[a,b]$, elle atteint un minimum sur ce segment, mais ce n'est ni en a, ni en b. Comme elle est dérivable sur $[a,b]$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = y$.

Étant donné que l'on peut trouver une primitive de g, par exemple

$$G : x \mapsto f'(x)(x_0 - x) + 2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

alors g étant la dérivée de G sur $[a,b]$, d'après le théorème de Darboux, g vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

- Si $f'(a) = 0$ ou $f'(b) = 0$, g s'annule en a ou en b.
- Supposons $f'(a)$ et $f'(b)$ tous deux non nuls, alors $g(a) = f'(a)(x_0 - a)$ et $g(b) = f'(b)(x_0 - b)$. Comme $x_0 \notin [a,b]$, $x_0 - a$ et $x_0 - b$ sont non nuls et de mêmes signes.
  — Si $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signes différents, alors $g(a)$ et $g(b)$ le sont aussi.
  — Si $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de mêmes signes, on peut supposer par exemple qu'ils sont strictement positifs. Comme

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} f'(a) > 0,$$

par continuité de $x \mapsto (f(x) - f(a))/(x - a)$ sur $]a,b]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a+\varepsilon[\cap [a,b]$, $(f(x) - f(a))/(x - a) > 0$, soit $f(x) > f(a) = 0$. Il existe donc $x \in]a,b]$ tel que $f(x) > 0$. On montre de même qu'il existe $y \in [a,b[$, que l'on peut supposer strictement supérieur à x, tel que $f(y) < 0$, donc f étant continue sur $[x,y]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule au moins une fois sur $[x,y]$, donc sur $]a,b[$. De plus, comme $y < b$ et $f(y) < 0$, $a + \varepsilon < b$. Notons

$$\Gamma = \{t \in [a+\varepsilon, b] \mid f(t) = 0\}.$$

Ce qui précède montre que $\Gamma \neq \emptyset$, il admet donc une borne inférieure notée α. Le réel $a + \varepsilon$ minorant Γ, $a + \varepsilon \leq \alpha$. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha + 1/n > \alpha$, il existe $t_n \in [\alpha, \alpha + 1/n] \cap \Gamma$, donc $f(t_n) = 0$. Par théorème d'encadrement, $t_n \to_{(n\to+\infty)} \alpha$ et donc la continuité de f montre que $f(\alpha) = 0$. Le plus petit point d'annulation de f sur $[a+\varepsilon, b]$ est donc α, et cette fonction ne s'annulant pas sur $]a, a+\varepsilon[$, c'est aussi le plus petit point d'annulation de f sur $]a,b]$. Les points a et α sont donc deux points d'annulation consécutifs de f. Le raisonnement précédent montre que si $f'(a)$ et $f'(\alpha)$ étaient de mêmes signes, alors il existerait un point d'annulation de f entre les deux, ce qui contredirait leur consécutivité. On en déduit que $f'(a)$ et $f'(\alpha)$, et donc $g(a)$ et $g(\alpha)$, sont de signes opposés.

  Dans les deux cas, g prend donc des valeurs positives et négatives sur $[a,b]$, donc d'après le thréroème de Darboux, elle s'annule au moins une fois sur $[a,b]$.

Dans les deux cas, g s'annule au moins une fois sur $[a,b]$, d'où le résultat.

Feuille d'exercice n° 16 : **Fractions rationnelles**

Exercice 3 ( )

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. On pose pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Mettre sous forme irréductible $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k}$.

▷ **Solution.**

Mettons tout au même dénominateur :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega_k^p \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1}(X-\omega_j)\right)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega_k^p \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n-1}(X-\omega_j)\right)}{X^n - 1}.$$

Notons P le numérateur de cette fraction rationnelle, remarquons que $\deg P < n$. Comme les racines de $X^n - 1$ sont toutes simples, on peut exprimer les coefficients de la décomposition en éléments simples, les ω_k^p, en fonction de P et de $(X^n - 1)'$ évalués en ω_k. Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\omega_k^p = P(\omega_k)/(X^n-1)'(\omega_k) = P(\omega_k)/(n\omega_k^{n-1})$, donc $P(\omega_k) = n\omega_k^{p+n-1}$.

- Si $p \geq 1$, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $P(\omega_k) = n\omega_k^{p-1}$. Notons $Q = P - nX^{p-1}$, alors $\deg Q < n$ et les ω_k sont n racines distinctes de Q, donc $Q = 0$. Ainsi, $P = nX^{p-1}$ et
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k} = \frac{nX^{p-1}}{X^n - 1}.$$
- Si $p = 0$, on montre de même que $P = nX^{n-1}$ et donc
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k} = \frac{nX^{n-1}}{X^n - 1}.$$

Exercice 7 ( )

1) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbf{R}[X]$ de degré n tel que
$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right).$$
On factorisera P_n dans $\mathbf{C}[X]$.

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, décomposer $\dfrac{1}{P_n}$ en éléments simples dans $\mathbf{C}[X]$.

▷ **Solution.**

1) Analyse : Soit $n \in \mathbf{N}$, soit $P_n \in \mathbf{R}[X]$ de degré n vérifiant $X^n + 1/X^n = P_n(X + 1/X)$. Soit $x \in \mathbf{R}^*$,
$$x^n + \frac{1}{x^n} = 0 \iff x^{2n} = -1,$$
donc l'ensemble des racines de $X^n + 1/X^n$ est
$$\{e^{2ik\pi/2n + \pi/2n} \mid k \in \{0, \dots, 2n-1\}\} = \{e^{i(2k+1)\pi/(2n)} \mid k \in \{0, \dots, 2n-1\}\}.$$

L'ensemble des racines de P_n est donc

$$\{e^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)} + e^{-\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)} \mid k \in \{0, \dots, 2n-1\}\} = \left\{ 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in \{0, \dots, 2n-1\} \right\},$$

mais cet ensemble ne contient que n éléments distincts. En effet, on remarque que les éléments pour k variant de n à $2n-1$ sont égaux aux éléments pour k variant entre 0 et $n-1$. Soit $k \in \{n, \dots, 2n-1\}$,

$$\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(-\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{(2(2n-k-1)+1)\pi}{2n}\right),$$

et $2n-k-1 \in \{0, \dots, n-1\}$. La fonction cosinus est injective sur $[0, \pi]$ et pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $(2k+1)\pi/(2n) \in [0, \pi]$, donc les $\cos((2k+1)\pi/(2n))$ sont tous distincts. On a trouvé n racines distinctes de P_n, qui est de degré n, et est donc de la forme

$$P_n = a \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right), \quad \text{avec } a \in \mathbf{R}.$$

Mais le coefficient devant le terme X^n de $P_n(X + 1/X)$ est a, donc $a = 1$.

Synthèse : Il existe bien un unique polynôme de degré n dont l'ensemble des racines est

$$\left\{ 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

et dont le coefficient dominant est 1, c'est

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right).$$

2) D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{C}^n$ tel que

$$\frac{1}{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}.$$

Les pôles de $1/P_n$ étant simples,

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad a_k = \frac{1}{P_n'\left(2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}.$$

Et on sait calculer les valeurs voulues de P_n'. En dérivant la relation vérifiée par P_n, on obtient que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad nx^{n-1} - \frac{n}{x^{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) P_n'\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Précédemment, on a vu que si $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $e^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)} + e^{-\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)} = 2\cos((2k+1)\pi/(2n))$, d'où

$$\begin{aligned} P_n'\left(2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) &= \frac{ne^{\mathrm{i}(2k+1)(n-1)\pi/(2n)} - ne^{-\mathrm{i}(2k+1)(n+1)\pi/(2n)}}{1 - e^{-\mathrm{i}(2k+1)\pi/n}} \\ &= n\frac{e^{-\mathrm{i}(2k+1)\pi/n}}{e^{-\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)}} \times \frac{e^{\mathrm{i}(2k+1)\pi} - e^{-\mathrm{i}(2k+1)\pi}}{e^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)} - e^{-\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)}} \\ &= n\frac{\sin((2k+1)\pi)}{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) e^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) e^{\mathrm{i}(2k+1)\pi/(2n)}}{n\sin((2k+1)\pi)\left(X - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}.$$

Feuille d'exercice n° 18 : **Analyse asymptotique**

Exercice 7

Déterminer un équivalent de la suite de terme général $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$.

▷ **Solution.**
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_n = e^{\ln(n+1)/(n+1)} - e^{\ln(n)/n}.$$

Par croissances comparées, $\ln(n)/n \to_{(n\to+\infty)} 0$, donc on peut faire un développement limité des exponentielles. Cependant, on ne sait pas jusqu'à quel ordre il faut aller, on peut commencer par l'ordre 1. Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &= \frac{n(\ln(n+1) - \ln n) - \ln n}{n(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right) \\ &= \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} - \frac{\ln n}{n(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right). \end{aligned}$$

Mais $\ln(1+1/n)/(n+1) \sim_{(n\to+\infty)} 1/n^2$, donc par croissances comparées, $\ln(1+1/n)/(n+1) = o_{(n\to+\infty)}(\ln(n)/n)$, et toujours par croissances comparées, $\ln(n)/(n+1) = o_{(n\to+\infty)}(\ln(n)/n)$. L'ordre 1 n'est donc pas suffisant pour déterminer un équivalent de u_n. À l'ordre 2,

$$\begin{aligned} u_n &= \left(1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n+1)^2}{2(n+1)^2}\right) - \left(1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{(\ln n)^2}{2n^2}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} - \frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{n^2\ln(n+1)^2 - (n+1)^2(\ln n)^2}{2n^2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} - \frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{n^2(\ln(n+1)^2 - (\ln n)^2) - 2n(\ln n)^2 - \ln n}{2n^2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} - \frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{(\ln(n+1)+\ln n)(\ln(n+1)-\ln n)}{2(n+1)^2} - \frac{(\ln n)^2}{n(n+1)^2} - \frac{\ln n}{2n^2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} - \frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{(\ln(n)+\ln(n+1))\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2(n+1)^2} - \frac{(\ln n)^2}{n(n+1)^2} - \frac{\ln n}{2n^2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Encore une fois, tous les termes sont négligeables devant $(\ln n)^2/n^2$. Passons à l'ordre 3, les calculs devenant vraiment longs, voici le résultat, avant de rentrer certains termes dans le petit o :

$$\begin{aligned} u_n = {} & \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} - \frac{\ln n}{n(n+1)} + \frac{(\ln(n)+\ln(n+1))\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2(n+1)^2} - \frac{(\ln n)^2}{n(n+1)^2} - \frac{\ln n}{2n^2(n+1)^2} \\ & + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)((\ln n)^2 + \ln(n+1)\ln(n) + \ln(n+1)^2)}{6(n+1)^3} - \frac{(\ln n)^3}{2n(n+1)^3} - \frac{(\ln n)^3}{2n^2(n+1)^3} - \frac{(\ln n)^3}{6n^3(n+1)^3} \\ & + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right). \end{aligned}$$

La somme de logarithmes vient de la factorisation de $\ln(n+1)^3 - (\ln n)^3$. Les seuls termes non négligeable devant $(\ln n)^3/n^3$ sont les deux premiers, par conséquent,

$$u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} - \frac{\ln n}{n(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{(\ln n)^3}{n^3}\right).$$

Le terme prépondérant dans cette écriture est $(\ln n)/(n(n+1))$, en effet, $\ln(1+1/n)/(n+1) = o_{(n\to+\infty)}(\ln(n)/(n(n+1)))$. De plus, $(\ln n)^3/n^3 = o_{(n\to+\infty)}(\ln n)/n^2$, donc par transitivité de la relation de négligeabilité,

$$u_n = -\frac{\ln n}{n(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Ainsi, $u_n \sim_{(n\to+\infty)} -(\ln n)/n^2$.

Exercice 21 (✍)

1) Donner le développement limité de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$ en 0 à l'ordre 4.

2) Sur le même modèle, donner un développement limité de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ en 1 à l'ordre 3.

▷ **Solution.**

1) On ne peut pas directement calculer l'intégrale, cependant on sait, à partir du développement limité d'une fonction qui est la dérivée d'une autre, trouver celui de la fonction dont elle dérive. Soit $f : t \mapsto \sqrt{1+t^2}$. Notons F une primitive de f sur $\mathbf{R}$,

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad \int_x^{x^2} f = F(x^2) - F(x).$$

Comme

$$f(t) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + \underset{t\to 0}{o}(t^3),$$

et on en déduit que

$$F(t) = t + \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{24} + \frac{t^4}{64} + \underset{t\to 0}{o}(t^4),$$

d'où

$$\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \left(x^2 + \frac{x^4}{4}\right) - \left(x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{64}\right) + \underset{t\to 0}{o}(t^4) = -x + \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{24} + \frac{15x^4}{64} + \underset{t\to 0}{o}(t^4).$$

2) On procède de manière analogue, notons $f : t \mapsto e^{-t^2}$ ainsi que F une primitive de f sur $\mathbf{R}$. Pour trouver un développement limité de F en 1, on commence par le trouver en 0. Comme

$$f(t) = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^4),$$

et on en déduit que

$$F(t) = t - \frac{t^3}{3} + \underset{t\to 0}{o}(t^3),$$

donc

$$F(t) = (t-1) - \frac{(t-1)^3}{3} + \underset{t\to 1}{o}((t-1)^3).$$

De plus,

$$F\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 + \underset{t\to 1}{o}\left(\left(\frac{1}{t} - 1\right)^3\right) = \left(\frac{1}{t} - 1\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t} - 1\right)^3 + \underset{t\to 1}{o}((t-1)^3),$$

donc

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{t+1}\right) &= \left(\frac{1}{t+1}-1\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1}-1\right)^3+\underset{t\to 0}{o}(t^3)\\
&= \left(1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}-1\right)+\frac{1}{3}\left(1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}-1\right)^3+\underset{t\to 0}{o}(t^3)\\
&= -t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+\frac{1}{3}(-t^3)+\underset{t\to 0}{o}(t^3)\\
&= -t+\frac{t^2}{2}-\frac{2t^3}{3}+\underset{t\to 0}{o}(t^3).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$F\left(\frac{1}{t}\right) = -(t-1)+\frac{(t-1)^2}{2}-\frac{2(t-1)^3}{3}+\underset{t\to 1}{o}((t-1)^3),$$

et ainsi

$$\int_x^{1/x} e^{-t^2}\mathrm{d}t = -2(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(t-1)^3}{3}+\underset{x\to 1}{o}(x^3).$$

On pourrait craindre de ne pas avoir développé assez f, mais en développant plus, on se rend compte qu'en suivant cette méthode, le terme suivant du développement de f n'apporte que des termes négligeables devant x^3 quand x tend vers 1.

Feuille d'exercice n° 20 : **Intégration**

Exercice 4

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uniformément continue telle que $f(n) \xrightarrow[n\in\mathbf{N}]{n\to+\infty} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\in\mathbf{R}]{x\to+\infty} +\infty$.

▷ **Solution.**

L'uniforme continuité de f lui impose des variations bornées, donc les grandes valeurs prises par les $f(n)$ vont imposer de grandes valeurs à f. Précisons : l'uniforme continuité de f assure l'existence d'un $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq 1.$$

Soit $A > 0$, comme $f(n) \to_{(n\to+\infty)} +\infty$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f(n) \geq A$. Mais les variations de f entre deux entiers sont bornées. Soit $n \in \mathbf{N}$, soit $x \in [n, n+1]$,

$$|f(x)-f(n+1)| = \left| f(x) - f(x+\delta) + f(x+\delta) - f(x+2\delta) + f(x+2\delta) - \cdots + f\left(x + \left\lfloor \frac{n+1-x}{\delta} \right\rfloor \delta\right) - f(n+1) \right|.$$

Par inégalité triangulaire,

$$|f(x)-f(n+1)| \leq |f(x)-f(x+\delta)| + \cdots + \left| f\left(x + \left\lfloor \frac{n+1-x}{\delta} \right\rfloor \delta\right) - f(n+1) \right|,$$

mais pour tout $k \in \mathbf{N}$, $|(k+1)\delta - k\delta| = \delta$, $|f(x+k\delta) - f(x+(k+1)\delta)| \leq 1$. Par conséquent,

$$|f(x)-f(n+1)| \leq \left(\left\lfloor \frac{n+1-x}{\delta} \right\rfloor + 1 \right) \times 1 = \left\lfloor \frac{n+1-x}{\delta} \right\rfloor + 1.$$

Mais $n+1-x \leq 1$, d'où

$$|f(x)-f(n+1)| \leq \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor + 1, \quad \text{donc} \quad f(x) \geq f(n+1) - \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor - 1 \geq A - \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor - 1.$$

Ceci est donc vrai pour tout $x \geq N$, et quitte à remplacer A par $A + \lfloor 1/\delta \rfloor + 1$, on vient de montrer que

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Exercice 10

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Étudier la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 f^n(t)\mathrm{d}t$.

▷ **Solution.**

La fonction f étant strictement croissante et valant 1 en 1, pour tout $t \in [0,1[$, $f(t) < 1$, donc $f^n(t) \to_{(n\to+\infty)} 0$. On a envie de passer à la limite dans l'intégrale, ce qui conduirait, en notant

$$g : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \neq 1 \\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases},$$

à

$$\int_0^1 f^n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Mais aucun théorème de première année ne permet de passer à la limite dans une intégrale. On suppose néanmoins que la limite recherchée est 0. Si l'intégrale n'allait pas jusqu'à 1, on pourrait conclure. En effet, soit $a < 1$, f étant strictement croissante sur $[0,1]$,

$$\int_0^a f^n(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^a f^n(a)\mathrm{d}t = af^n(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On sépare donc cette intégrale en deux,

$$\int_0^1 f^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^a f^n(t)\mathrm{d}t + \int_a^1 f^n(t)\mathrm{d}t,$$

et on cherche à montrer que le deuxième morceau tend vers 0. On le majore de la même manière,

$$\int_a^1 f^n(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^1 f^n(1)\mathrm{d}t = 1 - a.$$

Le premier morceau tend vers 0 peu importe la valeur de $a < 1$, on a donc intérêt à prendre a le plus proche de 1 possible, pour minimiser le deuxième. Soit $\varepsilon > 0$, on cherche a tel que $1 - a = \varepsilon$, soit $a = 1 - \varepsilon$. Pour cette valeur de a, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, le premier morceau soit inférieur à ε. Ainsi, si $n \geq N$,

$$\int_0^1 f^n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{1-\varepsilon} f^n(t)\mathrm{d}t + \int_{1-\varepsilon}^1 f^n(t)\mathrm{d}t \leq \varepsilon + (1 - (1 - \varepsilon)) = 2\varepsilon.$$

Quitte à diviser ε par deux, ceci montre que $\int_0^1 f^n(t)\mathrm{d}t \to_{(n\to+\infty)} 0$.

Exercice 11 ()

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ (avec $a < b$), soit f continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer

$$\left(\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup\{f(t) \mid t \in [a, b]\}.$$

Indication : commencer par traiter le cas où f est constante.

▷ **Solution.**

Suivons l'indication et supposons f constante, de valeur $M \geq 0$, alors

$$\left(\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n} = ((b - a)M^n)^{1/n} = (b - a)^{1/n} M \xrightarrow[n\to+\infty]{} M.$$

La propriété est bien vérifiée. L'examen de ce cas permet de trouver une majoration de l'intégrale. On suppose désormais que f n'est pas constante et notons $M \geq 0$ sa borne supérieure. On obtient alors que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \left(\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n} \leq \left(\int_a^b M^n\mathrm{d}t\right)^{1/n} = (b - a)^{1/n} M.$$

Pour trouver un minorant de l'intégrale, on peut chercher de la même manière un minorant de f. On le cherche positif car les puissances non entières d'un nombre négatif ne sont pas définies. Si l'on choisit 0, qui est bien un minorant car f est positive, on montre que l'intégrale est positive, ce qui n'avance pas vraiment les choses. Mais f peut prendre la valeur 0, on ne va donc pas pouvoir choisir un minorant global de f, on en cherche donc un minorant local. La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, sa borne supérieure est atteinte, et donc tout $A \in]0, M[$ peut être un minorant local de f. En effet, soit $A \in]0, M[$, notons $\varepsilon = M - A > 0$, la continuité de f assure l'existence de $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ tel que $\alpha < \beta$ et pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $|f(x) - M| \leq \varepsilon$, soit $f(x) \geq M - \varepsilon = A$. La fonction f étant positive sur $[a, b]$,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \left(\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n} \geq \left(\int_\alpha^\beta f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n} \geq (\beta - \alpha)^{1/n} A,$$

et donc

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad (\beta - \alpha)^{1/n} A \leq \left(\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n} \leq (b - a)^{1/n} M.$$

Ceci est valable pour tout $A \in]0, M[$, donc par passage à la limite quand A tend vers M,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad (\beta - \alpha)^{1/n} M \leq \left(\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n} \leq (b - a)^{1/n} M.$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ et par théorème d'encadrement,

$$\left(\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} M = \sup\{f(t) \mid t \in [a, b]\}.$$

Exercice 19 ()

On définit la fonction F de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ par $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{|\sin(tx)|}{t}\mathrm{d}t$.

1) Justifier proprement la définition de F.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et calculer sa dérivée.

3) Nous étudions à présent le comportement asymptotique de F.

a) Montrer que $\forall x > 1,\ F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t + \int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$.

b) On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. En déduire que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi}\ln x$.

▷ **Solution.**

1) Soit $x \in \mathbf{R}_+$, notons $f_x : t \mapsto |\sin(tx)|$. Pour tout $t \in [-\pi/(2x), \pi/(2x)]$, $xt \in [-\pi/2, \pi/2]$ donc $f_x(t) = \sin(tx)$. La fonction f_x est donc dérivable en 0, donc la fonction $g_x : t \mapsto |\sin(tx)|/t$ admet une limite finie en 0, qui est x, donc est prolongeable par continuité en 0. Comme elle est continue sur $]0,\pi]$, son intégrale sur $]0,\pi]$ existe et donc la quantité $F(x)$ est bien définie.

2) On ne sait pas dériver F directement car x est à l'intérieur d'une intégrale, on va donc faire un changement de variable pour le sortir. Mais la fonction g_x définie en **1)** n'est pas définie en 0, on ne peut donc pas directement faire le changement de variable. Soit $x \in \mathbf{R}_+$, on a vu en **1)** que g_x était prolongeable par continuité en 0, notons $\tilde{g_x}$ ce prolongement, c'est-à-dire

$$\tilde{g_x} : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{|\sin(tx)|}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ x & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, $\tilde{g_x}$ est continue sur $[0,\pi]$ et

$$F(x) = \int_0^{\pi} \tilde{g_x}(t)\mathrm{d}t.$$

Si $x = 0$, $F(x) = 0$. Si $x > 0$, le changement de variable affine $t = u/x$ montre que

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\pi x} \tilde{g_x}\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u.$$

Soit $a \in]0, \pi x[$,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{a} \tilde{g_x}\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u + \frac{1}{x}\int_a^{\pi x} \tilde{g_x}\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\int_0^{a} \tilde{g_x}\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u + \int_a^{\pi x} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u.$$

Le deuxième terme ressemble presque à une primitive entre a et x, mais le facteur π gêne. Le changement de variable affine $u = \pi v$ montre que

$$\int_a^{\pi x} \frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u = \int_{a/\pi}^{x} \frac{|\sin(\pi v)|}{v}\mathrm{d}v,$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^{a} \tilde{g_x}\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u + \int_{a/\pi}^{x} \frac{|\sin(\pi v)|}{v}\mathrm{d}v = \frac{1}{x}\int_0^{a} \tilde{g_x}\left(\frac{u}{x}\right)\mathrm{d}u + \int_{a/\pi}^{x} \tilde{g_\pi}(v)\mathrm{d}v.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in]0, \pi x[$, en passant à la limite lorsque a tend vers 0, on obtient que

$$F(x) = \int_0^{x} \tilde{g_\pi}(v)\mathrm{d}v.$$

Ainsi, la fonction $\tilde{g_\pi}$ étant continue sur $[0,\pi]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est la primitive de $\tilde{g_\pi}$ s'annulant en 0. Elle est donc dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+,\quad F'(x) = \tilde{g_\pi}(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin(\pi x)|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \pi & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

3) **a)** Soit $x>1$, on a montré en **2)**, avec les notations introduites alors, que

$$\forall a \in]0,\pi x[,\quad F(x)=\frac{1}{x}\int_0^a \tilde{g_x}\left(\frac{t}{x}\right)\mathrm{d}t+\int_a^{\pi x}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t,$$

donc par passage à la limite quand a tend vers 0,

$$F(x)=\int_0^{\pi x}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t.$$

Par relation de Chasles,

$$F(x)=\int_0^{\pi\lfloor x\rfloor}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}u+\int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t+\int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t.$$

b) Soit $x>1$, soit $k\in\{1,\dots,\lfloor x\rfloor-1\}$, par positivité de $t\mapsto|\sin t|$,

$$\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\mathrm{d}t\leq\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\leq\frac{1}{k\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\mathrm{d}t.$$

Si k est pair,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin(t)\mathrm{d}t=\big[-\cos t\big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}=2,$$

et si k est impair,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=-\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\sin(t)\mathrm{d}t=-\big[-\cos t\big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}=2.$$

De plus, par positivité de $t\mapsto|\sin t|/t$ sur $\mathbf{R}_+^*$,

$$0\leq\int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\leq\int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi(\lfloor x\rfloor+1)}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\leq\frac{1}{\pi\lfloor x\rfloor}\int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi(\lfloor x\rfloor+1)}|\sin t|\mathrm{d}t.$$

On déduit de **3)a)** que

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor-1}\frac{1}{k+1}+\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\leq F(x)\leq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{k}+\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t.$$

Le terme $\int_0^\pi|\sin t|/t$ étant constant, le résultat admis et le théorème d'encadrement montrent que

$$\frac{F(x)}{\ln(x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{2}{\pi},\quad\text{d'où}\quad F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{2}{\pi}\ln(x).$$

Exercice 20 (▲)

Soit $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\sin t)^x\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est décroissante.

2) Montrer que pout tout $x\in[1,+\infty[$, $(x+1)f(x+1)=xf(x-1)$.

3) Soit $\varphi(x)=xf(x)f(x-1)$. Montrer que φ est périodique de période 1.

4) Calculer $\varphi(x)$ pour tout $x\in\mathbf{N}^*$.

5) En déduire que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$, puis que $\forall x\in[1,+\infty[$, $\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

▷ **Solution.**

1) Soit $(x,y)\in(\mathbf{R}_+)^2$ tel que $x<y$. Pour tout $t\in]0,\pi/2]$, $\sin t\in]0,1]$ donc $\ln(\sin t)\leq 0$, d'où $x\ln(\sin t)\geq y\ln(\sin t)$. Par croissance de l'exponentielle, pour tout $t\in]0,\pi]$, $e^{x\ln(\sin t)}\geq e^{y\ln(\sin t)}$, soit $(\sin t)^x\geq(\sin t)^y$. Par croissance de l'intégrale, $f(x)\geq f(y)$ donc f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

2) Soit $x\in[1,+\infty[$, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}
f(x+1)&=\int_0^{\pi/2}(\sin t)(\sin t)^x\mathrm{d}t\\
&=\big[(-\cos t)(\sin t)^x\big]_0^{\pi/2}+x\int_0^{\pi/2}(\cos t)^2(\sin t)^{x-1}\mathrm{d}t\\
&=x\int_0^{\pi/2}(1-(\sin t)^2)(\sin t)^{x-1}\mathrm{d}t\\
&=xf(x-1)-xf(x+1).
\end{aligned}$$

Ainsi, $(x+1)f(x+1)=xf(x-1)$.

3) La fonction f étant définie sur $\mathbf{R}_+$, φ est définie sur $[1,+\infty[$. Soit $x\in[1,+\infty[$, en multipliant la relation trouvée en **2)** par $f(x)$, on obtient $(x+1)f(x+1)f(x)=xf(x)f(x-1)$, soit $\varphi(x+1)=\varphi(x)$. La fonction φ est bien 1-périodique.

4) D'après **3)**, φ est 1-périodique donc par récurrence, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$,

$$\varphi(n)=\varphi(1)=\int_0^{\pi/2}\sin(t)\mathrm{d}t\times\int_0^{\pi/2}1\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\big[-\cos t\big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}.$$

5) D'après **4)**, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $\varphi(n)=\pi/2$ donc

$$f(n)f(n-1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2n}.$$

L'équivalent que l'on veut trouver laisse à penser que $f(n)\sim_{(n\to+\infty)}f(n-1)$. Soit $n\in\mathbf{N}^*$, d'après **1)**, f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$ donc $f(n+1)\leq f(n)\leq f(n-1)$. Pour tout $x\in\mathbf{R}_+$, $t\mapsto(\sin t)^x$ est continue, positive et non nulle sur $[0,\pi/2]$, donc $f(x)>0$. Ainsi,

$$\frac{f(n+1)}{f(n-1)}\leq\frac{f(n)}{f(n-1)}\leq 1,$$

mais **2)** montre que $f(n+1)/f(n-1)\to_{(n\to+\infty)}1$. Par théorème d'encadrement, $f(n)\sim_{(n\to+\infty)}f(n-1)$, et donc

$$f(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Mais ce que l'on veut montrer, c'est que

$$f(x)\underset{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbf{R}_+}}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2x}},\quad\text{soit}\quad\sqrt{\frac{2x}{\pi}}f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1.$$

Ramenons nous au cas entier. Soit $x\in\mathbf{R}_+$, la fonction $t\mapsto\sqrt{t}$ étant croissante et positive sur $\mathbf{R}_+$ et f étant décroissante et positive sur $\mathbf{R}_+$,

$$\sqrt{\frac{2\lfloor x\rfloor}{\pi}}f(\lfloor x\rfloor+1)\leq\sqrt{\frac{2x}{\pi}}f(x)\leq\sqrt{\frac{2(\lfloor x\rfloor+1)}{\pi}}f(\lfloor x\rfloor).$$

L'équivalent établi dans le cas entier montre, avec le théorème d'encadrement, que $f(x)\sim_{(x\to+\infty)}\sqrt{\pi/(2x)}$.

Enfin, soit $x\in[1,+\infty[$, la 1-périodicité de φ démontrée en **3)** permet de montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\varphi(x)=\varphi(x+n)$. On montre comme précédemment que $f(x)\sim_{(x\to+\infty)}f(x-1)$, donc l'équivalent de f en $+\infty$ montre que $\varphi(x+n)\sim_{(n\to+\infty)}\pi/2$. Ainsi, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\varphi(x)=\pi/2$.

Feuille d'exercice n° 23 : **Probabilités**

Exercice 14

Soit r un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant r jetons numérotés de 1 à r dans lequel on peut effectuer une succession de tirages avec remise en notant, à chaque fois, le numéro obtenu.

Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages. Soit n un entier naturel non nul.

1) a) Quelles sont les valeurs prises par T_n ?

b) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(T_n = 1)$, $\mathbf{P}(T_n = n)$ et $\mathbf{P}(T_n = 2)$.

2) Soit (k, n) un couple d'entiers naturels non nuls tels que $1 \leq k \leq r$. Déterminer une relation entre $\mathbf{P}(T_{n+1} = k)$, $\mathbf{P}(T_n = k)$ et $\mathbf{P}(T_n = k - 1)$.

3) Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme $Q_n(X)$ défini par :

$$Q_n(X) = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(T_n = k)X^k.$$

a) Montrer, que pour tout entier naturel n non nul : $Q_{n+1}(X) = \dfrac{1}{r}(X - X^2)Q'_n(X) + XQ_n(X)$.

b) Pour tout entier naturel n non nul, en reliant $\mathbf{E}(T_n)$ à $Q_n(X)$, exprimer $\mathbf{E}(T_{n+1})$ en fonction de $\mathbf{E}(T_n)$, r et n. Déterminer ensuite $\mathbf{E}(T_n)$ en fonction de r et n.

c) Calculer la limite de $\dfrac{\mathbf{E}(T_r)}{r}$ quand $r \to +\infty$.

▷ **Solution.**

1) a) Il est possible d'obtenir un numéro distinct à chaque tirage, mais le nombre de numéros distincts pouvant être obtenus ne peut dépasser r. Par conséquent, T_n est à valeurs dans $\{1, \ldots, \min(n, r)\}$.

b) Notons X_k la variable aléatoire donnant le numéro obtenu au k^{e} tirage, qui suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, r\}$. La probabilité $\mathbf{P}(T_n = 1)$ est la probabilité que le même numéro soit obtenu à chaque tirage. Les tirages s'effectuant avec remise, les X_k sont indépendantes. La formule des probabilités totales montre que

$$\mathbf{P}(T_n = 1) = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(T_n = 1, X_1 = k) = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = k, \ldots, X_n = k).$$

Les X_k étant indépendantes,

$$\sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = k, \ldots, X_n = k) = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X_1 = k) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{r^n} = \frac{r}{r^n} = \frac{1}{r^{n-1}}.$$

Ainsi, $\mathbf{P}(T_n = 1) = 1/r^{n-1}$.

Si $n > r$, $P(T_n = n) = 0$ car on ne peut pas obtenir plus de r numéros distincts. Si $n \leq r$, une séquence de n tirages où n numéros distincts sont obtenus est un n-arrangement de $\{1, \ldots, r\}$. Par conséquent, $\mathbf{P}(T_n = n)$ est égale au nombre de n-arrangements de $\{1, \ldots, r\}$ divisé par le nombre de séquences qu'il est possible d'obtenir, à savoir $\operatorname{card}(\{1, \ldots, r\}^n) = r^n$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(T_n = n) = \frac{\dfrac{r!}{(r-n)!}}{r^n} = \frac{(r-1)!}{r^{n-1}(r-n)!}.$$

Enfin, obtenir deux numéros distincts sur n tirages, c'est obtenir une suite du même numéro, puis un autre numéro, puis une séquence ne contenant que ces deux numéros. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(T_n = 2) = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(T_n = 2, X_1 = k),$$

et en appliquant de nouveau cette formule en conditionnant par rapport à la longueur de la première séquence, où l'on obtient toujours le même numéro,

$$\sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(T_n = 2, X_1 = k) = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{P}(T_n = 2, X_1 = \cdots = X_j = k, X_{j+1} \neq k) + \mathbf{P}(T_n = 2, X_1 = \cdots = X_n = k) \right).$$

Remarquons que pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, $\mathbf{P}(T_n = 2, X_1 = \cdots = X_n = k) = 0$, car cet évènement correspond à n'obtenir que des k. On applique encore une fois la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_n = 2) &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{r} \mathbf{P}(T_n = 2, X_1 = \cdots = X_j = k, X_{j+1} = l) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{r} \mathbf{P}(X_1 = \cdots = X_j = k, X_{j+1} = l, X_{j+2} \in \{k, l\}, \ldots, X_n \in \{k, l\}).
\end{aligned}$$

Par indépendance des X_k,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_n = 2) &= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{r} \mathbf{P}(X_1 = k) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_j = k)\mathbf{P}(X_{j+1} = l)\mathbf{P}(X_{j+2} \in \{k, l\}) \times \cdots \times \mathbf{P}(X_n \in \{k, l\}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{r} \left(\frac{1}{r}\right)^j \frac{1}{r} \left(\frac{2}{r}\right)^{n-j-1} \\
&= \frac{1}{r^n} \left(\sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{r} 1 \right) \left(\sum_{j=1}^{n-1} 2^{n-j-1} \right) \\
&= \frac{r(r-1)}{r^n} \left(\sum_{j=0}^{n-2} 2^j \right) \\
&= \frac{r-1}{r^{n-1}} \times \frac{1 - 2^{n-1}}{1 - 2} \\
&= \frac{(r-1)(2^{n-1} - 1)}{r^{n-1}}.
\end{aligned}$$

2) Par formule des probabilités totales,

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = k) = \sum_{j=1}^{\min(n,r)} \mathbf{P}(T_{n+1} = k, T_n = j).$$

Mais comme un seul numéro est obtenu à chaque tirage, donc $T_{n+1} = T_n$ ou $T_{n+1} = T_n + 1$, d'où

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = k) = \mathbf{P}(T_{n+1} = k, T_n = k) + \mathbf{P}(T_{n+1} = k, T_n = k - 1).$$

Si $k = 1$, $\mathbf{P}(T_{n+1} = k, T_n = k - 1) = \mathbf{P}(T_{n+1} = 1, T_n = 0) = 0$ et $\mathbf{P}(T_n = 1) \neq 0$, donc $\mathbf{P}(T_{n+1} = 1) = \mathbf{P}(T_{n+1} = 1 \mid T_n = 1)\mathbf{P}(T_n = 1)$. La probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(T_{n+1} = 1 \mid T_n = 1)$ est égale à la probabilité que le numéro obtenu au $(n + 1)^{\text{e}}$ tirage ait déjà été obtenu, donc $\mathbf{P}(T_{n+1} = 1 \mid T_n = 1) = 1/r$ car un seul numéro a déjà été obtenu. Ainsi,

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = 1) = \frac{\mathbf{P}(T_n = 1)}{r}.$$

Si $k \neq 1$, les mêmes arguments permettent d'écrire que

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = k) = \mathbf{P}(T_{n+1} = k \mid T_n = k)\mathbf{P}(T_n = k) + \mathbf{P}(T_{n+1} = k \mid T_n = k - 1)\mathbf{P}(T_n = k - 1),$$

avec $\mathbf{P}(T_{n+1} = k \mid T_n = k) = k/r$ et $\mathbf{P}(T_{n+1} = k \mid T_n = k - 1) = (r - k)/r$. Par conséquent,

$$\mathbf{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{r}\mathbf{P}(T_n = k) + \frac{r - k + 1}{r}\mathbf{P}(T_n = k - 1).$$

Comme $\mathbf{P}(T_n = 0) = 0$, cette expression est valable aussi pour $k = 1$.

3) a) D'après **2)**,

$$Q_{n+1}(X)=\sum_{k=1}^{r}\mathbf{P}(T_{n+1}=k)X^k=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}k\mathbf{P}(T_n=k)X^k+\sum_{k=1}^{r}\mathbf{P}(T_n=k-1)X^k-\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}(k-1)\mathbf{P}(T_n=k-1)X^k.$$

De plus,

$$Q_n'(X)=\sum_{k=1}^{r}k\mathbf{P}(T_n=k)X^{k-1},$$

d'où

$$Q_{n+1}(X)=\frac{1}{r}(X-X^2)Q_n'(X)+XQ_n'(X).$$

b) Étant donné que

$$\mathbf{E}(T_n)=\sum_{k=1}^{r}\mathbf{P}(T_n=k)k,$$

on remarque que $\mathbf{E}(T_n)=Q_n'(1)$. En dérivant la relation établie en **3)a)**, il vient que

$$Q_{n+1}'(X)=\frac{1}{r}(1-2X)Q_n'(X)+\frac{1}{r}(X-X^2)Q_n''(X)+Q_n(X)+XQ_n'(X).$$

Comme $Q_n(1)=\sum_{k=1}^{r}\mathbf{P}(T_n=k)=1$,

$$\mathbf{E}(T_{n+1})=\left(1-\frac{1}{r}\right)\mathbf{E}(T_n)+1.$$

La suite $(\mathbf{E}(T_n))$ est donc une suite arithmético-géométrique. Soit $\alpha\in\mathbf{R}$,

$$\alpha=\left(1-\frac{1}{r}\right)\alpha+1 \iff \alpha=r,$$

donc la suite $(\mathbf{E}(T_n)-r)$ est une suite géométrique de raison $1-1/r$ et de premier terme $E(T_1)-r=1-r$. Par conséquent,

$$\forall n\in\mathbf{N}^*,\quad \mathbf{E}(T_n)=r+(1-r)\left(1-\frac{1}{r}\right)^{n-1}.$$

c) D'après **3)b)**,

$$\frac{\mathbf{E}(T_r)}{r}=1+\left(\frac{1}{r}-1\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)^{r-1}=1-\left(1-\frac{1}{r}\right)^{r}.$$

Mais si $r\in\mathbf{N}^*$,

$$\left(1-\frac{1}{r}\right)^{r}=e^{r\ln(1-1/r)},$$

et $r\ln(1-1/r)\sim_{(r\to+\infty)}-1$, donc $(1-1/r)^r\to_{(r\to+\infty)}1/e$. Ainsi,

$$\frac{\mathbf{E}(T_r)}{r}\xrightarrow[r\to+\infty]{}1-\frac{1}{e}.$$

Feuille d'exercice n° 24 : **Matrices**

Exercice 18

Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication : on commencera par étudier complètement A.

▷ **Solution.**

Analyse : Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ solution de $X^2 + X = A$, soit $X(X + I_n) = A$. Comme A est de rang 1, X ou $X + I_n$ n'est pas inversible. En effet, si les deux l'étaient, A serait de rang 2. De plus, A est non nulle donc aucune des deux n'est nulle.

- Si X est de rang 1, la famille de ses vecteurs colonnes ou de ses vecteurs ligne est liée.
  - Si c'est la famille de ses vecteurs colonnes qui est liée, il existe $(a, b, \lambda) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$X = \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix},$$

et

$$X(X + I_n) = \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + 1 & \lambda a \\ b & \lambda b + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a+1) + \lambda ab & \lambda a^2 + \lambda a(\lambda b + 1) \\ b(a+1) + \lambda b^2 & \lambda ab + \lambda b(\lambda b + 1) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a(a+1) + \lambda ab = 1 \\ \lambda a^2 + \lambda a(\lambda b + 1) = 1 \\ b(a+1) + \lambda b^2 = 1 \\ \lambda ab + \lambda b(\lambda b + 1) = 1 \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a(a + \lambda b + 1) = 1 \\ \lambda a(a + \lambda b + 1) = 1 \\ b(a + \lambda b + 1) = 1 \\ \lambda b(a + \lambda b + 1) = 1 \end{cases}.$$

La première et la deuxième ligne montrent que $\lambda = 1$, donc

$$\begin{cases} a(a + b + 1) = 1 \\ b(a + b + 1) = 1 \end{cases},$$

et l'égalité des traces montre alors que

$$a(a+1) + ab + ab + b(b+1) = a^2 + 2ab + b^2 + a + b = (a+b)^2 + (a+b) = 2.$$

Comme $X^2 + X - 2 = (X - 1)(X + 2)$, les seules racines de ce polynôme sont 1 et -2. Ainsi, $a + b = 1$ ou $a + b = -2$. Si $a + b = 1$, le système montre que $a = b = 1/2$, et si $a + b = -2$, $a = b = -1$.

  - Si c'est la famille de ses vecteurs lignes qui est liée, il existe $(a, b, \lambda) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad X^T = \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix}.$$

Comme X et $X+I_n$ commutent, $X(X+I_n) = (X+I_n)X = A$ donc $X^T(X+I_n)^T = A^T$, soit $X^T(X^T+I_n) = A$. On est ainsi ramené au cas précédent.

- Si $X + I_n$ est de rang 1, on suit le même raisonnement.
  - Si c'est la famille de ses vecteurs colonnes qui est liée, il existe $(a, b, \lambda) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$X + I_n = \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad X = \begin{pmatrix} a - 1 & \lambda a \\ b & \lambda b - 1 \end{pmatrix},$$

et

$$X(X + I_n) = \begin{pmatrix} a - 1 & \lambda a \\ b & \lambda b - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \lambda a \\ b & \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a-1) + \lambda ab & \lambda a(a-1) + \lambda^2 ab \\ ab + b(\lambda b - 1) & \lambda ab + \lambda b(\lambda b - 1) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} a(a-1) + \lambda ab = 1 \\ \lambda a(a-1) + \lambda^2 ab = 1 \\ ab + b(\lambda b - 1) = 1 \\ \lambda ab + \lambda b(\lambda b - 1) = 1 \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a(a + \lambda b - 1) = 1 \\ \lambda a(a + \lambda b - 1) = 1 \\ b(a + \lambda b - 1) = 1 \\ \lambda b(a + \lambda b - 1) = 1 \end{cases}.$$

La première et la deuxième ligne montrent que $\lambda = 1$, donc

$$\begin{cases} a(a+b-1) = 1 \\ b(a+b-1) = 1 \end{cases},$$

et l'égalité des traces montre alors que

$$a(a-1) + ab + ab + b(b-1) = a^2 + 2ab + b^2 - a - b = (a+b)^2 - (a+b) = 2.$$

Comme $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$, les seules racines de ce polynôme sont 2 et -1. Ainsi, $a+b = 2$ ou $a+b = -1$. Si $a+b = 2$, le système montre que $a = b = 1$, et si $a+b = -1$, $a = b = -1/2$.

— Si c'est la famille de ses vecteurs lignes qui est liée, il existe $(a, b, \lambda) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$X + I_n = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad X = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ \lambda a & \lambda b - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad X^T = \begin{pmatrix} a-1 & \lambda a \\ b & \lambda b - 1 \end{pmatrix}.$$

Comme X et $X+I_n$ commutent, $X(X+I_n) = (X+I_n)X = A$ donc $X^T(X+I_n)^T = A^T$, soit $X^T(X^T+I_n) = A$. On est ainsi ramené au cas précédent.

Finalement, les matrices trouvées sont $\frac{1}{2}A$, $-A$, A et $-\frac{1}{2}A$.

Synthèse : Remarquons que $A^2 = 2A$, donc

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}A\right)^2 + \dfrac{1}{2}A = \dfrac{1}{4}A^2 + \dfrac{1}{2}A = A \\ (-A)^2 - A = A^2 - A = A \\ A^2 + A = 3A \\ \left(-\dfrac{1}{2}A\right)^2 - \dfrac{1}{2}A = \dfrac{1}{4}A^2 - \dfrac{1}{2}A = 0 \end{cases}.$$

Les seules solutions de l'équation $X^2 + X = A$ sont donc $\frac{1}{2}A$ et $-A$.

Feuille d'exercice n° 25 : **Déterminants**

Exercice 14

Calculer les déterminants suivants, d'ordre $n \in \mathbf{N}^*$.

1) $A_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x \\ 0 & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

2) $B_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_n & \dots & \dots & a_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$

▷ **Solution.**

1) Soit $x \in \mathbf{C}$. Soit $n \geq 3$, en développant par rapport à la première ligne, il vient que

$$A_n = (1+x)^2 A_{n-1} - x \begin{vmatrix} x & x & & & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & & \\ & x & 1+x^2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & x \\ 0 & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix},$$

puis en développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$A_n = (1+x^2)A_{n-1} - x^2 A_{n-2}.$$

C'est une relation de récurrence linéaire double à coefficients constants, de polynôme caractéristique $X^2 - (1+x^2)X + x^2$, donc de discriminant

$$\Delta = (1+x^2)^2 - 4x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2 = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2.$$

- Si $x = 1$ ou $x = -1$, $\Delta = 0$ donc l'unique racine du polynôme caractéristique est $(1+x^2)/2 = 1$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad A_n = \lambda + \mu n.$$

De plus,

$$A_1 = \left|1+x^2\right| = 1+x^2 = 2, \quad \text{et que} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = 3.$$

Le couple (λ, μ) vérifie donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda + 2\mu = 3 \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad A_n = 1 + n.$$

- Si $x \neq 1$ et $x \neq -1$, $\Delta \neq 0$ donc le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes,

$$\frac{1+x^2-(x^2-1)}{2} = 1, \quad \text{et} \quad \frac{1+x^2+(x^2-1)}{2} = x^2.$$

Par conséquent, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad A_n = \lambda + \mu x^{2n}.$$

Le calcul de A_1 et de A_2 montre que

$$\begin{cases} \lambda + \mu x^2 = 1 + x^2 \\ \lambda + \mu x^4 = (1+x^2)^2 - x^2 \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \lambda + \mu x^2 = 1 + x^2 \\ x^2(x^2-1)\mu = (1+x^2)^2 - 2x^2 - 1 = x^4 \end{cases}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda = 1 - \dfrac{1}{x^2-1} \\ \mu = \dfrac{x^2}{x^2-1} \end{cases}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad A_n = 1 + \frac{x^{2(n+1)} - 1}{x^2 - 1}.$$

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ ainsi que $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{C}^n$. En soustrayant la dernière colonnes de B_n à toutes les autres, on obtient que

$$B_n = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ -b_n & \dots & \dots & -b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Un développement par rapport à la dernière colonne montre que

$$B_n = (a_n + b_n)\Delta_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+i} a_i \Delta_{i,n},$$

où les $\Delta_{i,n}$ sont les mineurs d'ordre (i, n) de B_n, donc des déterminants de taille $n-1$. Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\Delta_{i,n} = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_{i-1} & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & b_{i+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ -b_n & \dots & \dots & \dots & -b_n & \dots & \dots & \dots & -b_n \end{vmatrix},$$

donc un développement par rapport à la i^{e} colonne, qui ne contient qu'un coefficient non nul, montre que

$$\Delta_{i,n} = (-1)^{n-1+i}(-b_n) \begin{vmatrix} b_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b_{i-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b_{i+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant d'une matrice diagonale étant égal au produit de ses coefficients diagonaux,

$$\Delta_{i,n} = (-1)^{n+i} b_n \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} b_k = (-1)^{n+i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} b_k.$$

Par conséquent,

$$B_n = (a_n + b_n) \prod_{k=1}^{n-1} b_k + \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} b_k \right) = \prod_{k=1}^{n} b_k + \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} b_k \right).$$

Feuille d'exercice n° 26 : **Espaces euclidiens**

Exercice 3 (🚲⛰)

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et $(v_1, \dots, v_n) \in E$.

Montrer l'inégalité : $\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 \leq n \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$.

▷ **Solution.**

L'inégalité fait penser à Cauchy-Schwarz. Par inégalité triangulaire,

$$\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\| \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \times \|v_i\| \right)^2,$$

et donc par inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$,

$$\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n 1 \times \|v_i\| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|^2 \right) \leq n \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2.$$

Exercice 5 (🚲⛰)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1) Montrer que, sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire.

2) Soit N la norme associée à ce produit scalaire (on l'appelle *norme de Frobenius*), montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad N(AB) \leq N(A)N(B).$$

3) Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad |\operatorname{tr}(A)| \leq \sqrt{n} N(A).$$

▷ **Solution.**

1) Notons $\varphi : (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^T B)$.

- La trace et la transposée étant des applications linéaires, φ est bilinéaire.
- La trace étant invariante par transposition, φ est symétrique.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, notons $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors

$$\varphi(A, A) = \operatorname{tr}(A^T A) = \operatorname{tr}\left(\left(\sum_{k=1}^n A_{k,i} A_{k,j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{k,i}^2 \geq 0,$$

  donc φ est positive.
- Les $A_{i,k}$ étant positifs, le calcul précédent montre que

$$\varphi(A, A) = 0 \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad A_{i,j}^2 = 0 \iff \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad A_{i,j} = 0 \iff A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbf{R})},$$

  donc φ est bien définie.

Ainsi, φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, notons $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (B_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Notons $C = AB$, et $C = (C_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, sachant que par produit matriciel,

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad C_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j}.$$

Le calcul fait en **1)** montre que

$$N(C)^2 = \varphi(C,C) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right)^2.$$

Mais l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$ montre que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} B_{k,j}^2\right).$$

Par conséquent,

$$N(AB)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} B_{k,j}^2\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{k,j}^2\right),$$

et donc le calcul fait en **1)** montre que $N(AB)^2 \leq \varphi(A,A)\varphi(B,B) = N(A)^2N(B)^2$. Une norme étant positive, on en déduit que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

3) L'inégalité fait penser à Cauchy-Schwarz, on essaie donc de faire apparaître des produits scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\operatorname{tr}(A) = \varphi(I_n, A)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\varphi(I_n, A)| \leq N(I_n)N(A)$ et le calcul fait en **1)** montre que

$$N(I_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{i,i}^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

où δ est le symbole de Kronecker. On en déduit que $N(I_n) = \sqrt{n}$, et donc que $|\operatorname{tr} A| \leq \sqrt{n}N(A)$.

Feuille d'exercice n° 27 : **Séries numériques**

Exercice 9

Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$, après avoir montré son existence.

▷ **Solution.**

Soit $n \in \mathbf{N}^*$,

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

donc

$$\frac{1}{1^2+\cdots+n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum 1/(1^2+\cdots+n^2)$ converge. Ainsi, si l'on note S la somme recherchée,

$$S = 6\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Cette somme fait penser à des sommes telles que la somme des $1/(n(n+1))$, qui se calculent en décomposant le terme général en éléments simples pour faire apparaître des simplifications. Le théorème de décomposition en éléments simples assure l'existence de $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ tel que

$$\frac{1}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X+1}.$$

On calcule les coefficients a, b et c en multipliant cette relation par respectivement X, $X+1$ et $2X+1$, puis en l'évaluant respectivement en 0, -1 et $-1/2$, ce qui donne $a=b=1$ et $c=-4$. Ainsi,

$$S = 6\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right).$$

On passe ensuite aux sommes partielles pour simplifier cette expression. Notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, σ_n la somme partielle d'ordre n. Soit $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} \\
&= 1 + \frac{1}{n+1} + 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} \\
&= 1 + \frac{1}{n+1} + 4\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}\right).
\end{aligned}$$

Notons v_n la quantité entre parenthèses. La somme $\sum_{k=1}^{n} 1/(2k+1)$ est la somme des inverses des entiers impairs entre 3 et $2n+1$, tandis que $\sum_{k=2}^{n} 1/(2k)$ est la somme des inverses des entiers pairs entre 4 et $2n$. Leur somme est donc égale à $\sum_{k=3}^{2n+1} 1/k$, d'où

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} = \sum_{k=3}^{2n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k}.$$

Par conséquent,

$$v_n = 2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k} - \sum_{k=3}^{2n+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1 - \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}.$$

Notons pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n 1/k$. On sait que cette suite a pour limite $+\infty$, mais on sait également en établir un développement limité au voisinage de $+\infty$. En effet, la fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$ donc par comparaison somme-intégrale,

$$\forall n \geq 1, \quad \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq H_n \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + 1.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$, ce qui montre que $H_n \sim_{(n\to+\infty)} \ln n$. De plus, toujours par comparaison somme-intégrale,

$$\forall n \geq 2, \quad \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

En notant pour tout $n \geq 2$, $u_n = \int_{n-1}^n \mathrm{d}t/t$, pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n \leq 1/n - u_n \leq 0$. Mais

$$u_n = \ln(n) - \ln(n-1) = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La suite (u_n) converge, donc la série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Par comparaison à une série à termes réels négatifs, la série $\sum(1/n - u_n)$ converge, donc la suite de ses sommes partielles aussi. Notons $l \in \mathbf{R}$ sa limite, alors

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{n} - u_k\right) = H_n - 1 - \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = H_n - \ln n - 1 = l + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

En notant $\gamma = l + 1$, on obtient le développement limité

$$H_n = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

Par conséquent, les calculs précédents montrent que

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= 1 + \frac{1}{n+1} + 4\left(H_n - H_{2n+1} + \frac{1}{2}\right) \\
&= 3 + \frac{1}{n+1} + 4(\ln n + \gamma - \ln(2n+1) - \gamma) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\
&= 3 + 4\ln\left(\frac{n}{2n+1}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \\
&= 3 - 4\ln 2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = 6(3 - 4\ln 2).$$

Exercice 12 ()

Soit $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$ et $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Étudier, selon α, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{R_N}{S_N}$.

▷ **Solution.**

Commençons par remarquer que comme $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ converge, donc la suite (R_N) est bien définie. Cherchons un équivalent de R_N/S_N. Notons S la somme de la série $\sum 1/n^\alpha$, dont tous les termes sont strictement positifs, donc $S > 0$ et $S_N \sim_{(N\to+\infty)} S$. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, donc par comparaison somme-intégrale, pour tous $N \in \mathbf{N}^*$ et $k \geq N+1$,

$$\int_{N+1}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{n=N+1}^k \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_N^k \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}, \quad \text{soit} \quad \frac{(k+1)^{1-\alpha} - (N+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{n=N+1}^k \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{k^{1-\alpha} - N^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, $1 - \alpha < 0$ donc $k^{1-\alpha} \to_{(k\to+\infty)} 0$. Par passage à la limite quand k tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente,

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq R_N \leq \frac{N^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Par théorème d'encadrement, $R_N \sim_{(N\to+\infty)} N^{1-\alpha}/(\alpha-1)$, d'où

$$\frac{R_N}{S_N} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{S(\alpha-1)N^{\alpha-1}}.$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum R_N/S_N$ converge si et seulement si $\alpha-1>1$, donc si et seulement si $\alpha>2$.