Solution des exercices du Vademecum

Thomas Harbreteau

22 août 2019

Table des matières

Introduction

Tous les énoncés de ce document sont issus du *Vademecum pour futurs taupins*[1]. Dans la suite, vous trouverez 72 exercices, majoritairement d'analyse, qui permettent de se familiariser avec quelques outils de base dont vous vous servirez abondamment durant vos deux (ou trois !) prochaines années de prépa.

Maintenant que vous entrez dans le supérieur, une attention toute particulière devra être apportée à la rigueur et à la rédaction de vos raisonnements. Pour plus d'informations, je vous invite à lire le *Manuel de rédaction*[2]. Tous les exercices sont suivis d'une solution rédigée rigoureusement.

Néanmoins je rappelle qu'il est nécéssaire de passer du temps à chercher un exercice avant de regarder une solution. La calculatrice est interdite, elle le restera durant toute votre prépa et durant vos concours, en mathématiques tout du moins. Habituez-vous donc dès maintenant à poser toutes vos opérations à la main, qu'il s'agisse d'additions ou de divisions.

Ces exercices sont plutôt calculatoires, assez ennuyeux, très répétitifs et peu représentatifs de ce que l'on fait en prépa. Tous les faire ne me semble donc pas la meilleure stratégie, sauf si vous vous ennuyez. Beaucoup d'exercices contiennent plusieurs questions se ressemblant très fortement, en faire seulement quelques une me semble judicieux.

Vous pouvez vous déplacer facilement dans le document en cliquant sur la feuille d'exercice qui vous intéresse dans la table des matières. Vous pouvez revenir à cette dernière à tout moment en cliquant sur le symbole 📘 en bas à droite de chaque page. Attention, il se peut que sur téléphone, les liens ne fonctionnent pas.

Enfin, je ne pense pas qu'il soit productif de commencer à travailler avant une ou deux semaines avant la rentrée, sauf si, encore une fois, vous vous ennuyez. Outre ces exercices, vous trouverez quelques conseils sur quoi réviser dans les *Conseils pour futurs étudiants*[3]. N'oubliez pas de vous reposez et de vous détendre durant ces vacances car les deux (ou trois !) années qui vont suivre ne seront pas de tout repos. Bonne lecture.

1. `https://mpsilamartin.github.io/maths/cours/VAD.chap.pdf`
2. `https://mpsilamartin.github.io/maths/cours/form/redaction.pdf`
3. `https://mpsilamartin.github.io/orga/courrier_futurs_eleves.pdf`

1 Rédaction et raisonnement déductif.

Exercice 1.0.2

Montrer que si un nombre entier est impair, alors son carré est impair.

▷ **Solution.**

Soit $n \in \mathbf{N}$ impair, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2k + 1$, et donc

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Le réel $2k^2 + 2k$ étant entier car k l'est, n^2 est bien impair.

Exercice 1.0.3

En utilisant une identité remarquable, montrer que si deux nombres complexes ont même carré, alors ils sont égaux ou opposés.

▷ **Solution.**

Soient x et y deux nombres complexes tels que $x^2 = y^2$, alors $x^2 - y^2 = 0$, soit

$$(x + y)(x - y) = 0.$$

Par conséquent, $x + y = 0$ ou $x - y = 0$, d'où $x = \pm y$.

2 Autour de la trigonométrie.

2.1 Cosinus et sinus.

Exercice 2.1.2

Soit $a, b \in \mathbf{R}$. Montrer les formules suivantes.

1) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$. *Attention, il y a une erreur dans le poly !*

2) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

3) $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.

4) $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$.

5) $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(b)$.

▷ **Solution.**

1) Développement de $\cos(a + (-b))$.

2) Développement de $\sin(a + (-b))$.

3) Développement de $\cos(a + a)$.

4) On utilise **3)** sachant que $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$.

5) Développement de $\sin(a + a)$.

Remarque : Il faut savoir retrouver les formules 3) et 4) car elles permettent la linéarisation des cos *et* sin *c'est-à-dire transformer les produits en additions.*

Exercice 2.1.3

Soit $x \in \mathbf{R}$. En utilisant les formules précédentes, montrer les formules suivantes.

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$.

2) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$.

3) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$. *Attention, il y a une erreur dans le poly !*

4) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.

5) $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

▷ **Solution.**

On utilise les formules de développement de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Remarque : À savoir retrouver (très) rapidement, très utile.

Exercice 2.1.4

Déterminer les valeurs suivantes.

1) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

2) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

3) $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

4) $\sin\left(\dfrac{21\pi}{4}\right)$.

▷ **Solution.**

1) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

3) $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

4) $\sin\left(\dfrac{21\pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi + \pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2.1.5

En utilisant les formules d'addition, déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

▷ **Solution.**

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right).
\end{aligned}$$

Exercice 2.1.6

Calculer $1 + \cos\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{2\pi}{3} + \cos\dfrac{3\pi}{3} + \cos\dfrac{4\pi}{3} + \cos\dfrac{5\pi}{3}$.

▷ **Solution.**

$$\begin{aligned}
&1 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} \\
&= \sum_{k=0}^{5} \mathrm{Re}\left(e^{ik\pi/3}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{5}\left(e^{i\pi/3}\right)^k\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i6\pi/3}}{1-e^{i\pi/3}}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Remarque : L'idée de repasser par les complexes lorsque l'on travaille avec des cos *et* sin *est importante. Il est tout à fait possible de retrouver le résultat en utilisant uniquement les formules trigonométriques, mais c'est plus nettement plus long et compliqué.*

Exercice 2.1.7

Déterminer le cosinus et le sinus de chacun des réels suivants.

1) $a = \dfrac{213\pi}{4}$.

2) $b = \dfrac{2132\pi}{3}$.

3) $c = -\dfrac{1285\pi}{2}$.

4) $d = \dfrac{687\pi}{6}$.

▷ **Solution.**

1) $a = 53\pi + \dfrac{\pi}{4}$ donc

$$\cos(a) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\sin(a) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) $b = 710\pi + \dfrac{2\pi}{3}$ donc

$$\cos(b) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

(le calcul a été fait en 2.1.4. , **3)**) et d'une manière analogue,

$$\sin(b) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) $c = -642\pi - \dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos(c) = 0$ et $\sin(c) = -1$.

4) $d = 114\pi + \dfrac{\pi}{2}$ donc $\cos(d) = 0$ et $\sin(d) = 1$.

Exercice 2.1.8

Calculer $\sin\alpha$ sachant que $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$ et que $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

▷ **Solution.**

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{8+2\sqrt{12}}{16} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Remarquons que $3 < 4$ donc $2 - \sqrt{3} > 0$, donc

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

or $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$ donc $\sin\alpha < 0$. D'où

$$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Remarque : Il faut connaître les intervalles sur lesquels les fonctions cos *et* sin *sont croissantes, décroissantes, positives, négatives.*

Exercice 2.1.9
Simplifier $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos(5\pi-x)+\sin^2(\pi+x)+\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

▷ **Solution.**

$$\begin{aligned}
&\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(5\pi-x)+\sin^2(\pi+x)+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\cos(x)+\cos(\pi-x)+(-\sin(x))^2+(-\cos(x))^2\\
&=\cos(x)-\cos(x)+1\\
&=1.
\end{aligned}$$

Exercice 2.1.10
Simplifier $\cos x+\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

▷ **Solution.**

$$\begin{aligned}
&\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)\\
&=\operatorname{Re}\left(e^{ix}+e^{i(x+2\pi/3)}+e^{i(x+4\pi/3)}\right)\\
&=\operatorname{Re}\left(e^{ix}(1+e^{i2\pi/3}+e^{i4\pi/3})\right)\\
&=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{2}\left(e^{i2\pi/3}\right)^k\right)\\
&=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{i6\pi/3}}{1-e^{i2\pi/3}}\right)\\
&=0.
\end{aligned}$$

Remarque : Même remarque que pour l'exercice 2.1.6.

Exercice 2.1.11
Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{\sin x+|\sin x|}{2}$.

▷ **Solution.**
La fonction sin est positive sur tout intervalle de la forme $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$ où $k\in\mathbf{Z}$ et négative ailleurs. Notons

$$E_+ = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} [2k\pi, 2k\pi+\pi]$$

et $E_- = \mathbf{R}\backslash E_+$, alors

- pour tout $x\in E_+$,
$$f(x)=\frac{\sin x+\sin x}{2}=\sin x.$$
- pour tout $x\in E_-$,
$$f(x)=\frac{\sin x-\sin x}{2}=0.$$
(Ici, $\sin x$ est négatif, tandis que $|\sin x|$ est positif, on a bien
$$|\sin x| = -\sin x.)$$

Donc le graphe de f est celui de sin sur E_+ et une droite d'équation $y=0$ sur E_-.
Remarque : L'idée est à retenir, on peut facilement isoler la partie dîte "positive" d'une fonction. Pour la partie négative, c'est presque pareil, le lecteur attentif pourra trouver une formulaire similaire.

Exercice 2.1.12

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$.

▷ **Solution.**

L'équation est définie sur $\mathbf{R}$. Les racines du polynôme $2X^2 - 5X + 2$ sont $\dfrac{1}{2}$ et 5 donc

$$2X^2 - 5X + 2 = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X - 5)$$

donc soit $x \in \mathbf{R}$,

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \iff 2\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)(\cos(x) - 5) = 0$$

mais cos étant bornée par 1 sur $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & 2\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)(\cos(x) - 5) = 0 \\ \iff & \cos(x) = \frac{1}{2} \\ \iff & x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Remarque : Il est important de savoir rédiger rigoureusement ce type de résolution.

Exercice 2.1.13

Soit x un réel. Développer $\cos(4x)$ en l'exprimant comme un polynôme en $\cos(x)$.

▷ **Solution.**

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= \mathrm{Re}((e^{ix})^4) \\ &= \mathrm{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^4) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{4} \binom{k}{n} i^k \sin(x)^k \cos^{4-k}(x)\right). \end{aligned}$$

Or les termes où k est impair sont imaginaires purs, les autres sont réels, donc

$$\begin{aligned} & \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{4} \binom{k}{n} i^k \sin(x)^k \cos^{4-k}(x)\right) \\ &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) \\ &= \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1 - \cos^2(x)) + (1 - \cos^2(x))^2 \\ &= 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 \end{aligned}$$

Remarque : Il est peut être légèrement plus rapide d'utiliser uniquement la trigonométrie dans ce cas, mais généralement, on préféra faire le calcul à l'aide des complexes, qui est de toute façon à connaître.

2.2 Calculs sur les complexes.

Exercice 2.2.1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) $(3+i)(4-5i)+7-2i$.

2) $\dfrac{-5+3i}{1+i}+\dfrac{3+i}{1-i}$.

3) $\dfrac{3+i}{1+i\sqrt{2}}+\dfrac{3-5i}{2-i}$.

4) $(1+i)^3+(1-i)^3$.

▷ **Solution.**

1) $(3+i)(4-5i)+7-2i = 15+5+7+4i-15i-2i = 24-13i$.

2) $\dfrac{-5+3i}{1+i}+\dfrac{3+i}{1-i} = \dfrac{(-5+3i)(1-i)+(3+i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{12i}{2} = 6i$.

3)

$$\begin{aligned}
\frac{3+i}{1+i\sqrt{2}}+\frac{3-5i}{2-i} &= \frac{(3+i)(1-i\sqrt{2})}{3}+\frac{(3-5i)(2+i)}{5} \\
&= \frac{3+\sqrt{2}+i(1-3\sqrt{2})}{3}+\frac{11-7i}{5} \\
&= \frac{15+5\sqrt{2}+5i(1-\sqrt{2})+33-21i}{15} \\
&= \frac{48+5\sqrt{2}+i(-16-5\sqrt{2})}{15}.
\end{aligned}$$

4) $(1+i)^3+(1-i)^3 = 2i-2-2i-2 = -4$.

Exercice 2.2.2

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

1) $\sqrt{7}-i\sqrt{7}$.

2) $5+5i\sqrt{3}$.

3) $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{i}{4}$.

▷ **Solution.**

1) $\sqrt{7}-i\sqrt{7} = \sqrt{14}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2) $5+5i\sqrt{3} = 10\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

3) $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{i}{4} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$.

3 Factorisation

3.1 Conjugaison de radicaux

Exercice 3.1.2

Rendre entiers les dénominateurs des fractions suivantes.

1) $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

2) $B = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}$.

3) $C = \dfrac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

▷ **Solution.**

1) $A = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

2) $B = \dfrac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}-2} = \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}-1$.

3) $C = \dfrac{6(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{5-2\sqrt{6}+5} = \dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2}$.

Remarque : Méthode à connaître.

Exercice 3.1.3

Simplifier les nombres suivants.

1) $A = \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+3)^2}$.

2) $B = \sqrt{\dfrac{1}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^2}}$.

▷ **Solution.**

1) $A = |\sqrt{3}-3|+\sqrt{3}+3$ et comme $3 \leq 9$, par croissance de la fonction racine sur R_+, $\sqrt{3} \leq 3$ donc

$$|\sqrt{3}-3| = 3-\sqrt{3}$$

d'où $A = 6$.

2) $B = \dfrac{1}{|2-\sqrt{5}|}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$, et comme $4 \leq 5$, par croissance de la fonction racine sur R_+, $2 \leq \sqrt{5}$ donc

$$\frac{1}{|2-\sqrt{5}|} = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

d'où $B = 4$.

Remarque : Attention, $\sqrt{x^2} = |x|$ *et non* x.

Exercice 3.1.4

Soit a et b deux réels non nuls et de même signe. Calculer la valeur de l'expression $\dfrac{a}{x}+\dfrac{x}{b}+2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ pour $x = \sqrt{ab}$.

▷ **Solution.**

- Si a et b sont positifs,

$$\frac{a}{x}+\frac{x}{b}+2\sqrt{\frac{a}{b}}=4\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

- Si a et b sont négatifs,

$$\frac{a}{x}+\frac{x}{b}+2\sqrt{\frac{a}{b}}=-\sqrt{\frac{a^2}{ab}}-\sqrt{\frac{ab}{b^2}}+2\sqrt{\frac{a}{b}}=0.$$

Remarque : Lorsque l'on manipule des racines et des carrés, il fait accorder une attention particulière aux signes des nombres considérés.

Exercice 3.1.5

Calculer $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ pour $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3}{4}}-\sqrt{\dfrac{4}{3}}\right)$.

▷ **Solution.**

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1}$$

et

$$\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{25}{12}-2\right)}=\sqrt{\frac{49}{48}}=\frac{7}{4\sqrt{3}}.$$

Donc

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1=\frac{2\sqrt{3}}{7}\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)+1=\frac{2}{7}\left(\frac{3}{2}-2\right)+1=-\frac{1}{7}+1=\frac{6}{7}.$$

Finalement,

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{7}{6}.$$

3.2 Expressions polynomiales.

Exercice 3.2.1

Factoriser ou simplifier les expressions suivantes.

1) x^2-8. **2)** x^4-9.

▷ **Solution.**

1) $x^2-8=(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})$.

2) $x^4-9=(x^2-3)(x^2+3)=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3)$.

Remarque : On pourrait factoriser le 2. dans $\mathbf{C}$*, mais l'énoncé a plutôt l'air de suggérer de rester dans* $\mathbf{R}$.

Exercice 3.2.2

Développer le plus simplement possible l'expression suivante.

$$\left[x^2+(2+\sqrt{2})x+1+\sqrt{2}\right]\times\left[x^2+(2-\sqrt{2})x+1-\sqrt{2}\right].$$

▷ **Solution.**

$$
\begin{aligned}
&\left[x^2+(2+\sqrt{2})x+1+\sqrt{2}\right]\times\left[x^2+(2-\sqrt{2})x+1-\sqrt{2}\right]\\
&=x^4+4x^3+(2+4-2)x^2+\Big((2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\Big)\,x-1\\
&=x^4+4x^3+4x^2-1.
\end{aligned}
$$

Exercice 3.2.3

Développer le plus simplement possible l'expression suivante.

$$(x^2-1)(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

▷ **Solution.**

$$
\begin{aligned}
&(x^2-1)(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)\\
&=(x^4-1)[(x^2+1)^2-2x^2]\\
&=(x^4-1)(x^4+1)\\
&=x^8-1.
\end{aligned}
$$

Exercice 3.2.7

Factoriser les expressions suivantes sans jamais utiliser de discriminant.

1) $x^4+2x^3-13x^2+10x$.

2) x^3-3x^2+x-3.

3) $x^3-5x^2-22x-16$.

4) x^3-x^2-7x+7.

5) x^4-4.

▷ **Solution.**

1) $x^4+2x^3-13x^2+10x=x(x-1)(x^2+3x-10)=x(x-1)(x-2)(x+5)$.

2) $x^3-3x^2+x-3=(x-3)(x^2+1)$.

3) $x^3-5x^2-22x-16=(x-1)(x^2-6x-16)=(x+1))(x+2)(x-8)$.

4) $x^3-x^2-7x+7=(x-1)(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})$.

5) $x^4-4=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

Remarque : Méthode à connaître, la méthode est de tester si les petites valeurs, telles que 1, 2, -1, -2, sont racines et de factoriser au fur et à mesure. Quand ce n'est pas le cas, bien penser à regarder les "petites" valeurs complexes, telles que i et -i.

Exercice 3.2.8

Résoudre sur **R** les équations suivantes sans jamais écrire de discriminant.

1) $3x^2-7x=0$.

2) $5x^2+11=0$.

3) $5x^2-7=0$.

4) $(x-\sqrt{2})^2=2$.

5) $x^2-2x+3=0$.

▷ **Solution.**

1) $3x^2 - 7x = 0 \iff x(3x-7) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x = \frac{7}{3})$.

2)

$$x \mapsto 5x^2 + 11$$

est strictement positive sur $\mathbf{R}$, l'équation n'a pas de solutions réelles.

3) $5x^2 - 7 = 0 \iff (x = \pm\sqrt{\frac{7}{5}})$.

4) $(x - \sqrt{2})^2 = 2 \iff x - \sqrt{2} = \pm\sqrt{2} \iff (x = 0 \text{ ou } x = 2\sqrt{2})$.

5)

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \iff (x-1)^2 + 2 = 0$$

mais $x \mapsto (x-1)^2 + 2$ est strictement positive sur $\mathbf{R}$ donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

Exercice 3.2.9

Résoudre dans $\mathbf{R}$, en discutant suivant le paramètre $m \in \mathbf{R}$, l'équation

$$(E) : 5x^2 + 2x + m - 3 = 0.$$

▷ **Solution.**

Notons Δ le discriminant de (E),

$$\Delta = 4 - 20(m-3) = 4(1 - 5m + 15) = 4(16 - 5m).$$

- Si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solutions réelles, or

  $$\Delta < 0 \iff 16 - 5m < 0 \iff m > \frac{16}{5}$$

  donc si $m > \frac{16}{5}$, (E) n'a pas de solutions réelles.
- Si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution

  $$r = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$$

  mais

  $$\Delta = 0 \iff m = \frac{16}{5}$$

  donc si $m = \frac{16}{5}$, (E) admet une unique solution

  $$r = -\frac{1}{5}.$$

- Si $\Delta > 0$, ie si $m < \frac{16}{5}$, (E) admet excatement deux solutions réelles,

  $$r_1 = \frac{-1 - \sqrt{16 - 5m}}{5}$$

  et

  $$r_2 = \frac{-1 + \sqrt{16 - 5m}}{5}.$$

Remarque : Ici, m est fixé, ce n'est pas une variable. Assez bon exercice technique, il ne faut pas se perdre dans les lettres.

Exercice 3.2.10

Résoudre dans $\mathbf{R}$, en discutant suivant le paramètre $m \in \mathbf{R}$, l'équation $(E) : (m-3)x^2 - 2mx + m - 1 = 0$.

▷ **Solution.**

Remarquons d'abord que si $m = 3$, alors

$$(E) : -6x + 2 = 0$$

donc si $m = 3$, l'unique solution de (E) est

$$\frac{1}{3}.$$

Maintenant, suppsosons $m \neq 3$ et notons Δ le discriminant de (E),

$$\Delta = 4m^2 - 4(m-3)(m-1) = 16m - 12 = 4(4m-3).$$

- Si $\Delta < 0$ ie si $m < \frac{3}{4}$, (E) n'admet pas de solutions réelles.
- Si $\Delta = 0$ ie si $m = \frac{3}{4}$, alors (E) admet une unique solution

$$r = \frac{2m}{2(m-3)}.$$

- Si $\Delta > 0$ ie si $m > \frac{3}{4}$ et $m \neq 3$, alors (E) admet exactement deux solution, qui sont

$$r_1 = \frac{m - \sqrt{4m-3}}{m-3}$$

et

$$r_2 = \frac{m + \sqrt{4m-3}}{m-3}.$$

Remarque : Ne pas oublier de traiter à part le cas $m = 3$*, mais en écrivant les racines dans le cas où* $\Delta > 0$*, on s'apperçoit naturellement du problème, car si* $m = 3$*, on divise par* 0.

3.3 Tableaux de signes.

Exercice 3.3.5

Dresser le tableau de signes des expressions suivantes.

1) $x^3 - x^2 - 5x + 5$.

2) $x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 6x - 7$.

3) $\ln(x)^2 - \ln(x) - 6$.

▷ **Solution.**

1) Remarquons que

$$X^3 - X^2 - 5X + 5 = (X-1)(X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5}).$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		1		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - \sqrt{5}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + \sqrt{5}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^3 - x^2 - 5x + 5$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2) Notons
$$P = X^4 - 6X^3 - 6X^2 - 6X - 7 = 0.$$
Remarquons que -1 est racine de P, on effectue la division euclidienne de P par $X - (-1) = X + 1$ et on trouve que
$$P = (X + 1)(X^3 - 7X^2 + X - 7).$$
Ensuite, on cherche des racines de $X^3 - 7X^2 + X - 7$ dans les petites valeurs entières, mais on se rend compte qu'il n'y en a pas... On va donc chercher des racines évidentes dans $\mathbf{C}$, et là on trouve que i et $-i$ sont racines, on effectue la division euclidienne par $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$ et on trouve finalement que
$$P = (X + 1)(X - i)(X + i)(X - 7) = (X + 1)(X - 7)(X^2 + 1).$$

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 7$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2 + 1$		$+$		$+$		$+$	
$x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 6x - 7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) Remarquons que
$$\ln(x)^2 - \ln(x) - 6 = (\ln(x) - 3)(\ln(x) + 2).$$
ln est bijective sur $\mathbf{R}_+^*$ donc 3 et -2 ont chacun un unique antécédent par ln, à savoir respectivement e^3 et e^{-2}.

x	0		e^{-2}		e^3		$+\infty$
$\ln(x) - 3$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x) + 2$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x)^2 - \ln(x) - 6$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Remarque : Pour dresser le tableau de signes d'expressions polynomiales, il faut les factoriser, donc trouver leurs racines. En effet, si $\lambda \in \mathbf{R}$ est racine d'un polynôme P, alors $X - \lambda$ divise P, ie il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \lambda)Q$.

3.4 Logarithme et exponentielle.

Exercice 3.4.3

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\ln[(x - 4)(3x - 5)] = \ln(10)$.

▷ **Solution.**
La fonction ln étant définie uniquement sur $\mathbf{R}_+^*$, le tableau de signe

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		4		$+\infty$
$x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x - 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-4)(3x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

montre que l'équation est définie sur

$$E = \left]-\infty, \frac{5}{3}\right[\bigcup \left]4, +\infty\right[.$$

La fonction ln étant bijective sur $\mathbf{R}_+^*$, soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} \ln[(x-4)(3x-5)] = \ln(10) &\iff (x-4)(3x-5) = 10 \\ &\iff 3x^2 - 17x + 10 = 0 \\ &\iff 3(x-5)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0 \\ &\iff \left(x = 5 \text{ ou } x = \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

donc l'équation admet exactement deux solutions qui sont 5 et $\frac{2}{3}$.

Exercice 3.4.4

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\ln(x-4) + \ln(3x-5) = \ln(10)$.

▷ **Solution.**

L'équation est définie sur $E =]4, +\infty[$ et soit $x \in E$,

$$\ln(x-4) + \ln(3x-5) = \ln(10) \iff \ln[(x-4)(3x-5)] = \ln(10)$$

Par le même calcul que dans l'exercice 3.4.3.,

$$\ln(x-4) + \ln(3x-5) = \ln(10) \iff \left(x = 5 \text{ ou } x = \frac{2}{3}\right),$$

or $\frac{2}{3} \notin E$ donc l'équation admet 5 pour unique solution.

Remarque : Il faut faire attention à rester dans le domaine de définition des objets étudiés.

Exercice 3.4.5

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96)$.

▷ **Solution.**

L'équation est définie sur $E =]-1, +\infty[$. La fonction ln étant bijective sur $\mathbf{R}_+^*$, soit $x \in E$,

$$\begin{aligned} \ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96) &\iff \ln[(x+1)(x+5)] = \ln(96) \\ &\iff (x+1)(x+5) = 96 \\ &\iff x^2 + 6x - 91 = 0 \\ &\iff (x-7)(x+13) = 0 \\ &\iff (x = -13 \text{ ou } x = 7) \end{aligned}$$

or $-13 \notin E$ donc l'équation admet 7 pour unique solution.

Exercice 3.4.6

Résoudre dans $\mathbf{R}^2$ le système
$$\begin{cases} x+y^2 & = 29 \\ \ln x + 2\ln y & = 2\ln(10) \end{cases}.$$

▷ **Solution.**

Le système est défini sur $E = (\mathbf{R}_+^*)^2$. Soit $(x,y) \in E$, ln étant bijective sur $\mathbf{R}_+^*$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+y^2 & = 29 \\ \ln x + 2\ln y & = 2\ln(10) \end{cases} &\iff \begin{cases} x+y^2 & = 29 \\ \ln(xy^2) & = \ln(100) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+y^2 & = 29 \\ xy^2 & = 100 \end{cases} \\ &\iff X^2+29X+100 = (X-x)(X-y^2). \end{aligned}$$

Or les racines de $X^2+29X+100$ sont 4 et 25, donc

$$\begin{aligned} X^2+29X+100 = (X-x)(X-y^2) &\iff (x,y^2) \in \{(4,25),(25,4)\} \\ &\iff (x,y) \in \{(2,25),(-2,25),(4,5),(4,-5)\} \end{aligned}$$

Comme $x, y > 0$,
$$(x,y) \in \{(2,25),(-2,25),(4,5),(4,-5)\} \iff (x,y) \in \{(2,25),(4,5)\}.$$

Les solutions du système sont donc $(2,25)$ et $(4,5)$. *Remarque : Il est très possible de résoudre le système par substitution, ce qui revient peu ou prou à la même chose. Cet exemple illustre encore une fois l'importance des domaines de définition, si on ne fait pas attention, on se retrouve avec deux fois trop de solutions.*

Exercice 3.4.7

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0$.

▷ **Solution.**

L'équation est bien définie sur $\mathbf{R}$ tout entier, soit $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} e^{2x-1} - \sqrt{e^{2x+2}} - 2e^3 = 0 &\iff e^{2x-1} - e^{x+1} - 2e^3 = 0 \\ &\iff e^{-1}(e^x)^2 - e^1 e^x - 2e^3 = 0 \end{aligned}$$

Notons
$$P = e^{-1}X^2 - e^1 X - 2e^3$$
alors P a pour racines $-e^2$ et $2e^2$ d'où

$$e^{-1}(e^x)^2 - e^1e^x - 2e^3 = 0 \iff e^x \in \{-e^2, 2e^2\}.$$

Comme exp est strictement positive et bijective sur $\mathbf{R}$, d'après ce qui précède, l'unique solution de l'équation est $\ln(2e^2) = \ln 2 + 2$.
Remarque : Le polynôme en exp *n'est pas évident à voir, il faut d'abord se débarrasser de la racine et ensuite penser à voir e^{2x} comme $(e^x)^2$.*

Exercice 3.4.8

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $e^x + 10e^{-2x} = 4 + 7e^{-x}$.

▷ **Solution.**

L'équation est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier, soit $x \in \mathbf{R}$, étant donné que exp est strictement positive sur $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} e^x + 10e^{-2x} = 4 + 7e^{-x} &\iff e^{3x} + 10 = 4e^{2x} + 7e^x \\ &\iff (e^x)^3 - 4(e^x)^2 - 7e^x + 10 = 0 \end{aligned}$$

Notons

$$P = X^3 - 4X^2 - 7X + 10$$

et remarquons que -2, 1 et 5 sont les racines de P, donc

$$(e^x)^3 - 4(e^x)^2 - 7e^x + 10 = 0 \iff e^x \in \{1, -2, 5\}$$

exp étant strictement positive et bijective sur $\mathbf{R}$, les seules solutions de l'équation sont $\ln(1) = 0$ et $\ln(5)$.

Exercice 3.4.9

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation $e^{2x} - e^{x+2} - e^{2-x} + 1 < 0$.

▷ **Solution.**

L'équation est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier, soit $x \in \mathbf{R}$, et comme exp est stritement positive sur $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} e^{2x} - e^{x+2} - e^{2-x} + 1 < 0 &\iff e^{3x} - e^2 e^{2x} - e^2 + e^x < 0 \\ &\iff (e^x)^3 - e^2(e^x)^2 + e^x - e^2 < 0 \end{aligned}$$

Notons

$$P = X^3 - e^2 X^2 + X - e^2.$$

Difficile de trouver des racines évidentes dans $\mathbf{R}$ mais un rapide coup d'oeil du côté de $\mathbf{C}$ montre que i et $-i$ sont racines de P, donc

$$P = (X - i)(X + i)Q = (X^2 + 1)(X - e^2).$$

$x \mapsto x^2 + 1$ étant positive sur $\mathbf{R}$, $x \mapsto P(x)$ est du signe de $x \mapsto x - e^2$ donc la fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} (e^x)^3 - e^2(e^x)^2 + e^x - e^2 < 0 &\iff e^x - e^2 < 0 \\ &\iff x < 2 \end{aligned}$$

Donc l'inéquation est vérifiée sur $]-\infty, 2[$.

4 Autour de la monotonie.

4.1 Définition et utilisation naive.

Exercice 4.1.3

Déterminer les ensembles de définition puis les sens de variations des fonctions suivantes (ou dire si elles ne sont pas monotones).

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$.

2) $g : x \mapsto \sqrt{1+x^5}$.

3) $h : x \mapsto e^{-2x^3+5}$.

4) $\varphi : x \mapsto (\sqrt{x+2}+1)^2$.

5) $\chi : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

6) $\psi : x \mapsto \ln|x|$.

▷ **Solution.**

1) Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$1+x^3 = 0 \iff x = -1$$

donc f est définie sur $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$. De plus,

$$x \mapsto 1+x^3$$

est croissante et ne s'annule pas sur $\mathbf{R}^*$ car admet $x \mapsto 3x^2$, fonction positive sur $\mathbf{R}$, pour fonction dérivée. La fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est décroissante sur $\mathbf{R}^*$ donc par composition, f est décroissante sur $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$.

2) Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$1+x^5 \geq 0 \iff x \geq -1$$

donc g est définie sur $[-1,+\infty[$. De plus,

$$x \mapsto 1+x^5$$

est croissante et positive sur $[-1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant aussi croissante sur $\mathbf{R}_+$, par composition g est croissante sur $[-1,+\infty[$.

3) h est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. De plus,

$$x \mapsto -2x^3+5$$

est décroissante sur $\mathbf{R}$, comme exp est croissante sur $\mathbf{R}$, par composition h est croissante sur R.

4) φ est définie sur $[-2,+\infty[$, comme

$$x \mapsto \sqrt{x+2}+1$$

est croissante et positive sur $[-2,+\infty[$ et $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbf{R}_+$, alors par composition φ est croissante sur $[-2,+\infty[$.

5) exp étant strictement positive sur $\mathbf{R}$, χ est définie sur $\mathbf{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\chi(x) = \frac{1}{e^{-x}+1}$$

et comme $x \mapsto e^{-x}+1$ est décroissante et ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$ et que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}^*$, par composition χ est croissante sur $\mathbf{R}$.

6) Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$|x| > 0 \iff x \neq 0$$

donc ψ est définie sur $\mathbf{R}^*$. De plus, $x \mapsto |x|$ est décroissante et strictement positive sur $\mathbf{R}_-^*$ et croissante et strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$ et ln est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$ donc par composition ψ est décroissante sur $\mathbf{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 4.1.8

Résoudre les inéquations suivante.

1) $\dfrac{2x-1}{4} < \dfrac{4-3x}{5} - \dfrac{3-x}{10}$.

2) $\dfrac{x^2-4x+2}{3-2x} \leq 1-x$.

3) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} \leq \dfrac{3}{x-3}$.

▷ **Solution.**

1) L'inéquation est définie sur $\mathbf{R}$, soit $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{4} < \frac{4-3x}{5} - \frac{3-x}{10} &\iff 5(2x-1) < 4(4-3x) - 2(3-x)\\ &\iff 20x < 15\\ &\iff x < \frac{3}{4}\end{aligned}$$

2) L'inéquation est définie sur $\mathbf{R}\backslash\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$, soit $x \in \mathbf{R}\backslash\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4x+2}{3-2x} \leq 1-x &\iff \frac{x^2-4x+2-(1-x)(3-2x)}{3-2x} \leq 0\\ &\iff \frac{x^2-4x+2-2x^2+5x-3}{3-2x} \leq 0\\ &\iff \frac{-x^2+x-1}{3-2x} \leq 0.\end{aligned}$$

L'équation

$$-x^2+x-1=0$$

ayant pour discriminant $-3<0$,

$$x \mapsto -x^2+x-1$$

est négative sur $\mathbf{R}$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-x^2+x-1$		$-$		$-$	
$3-2x$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{-x^2+x-1}{3-2x}$		$-$	$\Vert$	$+$	

Donc l'inéquation est vérifiée sur $\left]-\infty, \dfrac{3}{2}\right[$.

3) L'inéquation est définie sur $\mathbf{R}\backslash\{1,2,3\}$. Soit $x \in \mathbf{R}\backslash\{1,2,3\}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \leq \frac{3}{x-3} &\iff \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} \leq \frac{3}{x-3}\\ &\iff \frac{(3x-4)(x-3)-3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \leq 0\\ &\iff \frac{-4x+9}{(x-1)(x-2)(x-3)} \leq 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		2		$\frac{9}{4}$		3		$+\infty$
$-4x+9$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-4x+9}{(x-1)(x-2)(x-3)}$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Donc l'inéquation est vérifiée sur

$$]-\infty,1[\,\cup\left]2,\frac{9}{4}\right]\cup\,]3,+\infty[.$$

Exercice 4.1.9

Résoudre la double inéquation $-1<\dfrac{2-3x}{x+3}<1$.

▷ **Solution.**

L'inéquation est définie sur $\mathbf{R}\backslash\{-3\}$, soit $x\in\mathbf{R}\backslash\{-3\}$,

$$-1<\frac{2-3x}{x+3}\iff 0<\frac{5-2x}{x+3}$$

x	$-\infty$		-3		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{5-2x}{x+3}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc

$$-1<\frac{2-3x}{x+3}\iff x\in\left]-3,\frac{5}{2}\right[.$$

De même,

$$\frac{2-3x}{x+3}<1\iff x\in\left]-3,-\frac{1}{4}\right[$$

donc l'inéquation double est vérifiée sur $\left]-3,-\dfrac{1}{4}\right[$.

Exercice 4.1.10

Résoudre suivant le paramètre $m\in\mathbf{R}\backslash\{1\}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{x-m}{m-1}>2-x.$$

▷ **Solution.**

Pour tout $m \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$, l'inéquation est définie sur $\mathbf{R}$. Soit $m \in \mathbf{R}\backslash\{1\}$,

- Si $m = 0$,
$$\frac{x-m}{m-1} > 2-x \iff 0 > 2.$$
L'équation n'a pas de solutions.
- Si $m > -1$ et $m \neq 0$,
$$\begin{aligned}\frac{x-m}{m-1} > 2-x &\iff x-m > 2m-2-(m-1)x\\ &\iff mx > 3m-2\\ &\iff x > 3-\frac{2}{m}\end{aligned}$$
donc l'inéquation est vérifiée sur $\left]3-\frac{2}{m},+\infty\right[$.
- Si $m < -1$, le calcul est le même mais les inégalités sont renversées, donc
$$\frac{x-m}{m-1} > 2-x \iff x < 3-\frac{2}{m}.$$
L'inéquation est vérifiée sur $\left]-\infty,3-\frac{2}{m}\right[$.

Remarque : Bien penser à distinguer les cas, pour ne pas diviser par 0.

Exercice 4.1.13

Comparer les paires de nombres suivants.

1) $3+\sqrt{7}$ et $\sqrt{29}$.

2) $\dfrac{5+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ et $\sqrt{5}$.

3) $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ et $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

4) e^{-1} et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5) $\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\dfrac{3}{2}$.

▷ **Solution.**

1) $(3+\sqrt{7})^2 = 16+6\sqrt{7}$ or $\left(\frac{5}{2}\right)^2 < \sqrt{7}^2$ donc par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$,
$$\frac{5}{2} < \sqrt{7}$$
d'où $(3+\sqrt{7})^2 > 31$ donc par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$,
$$3+\sqrt{7} > \sqrt{29}.$$

2)
$$\frac{5+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} - \sqrt{5} = \frac{5+\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{15}}{1+\sqrt{3}}$$
or $(5+\sqrt{2})^2 = 29+10\sqrt{2}$ mais $\sqrt{2}^2 > \left(\frac{11}{10}\right)^2$ donc par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$ $\sqrt{2} > \frac{11}{10}$ donc
$$(5+\sqrt{2})^2 > 40.$$
De plus, $(\sqrt{5}+\sqrt{15})^2 = 20+10\sqrt{3}$ et $\sqrt{3} < 2$ donc
$$(\sqrt{5}+\sqrt{15})^2 < 40$$
et par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$, $\sqrt{5}+\sqrt{15} < 5+\sqrt{2}$, d'où
$$\frac{5+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} > \sqrt{5}.$$

3) $(\sqrt{2}+\sqrt{11})^2 = 13+2\sqrt{22}$ mais par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$, $\sqrt{22}<5$ donc

$$(\sqrt{2}+\sqrt{11})^2 < 23.$$

De plus, $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2 = 12+2\sqrt{35}$ et par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$, $\sqrt{35} > \frac{11}{2}$ donc

$$(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2 > 23.$$

Par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$,

$$\sqrt{2}+\sqrt{11} < \sqrt{5}+\sqrt{7}.$$

4) $2<e$ donc $e^{-1} < \frac{1}{2}$ mais par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$, $\sqrt{3}<2$ donc par passage à l'inverse, $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$ donc

$$e^{-1} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5) $\pi > 3$ donc par croissance stricte de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$,

$$\frac{\pi^2}{6} > \frac{3}{2}.$$

Remarque : Il est important de pouvoir établir rapidement une comparaison entre deux nombres.

4.2 Lien avec le signe de la dérivée.

Remarque : Pas d'exercice, on notera en revanche que le signe de la dérivée implique un sens de variation, mais que la réciproque est fausse. Par exemple, $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0 mais est tout de même strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

4.3 Formule de dérivation.

Exercice 4.3.2

Dériver les expressions suivantes (les autres variables que la variable de dérivation sont supposées être fixées).

1) $3a^2b+5b$ par rapport à b.

2) $\sin^2(ab)+a\cos(b)$ par rapport à a.

3) $\exp(2xy)+\ln(x+y)$ par rapport à y.

4) $5t^2\exp(t+x)-2tx$ par rapport à t.

▷ **Solution.**

1) $\mathrm{d}b(3a^2b+5b) = 3a^2+5$.

2) $\mathrm{d}a(\sin^2(ab)+a\cos(b)) = 2b\cos(ab)\sin(ab)+\cos(b) = b\sin(2ab)+\cos(b)$.

3) $\mathrm{d}y(\exp(2xy)+\ln(x+y)) = 2x\exp(2xy)+\dfrac{1}{x+y}$.

4) $\mathrm{d}t(5t^2\exp(t+x)-2tx) = (10t+5t^2)\exp(t+x)-2x$.

Exercice 4.3.5

À partir des règles précédentes, retrouver la règle permettant de dériver le quotient $\dfrac{f}{g}$.

▷ **Solution.**

Soit I un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, soit deux fonctions $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \times \frac{1}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Remarque : Utile de savoir retrouver la formule si on a un oubli, mais en pratique, mieux vaut l'utiliser directement et ne pas repasser par la dérivation d'un produit.

Exercice 4.3.7

Dériver les expressions suivantes par rapport la variable x.

1) $\dfrac{\sin^3(x)\ln(x)}{1+2e^x}$.

2) $\exp(3\sin(x) + \sqrt{x})$.

3) $\sqrt{1 + \dfrac{3+2x}{1+e^x}}$.

4) $\ln(\cos(e^x))$.

▷ **Solution.**

1) Notons

$$f : x \mapsto \frac{\sin^3(x)\ln(x)}{1+2e^x}.$$

$x \mapsto \sin^3(x)$ et ln sont définies et dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$ et $x \mapsto 1+2e^x$ est définie, dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbf{R}_+^*$ donc par opérations, f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(3\cos(x)\sin^2(x)\ln(x) + \dfrac{\sin^3(x)}{x}\right)(1+2e^x) - 2\sin^3(x)\ln(x)e^x}{(1+2e^x)^2} \\ &= \sin^2(x)\frac{\left(3\cos(x)\ln(x) + \dfrac{\sin(x)}{x}\right)(1+2e^x) - 2\sin(x)\ln(x)e^x}{(1+2e^x)^2}. \end{aligned}$$

2) Notons

$$g : x \mapsto \exp(3\sin(x) + \sqrt{x}).$$

Les fonction sin, exp et carré sont définies sur $\mathbf{R}_+$ et dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$ donc par opérations, g est définie sur $\mathbf{R}_+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$g'(x) = \left(3\cos(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\exp(3\sin(x) + \sqrt{x}).$$

3) Notons

$$h : x \mapsto \sqrt{1 + \frac{3+2x}{1+e^x}}.$$

Étudions d'abord le domaine de définition de h. La fonction racine est définie sur $\mathbf{R}_+$ et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. Soit $x \in \mathbf{R}$, comme la fonction exp est strictement positive sur $\mathbf{R}$,

$$1 + \frac{3+2x}{1+e^x} \geq 0 \iff 1 + e^x + 3 + 2x \geq 0 \iff e^x + 2x + 4 \geq 0.$$

Notons

$$\alpha : x \mapsto e^x + 2x + 4.$$

Par opérations, α est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Comme

$$\alpha(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad \alpha(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

d'après le thérorème des valeurs intérmédiaires, il existe un unique $c \in \mathbf{R}$ tel que

$$\alpha(c) = 0.$$

De plus, pour tout $x \in]-\infty, c[$, $\alpha(x) < 0$ et pour tout $x \in]c, +\infty[$, $\alpha(x) > 0$. Donc h est définie sur $[c, +\infty[$ et dérivable sur $]c, +\infty[$ et pour tout $x \in]c, +\infty[$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\dfrac{2(1+e^x) - (3+2x)e^x}{(1+e^x)^2}}{2\sqrt{1 + \dfrac{3+2x}{1+e^x}}} \\ &= \frac{2 + 2e^x - 3e^x - 2xe^x}{2(1+e^x)^2\sqrt{\dfrac{e^x + 2x + 4}{1+e^x}}} \\ &= \frac{-(2x+1)e^x + 2}{2(1+e^x)^{3/2}\sqrt{e^x + 2x + 4}}. \end{aligned}$$

4) Notons
$$\psi : x \mapsto \ln(\cos(e^x)).$$
Établissons le domaines de définition de ψ. ln est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et cos est strictement positive sur tout intervalle de la forme
$$\left]2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$$
où $k \in \mathbf{Z}$. Soit $x \in \mathbf{R}$, sachant que exp est strictement positive sur $\mathbf{R}$,

$$\cos(e^x) > 0 \iff e^x \in \underbrace{\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\bigcup \left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} \left]2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right[\right)}_{= \left(\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left]2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right[\right) \cap \mathbf{R}_+^*}.$$

Mais ln est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, donc

$$\begin{aligned} & e^x \in \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} \left]2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right[\\ \iff & x \in \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} \left]\ln\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right), \ln\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right[\end{aligned}$$

et
$$e^x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right[.$$
Par opérations ψ est définie et dérivable sur

$$E = \left]-\infty, \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right[\bigcup \left(\bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} \left]\ln\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right), \ln\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right[\right)$$

et pour tout $x \in E$,
$$\psi'(x) = \frac{-e^x \sin(e^x)}{\cos(e^x)} = -e^x \tan(e^x).$$
Remarque : Je ne suis pas certain que la recherche des domaines de définition et de dérivabilité était demandée, cela rajoutant une difficulté technique considérable pour quelqu'un ne s'étant jamais préoccupé de ce genre de choses, néanmoins il est toujours important de savoir dans quels ensembles on travaille.

Exercice 4.3.9

Déterminer l'existence et la valeur de chacune des limites suivantes lorsque x tend vers 0.

1) $\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}$.

2) $\dfrac{e^{2x} - 1}{\sqrt{x}}$.

3) $\dfrac{\sin^3(x + \sqrt{x})}{x\sqrt{x}}$.

▷ **Solution.**

1) Par taux d'accroissement,
$$\frac{\ln(1+3x)}{3x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

2) Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,
$$\frac{e^{2x}-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\frac{e^{2x}-1}{x}$$
et par taux d'accroissement,
$$\frac{e^{2x}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$
Par opérations,
$$\frac{e^{2x}-1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0.$$

3) Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,
$$\frac{\sin^3(x+\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} = \frac{(x+\sqrt{x})^3}{x\sqrt{x}}\left(\frac{\sin(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\right)^3.$$
Par taux d'accroissement,
$$\frac{\sin(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$
et
$$\frac{(x+\sqrt{x})^3}{x\sqrt{x}} = \frac{x^3+x^{3/2}+3x^2\sqrt{x}+3x\sqrt{x}^2}{x\sqrt{x}} = x\sqrt{x}+1+3x+3\sqrt{x}$$
donc $\dfrac{(x+\sqrt{x})^3}{x\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et alors
$$\frac{\sin^3(x+\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Remarque : L'objectif est de se ramener à des limites connues, souvent des taux d'accroissement. C'est pénible, mais tant que les développements limités ne sont pas connus, c'est la seule méthode. C'est aussi certaines fois la plus rapide.

4.4 Inégalités classiques.

Exercice 4.4.1

Montrer que pour tout $x > -1$,

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Quand y a-t-il égalité ? Représenter graphiquement cette inéquation en faisant apparaître une tangente à la courbe de $x \mapsto \ln(1+x)$.

▷ **Solution.**
Soit

$$f : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1.$$

De plus, si $x > -1$,

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{-x}{1+x} \geq 0 \iff x \leq 0.$$

D'où le tableau de variations suivant.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

f est donc négative sur $]-1,+\infty[$ donc pour tout $x > 1$,

$$\ln(x+1) \leq x.$$

De plus, f étant strictement croissante et décroissante sur respectivement $]-1,0]$ et $]0,+\infty[$, par théorème des valeurs intermédiaires, il y a égalité en 0 uniquement. Sur la représentation graphique, l'important est de montrer que la tangente à la courbe représentative de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 est la droite d'équation $y = x$, donc la courbe représentative de la fonction identité, on retrouve graphiquement l'inégalité.
Remarque : Comme dit dans le titre, inégalité très classique.

Exercice 4.4.2

Montrer que pour tout réel x,

$$e^x \geq 1 + x.$$

Quand y a-t-il égalité ? Représenter graphiquement cette inéquation en faisant apparaître une tangente à la courbe de $x \mapsto e^x$.

▷ **Solution.**
Soit

$$f : x \mapsto e^x - x - 1$$

définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Cela conduit au tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

f est donc positive sur $\mathbf{R}$ donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$e^x \geq x + 1.$$

De plus, f étant strictement décroissante et strictement croissante sur respectivement $\mathbf{R}_-$ et $\mathbf{R}_+$, par théorème des valeurs intermédiaires l'égalité a lieu en 0 seulement. Pour la représentation graphique, l'important est de remarquer que la tangente en 0 à la courbe représentative de $x \mapsto e^x$ est la droite d'équation $y = x+1$ donc la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x + 1$, on retrouve l'inégalité graphiquement.

Exercice 4.4.3

Déterminer le domaine de validité de l'inéquation suivante : $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

▷ **Solution.**
Soit

$$f : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$$

définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = e^x - x - 1$$

qui est une quantité strictement positive sur $\mathbf{R}^*$ d'après l'exercice 4.4.2., donc f est strictement croissante sur $\mathbf{R}^*$. Comme $f(0) = 0$, f est strictement négative sur $\mathbf{R}_-^*$ et positive sur $\mathbf{R}_+$ donc l'inégalité est vérifiée sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 4.4.4

Généraliser les deux exercices précédents.

▷ **Solution.**
Notons pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$(H_n) : \text{Pour tout } x \in \mathbf{R}_+ \;,\; e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \text{ et l'égalité est vérifiée en 0 seulement.}$$

- Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

  $$e^x \geq 1$$

  et

  $$e^x = 1 \iff x = 0$$

  donc (H_0) est vraie.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que (H_n) soit vraie. Notons

  $$f : x \mapsto e^x \geq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}$$

  définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

  $$f'(x) = e^x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

donc par hypothèse de récurrence, f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Comme $f(0) = 0$, f est positive sur $\mathbf{R}_+$ et

$$f(x) = 0 \iff x = 0$$

donc (H_{n+1}) est vraie.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

et l'égalité est vérifiée en 0 seulement.

Remarque : Au vu des deux exercices précédents, on serait tenté de poursuivre en ajoutant $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^4}{4}$, *etc... Mais en essayant d'appliquer le même raisonnement, ie la dérivation et l'utilisation de l'hypothèse de récurrence, on constante rapidement que cela ne fonctionne pas, la dérivation ne donnant pas l'hypothèse de récurrence. En essayant de bricoler avec les cas* $n = 3$ *et* $n = 4$ *on aboutit normalement à la bonne formule.*

5 L'analyse, c'est l'encadrement.

5.1 Valeur absolue.

Exercice 5.1.3

Montrer les deux propriétés suivantes.

1) Pour tout réel x, on a $|x| = \sqrt{x^2}$.

2) Pour tout réel x et tout réel a, on a l'équivalence suivante :

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a.$$

▷ **Solution.**

1) Soit $x \in \mathbf{R}$,

- Si $x \geq 0$,
$$\sqrt{x^2} = x.$$
- Si $x \leq 0$,
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2}$$
et $-x \geq 0$ donc $\sqrt{(-x)^2} = -x$, d'où
$$\sqrt{x^2} = -x.$$

Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

2) Soit $x, a \in \mathbf{R}$.

- Si $|x| \leq a$, si $x \leq 0$, alors $|x| = x$ donc $x \leq a$ et si $x \geq 0$, alors $|x| = -x$ donc $x \geq -a$ d'où
$$-a \leq x \leq a.$$
- Si $-a \leq x \leq a$, alors $a \geq -x \geq -a$ donc
$$|x| \leq a.$$

Exercice 5.1.5

Simplifier l'expression $|x+1| - |x-1|$ suivant différents intervalles.

▷ **Solution.**

Soit $x \in \mathbf{R}$.

- Si $x \leq -1$,
$$|x+1| - |x-1| = -x - 1 - (-x + 1) = -2.$$
- Si $x \in [-1, 1]$,
$$|x+1| - |x-1| = x + 1 - (-x - 1) = 2x.$$
- Si $x \geq 1$,
$$|x+1| - |x-1| = x + 1 - (x - 1) = 2.$$

Exercice 5.1.6

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $4x^2 + |5x| = 0$.

▷ **Solution.**

Pour tout $x \in \mathbf{R}*$, $4x^2 + |5x| > 0$ (la somme de deux termes strictement positifs est positive) donc l'unique solution réelle de l'équation est 0.

Exercice 5.1.7

Résoudre dans **R** l'équation $x^2 - 3x - 15 = |4x - 5|$.

▷ **Solution.**

Notons (E) cette équation.

- Sur $\left]-\infty, \frac{5}{4}\right]$,
$$(E) \iff x^2 + x - 20 = 0.$$
Les solutions sont 4 et -5, mais comme $4 > \frac{5}{4}$, l'unique solution de l'équation sur $\left]-\infty, \frac{5}{4}\right]$ est -5.
- Sur $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$,
$$(E) \iff x^2 - 7x - 10 = 0.$$
Les solutions sont $\frac{7 \pm \sqrt{89}}{2}$, mais comme $7 = \sqrt{49} < \sqrt{89}$, $\frac{7-\sqrt{89}}{2} < 0$ donc l'unique solution de cette équation sur $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[$ est $\frac{7+\sqrt{89}}{2}$.

Les solutions de (E) sont donc -5 et $\frac{7+\sqrt{89}}{2}$.

Exercice 5.1.8

Résoudre dans **R** l'inéquation $\left|x - \frac{5}{4}\right| < \frac{9}{2}$.

▷ **Solution.**

$$\left|x - \frac{5}{4}\right| < \frac{9}{2} \iff -\frac{9}{2} < x - \frac{5}{4} < \frac{9}{2} \iff -\frac{13}{4} < x < \frac{23}{2}.$$

Exercice 5.1.9

Résoudre dans **R** l'inéquation $|x - 2| \geq 7$.

▷ **Solution.**

$$|x-2| \geq 7 \iff \begin{cases} x - 2 & \geq 7 \\ -x + 2 & \geq 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x & \geq 9 \\ -5 & \geq x \end{cases}$$

Donc l'inéquation est vérifiée sur
$$]-\infty, -5] \cup [9, +\infty[.$$

Exercice 5.1.10

Tracer la courbe de la fonction f définie sur **R** par
$$f : x \mapsto -1 + |x+1| - 2|x| + |x-1|$$

▷ **Solution.**

f est définie sur **R**, soit $x \in \mathbf{R}$,

- Si $x \leq -1$,
$$f(x) = -1 + (-(x+1)) - 2(-x) + (-(x-1)) = -1.$$

- Si $-1 \leq x \leq 0$,
$$f(x) = -1 + (x+1) - 2(-x) + (-(x-1)) = 2x + 1.$$
- Si $0 \leq x \leq 1$,
$$f(x) = -1 + (x+1) - 2x + (-(x-1)) = -2x + 1.$$
- Si $x \geq 1$,
$$f(x) = -1 + (x+1) - 2x + (x-1) = -1.$$

Exercice 5.1.11

Tracer la courbe de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par
$$f : x \mapsto |x-1| - 2\big||x| - 2\big|$$

▷ **Solution.**

f est définie sur $\mathbf{R}$, soit $x \in \mathbf{R}$,

- Si $x \leq -2$,
$$f(x) = -(x-1) - 2((-x) - 2) = x + 5.$$
- Si $-2 \leq x \leq 0$,
$$f(x) = -(x-1) - 2(-((-x) - 2)) = -3x - 3.$$
- Si $0 \leq x \leq 1$,
$$f(x) = -(x-1) - 2(-(x-2)) = x - 3.$$
- Si $1 \leq x \leq 2$,
$$f(x) = (x-1) - 2(-(x-2)) = 3x - 5.$$
- Si $x \geq 2$,
$$f(x) = (x-1) - 2(x-2) = -x + 3.$$

5.2 Limites.

Exercice 5.2.5

Déterminer les limites des expressions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

1) $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 1}{-3x^2 + 2}$.

2) $\dfrac{5x^4 + 3x + 1}{8x^7 + 3x^2 - 4}$.

3) $\dfrac{5x^2 + 3 + \dfrac{1}{2x}}{8x^3 + 3x - \dfrac{2}{x^2}}$.

▷ **Solution.**

1) $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 1}{-3x^2 + 2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\dfrac{1}{3}$.

2) $\dfrac{5x^4 + 3x + 1}{8x^7 + 3x^2 - 4} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

3) $\dfrac{5x^2 + 3 + \dfrac{1}{2x}}{8x^3 + 3x - \dfrac{2}{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Exercice 5.2.7

Déterminer les limites des expressions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

1) $\dfrac{5x^2 - 2 + \ln^3(x)}{3x^2 + \ln(x)}$.

2) $\dfrac{e^{3x} + e^x - x}{5x^4 + x + 1}$.

3) $\dfrac{e^x + x + e^{-x}}{3x + 2e^{-x}}$.

4) $\dfrac{e^{2x} + 3x + \ln^4(x)}{(e^x)^2 - \ln(x)}$.

▷ **Solution.**

Avant de commencer, généralisons les croissances comparées du logarithme : pour tout $(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$,

$$\frac{\ln^a(x)}{x^b} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Démonstration :

- Montrons d'abord que pour tout $c \in \mathbf{R}_+^*$,
$$\frac{\ln(x)}{x^c} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
Soit $c > 0$, alors pour tout $x > 1$,
$$0 \leq \ln(x^{c/2}) \leq x^{c/2}$$
donc
$$0 \leq x^{-c/2}\ln(x) \leq \frac{2}{c}$$
et $x^{-c/2}$ étant strictement positif,
$$0 \leq x^{-c}\ln(x) \leq \frac{2}{c}x^{-c/2}$$
Comme $c > 0$, par théorème d'encadrement,
$$x^{-c}\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
- Soit $(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^*$. Si $a \leq 0$, le résultat est évident. Si $a > 0$, pour tout $x > 1$,
$$\frac{\ln^a(x)}{x^b} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{b/a}}\right)^a$$
or $\dfrac{b}{a} > 0$ donc par le résultat précédent,
$$\frac{\ln^a(x)}{x^b} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

1) Par le résultat de croissances comparées que l'on vient d'établir,

$$\frac{5x^2 - 2 + \ln^3(x)}{3x^2 + \ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{5}{3}.$$

2) Par croissances comparées,

$$\frac{e^{3x} + e^x - x}{5x^4 + x + 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

3) Par croissances comparées,

$$\frac{e^x + x + e^{-x}}{3x + 2e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

4) Pour tout $x > 0$,

$$\frac{e^x}{\ln(x)} = \frac{\dfrac{e^x}{x}}{\dfrac{\ln(x)}{x}}$$

donc par croissances comparées,

$$\frac{e^x}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc

$$\frac{e^{2x} + 3x + \ln^4(x)}{(e^x)^2 - \ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

La généralisation des croissances comparées du logarithme est très utile et est à retenir, on peut de manière semblable généraliser celles de l'exponentielle.

6 Fractions.

Exercice 6.0.9

Écrire sous forme fractionnaire mes nombres suivants.

1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.

2) $\frac{7}{5} - \frac{17}{12} + \frac{4}{15}$.

3) À vous de multiplier ce type d'exercice.

▷ **Solution.**

1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

2) $\frac{7}{5} - \frac{17}{12} + \frac{4}{15} = \frac{84 - 85 + 16}{60} = \frac{1}{4}$.

3) Tout est dans la consigne... Un petit dernier pour la route :

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = ?$$

Si vous avez saisi la référence, bienvenue à La Martinière Monplaisir, sinon je vous invite à lire *"The Hitchhicker's Guide to the Galaxy"*...

Exercice 6.0.10

Soit a, b et c trois réels non uls. Simplifier

$$A = \frac{a+b}{ab}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{c+a}{ca}(c^2 + a^2 - b^2)$$

▷ **Solution.**

$$A = \frac{c(a+b)(a^2 + b^2 - c^2) + a(b+c)(b^2 + c^2 - a^2) + b(c+a)(c^2 + a^2 - b^2)}{abc}$$

Notons N le numérateur de A,

$$\begin{aligned} N = a^3c + ab^2c - ac^3 + a^2bc + b^3c - bc^3 & \\ + ab^3 + abc^2 - a^3b + ab^2c + ac^3 - a^3c & \\ + bc^3 + a^2bc - b^3c + abc^2 + a^3b - ab^3 & \end{aligned}$$

Donc $N = 2ab^2c + 2abc^2 + 2a^2bc$, d'où

$$A = 2(a + b + c).$$

Exercice 6.0.11

Résoudre l'équation

$$\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x-7} = 1 - \frac{6x^2 + 9x - 9}{(2x+1)(2x-7)}.$$

▷ **Solution.**

Notons (E) cette équation, elle est définie sur $\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}$ et

$$(E) \iff \frac{-20x - 26 - 4x^2 + 12x + 7 + 6x^2 + 9x - 9}{(2x+1)(2x-7)} = 0.$$

On met tout au même dénominateur, puis on passe tout à gauche.

$$(E) \iff 2x^2 + x - 28 = 0.$$

Les solution de cette équation sont donc -4 et $\frac{7}{2}$ mais $\frac{7}{2}$ n'appartient pas au domaine de définition de (E) donc l'unique solution de l'équation est -4.

Exercice 6.0.12

Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{-3x^2 + 10x^2 - 11x + 4}{(5+x)(4-3x) + (3x-4)(x-4)}$$

Simplifier alors cette fraction.

▷ **Solution.**

$(5+X)(4-3X) + (3X-4)(X-4) = -3X^2 - 11X + 20 + 3X^2 - 16X + 16 = -27X + 36$ donc l'expression, que l'on notera dorénavant A, est bien définie sur $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$. Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\right\}$,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{9}\frac{-3x^3 + 10x^2 - 11x + 4}{-3x+4} \\ &= \frac{1}{9}\frac{(x-1)^2(-3x+4)}{-3x+4} \\ &= \frac{1}{9}(x-1)^2 \end{aligned}$$

Exercice 6.0.13

Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{1-x^2}.$$

Écrire alors cette somme en une seule fraction simplifiée.

▷ **Solution.**

Cette expression est définie sur $\mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$. Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}$,

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2(x-1)}{1-x^2} = -\frac{2}{1-x}.$$

Exercice 6.0.14

Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{x^2-1}{(x+1)^2}$$

Simplifier alors cette fraction.

▷ **Solution.**

Cette expression est définie sur $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$. Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\{-1\}$,

$$\frac{x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Exercice 6.0.15

Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2+1}}{\dfrac{x+1}{x^2+1}+\dfrac{x-1}{x^2-1}}.$$

Simplifier alors cette fraction.

▷ **Solution.**

Notons A cette expression, le numérateur et le dénominateur de A sont bien définis sur $\mathbf{R}\backslash\{-1,1\}$. Cherchons les points d'annulations du dénominateur : soit $x \in \mathbf{R}\backslash\{-1,1\}$,

$$\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x-1}{x^2-1}=0 \iff \frac{2(x^3-1)}{x^4-1}=0 \iff x^3=1 \iff x=1.$$

Donc A est bien définie sur $\mathbf{R}\backslash\{-1,1\}$. De plus,

$$A=\frac{\dfrac{2(x^3+1)}{x^4-1}}{\dfrac{2(x^3-1)}{x^4-1}}=\frac{x^3+1}{x^3-1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Exercice 6.0.16

Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{(2x+3)^2-(x+2)^2}{2x^2+2x+10(x+1)}.$$

Simplifier alors cette fraction.

▷ **Solution.**

$$2X^2+2X+10(X+1)=2X^2+12X+10=2(X+1)(X+5)$$

donc l'expression, que l'on notera dorénavant A, est définie sur $\mathbf{R}\backslash\{-1,-5\}$. De plus, soit $x \in \mathbf{R}\backslash\{-1,-5\}$,

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\frac{4x^2+12x+9-x^2-4x-4}{(x+1)(x+5)}\\&=\frac{1}{2}\frac{3x^2+8x+5}{(x+1)(x+5)}\\&=\frac{1}{2}\frac{(x+1)(3x+5)}{(x+1)(x+5)}\\&=\frac{1}{2}\frac{3x+5}{x+5}\end{aligned}$$

Exercice 6.0.17

Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}-\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

Simplifier alors cette fraction.

▷ **Solution.**
Notons A cette expression, alors A est définie sur $\mathbf{R}\backslash\{-1,0,1\}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\{-1,0,1\}$,

$$A = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}.$$

Exercice 6.0.18

Soit a et b des réels strictement positifs. Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{x-a}{ax} + \frac{a-b}{ab} + \frac{b-x}{xb}.$$

Simplifier alors cette fraction.

▷ **Solution.**
Notons A cette fraction, définie sur $\mathbf{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,

$$A = \frac{bx - ab + ax - bx + ab - ax}{abx} = 0.$$

Exercice 6.0.19

Soit a et b des réels strictement positifs. Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{x}{ab}\right)(x+a+b)}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{x^2}{a^2b^2}}$$

Simplifier alors cette fraction.

▷ **Solution.**
Notons A cette fraction, et D son dénominateur. Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$D = 0 \iff x^2 = (a^2b^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab}\right) \iff x^2 = (a+b)^2.$$

Donc A est bien définie sur $\mathbf{R}\backslash\{-a-b, a+b\}$. Soit $x \in \mathbf{R}\backslash\{-a-b, a+b\}$,

$$A = \frac{\frac{1}{ab}(b+a-x)(x+a+b)}{\frac{1}{a^2b^2}((a+b)^2 - x^2)} = ab.$$

Exercice 6.0.20

Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{2x+3}{2(2x-3)} + \frac{12x}{9-4x^2} + \frac{3-2x}{4x+6}.$$

Calculer alors cette somme.

▷ **Solution.**
Notons S cette somme, définie sur $\mathbf{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}\backslash\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{2x+3}{2(3-2x)} + \frac{24x}{2(3-2x)(3+2x)} + \frac{3-2x}{2(2x+3)} \\ &= \frac{-4x^2 - 12x - 9 + 24x + 9 - 12x + 4x^2}{2(3-2x)(3+2x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 6.0.21

Pour quelles valeurs du réel x l'expression suivante est-elle définie ?

$$\frac{2x^2+2x}{x^2+2x+1}+\frac{2x+2}{x^2-1}+\frac{4x^3+4x}{1-x^4}$$

Calculer alors cette somme.

▷ **Solution.**

Notons S cette somme, définie sur $\mathbf{R}\backslash\{-1,1\}$. Pour tout $x\in\mathbf{R}\backslash\{-1,1\}$,

$$\begin{aligned}
S &= \frac{2x(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{4x(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{2x}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4x}{(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{2x^2-2x+2x+2-4x}{(x+1)(x-1)}\\
&= \frac{2(x^2-2x+1)}{(x+1)(x-1)}\\
&= 2\frac{x-1}{x+1}.
\end{aligned}$$