



école  
normale  
supérieure



# Exemples d'études d'équations différentielles linéaires et d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Thomas Harbreteau

Mémoire de Master 2 encadré par Paul Blochas

Année universitaire 2021/2022

# Sommaire

Sommaire . . . . .	1
Introduction . . . . .	1
1 L'équation de transport . . . . .	2
1.1 Définition et interprétation physique . . . . .	2
1.2 Méthode des caractéristiques . . . . .	2
1.3 Existence et unicité de la solution du transport . . . . .	4
2 L'équation de la chaleur . . . . .	6
2.1 Modélisation . . . . .	6
2.2 Analyse du problème . . . . .	6
2.3 Existence et unicité de la solution de l'équation de la chaleur . . . . .	8
3 Le Laplacien . . . . .	10
3.1 Les limites des solutions classiques . . . . .	10
3.2 Espaces de Sobolev . . . . .	11
3.3 Approche variationnelle . . . . .	13
Bibliographie . . . . .	15

## Introduction

Les équations différentielles sont apparues historiquement tout au début de l'analyse, en général à l'occasion de problèmes en mécanique ou de géométrie. Au fil du temps, les problèmes de modélisation sont devenus de plus en plus variés et l'étude des problèmes d'équations différentielles qui en découlaient a donc été moteur pour des avancées dans différents autres champs mathématiques. C'est en effet le terrain idéal pour décloisonner les différentes thématiques mathématiques et mettre en oeuvre l'analyse réelle, la topologie, l'algèbre linéaire, l'intégration, le calcul différentiel, les séries entières, les méthodes de l'analyse numérique, les méthodes hilbertiennes, les séries de Fourier...

Les équations aux dérivées partielles (EDP) constituent la généralisation naturelle des équations différentielles au cas où l'inconnue dépend de plusieurs variables. Elles modélisent de très nombreux phénomènes physiques, chimiques, biologiques ou économiques. Classiquement, une solution d'une EDP d'ordre  $m$  est une fonction  $m$  de classe  $C^m$ . Cependant, il est apparu au début du XX<sup>ème</sup> siècle que cette notion était trop restrictive et que si l'on voulait décrire certains phénomènes, il fallait affaiblir la notion de solution, afin d'y inclure des objets plus singuliers, par exemple des fonctions discontinues. C'est ainsi que dans les années 1930, sous l'impulsion notamment des mathématiciens Jean Leray et Leonid Sobolev, est apparue la notion de solution faible.

On classe les EDP en trois grandes familles : les EDP paraboliques qui modélisent généralement des problèmes stationnaires (indépendants du temps), les EDP hyperboliques qui modélisent généralement des phénomènes de propagation mécanique, et les EDP elliptiques qui modélisent généralement des phénomènes de diffusion.

Dans la suite, nous étudierons un représentant de chaque grande famille d'EDP. En partie 1, nous mettrons en oeuvre la méthode des caractéristiques pour résoudre l'équation de transport, une EDP hyperbolique. En partie 2, nous utiliserons les séries de Fourier pour résoudre l'équation de la chaleur, une EDP parabolique, sur un domaine borné. Enfin, en partie 3 nous introduirons la notion de solution faible d'une EDP et verrons comment résoudre le Laplacien, une EDP elliptique, par une méthode hilbertienne, dite approche variationnelle.

# 1 L'équation de transport

## 1.1 Définition et interprétation physique

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et  $a : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $u^0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Nous cherchons à résoudre l'EDP linéaire du premier ordre

$$\partial_t u + a(t, x) \partial_x u = 0, \quad (1.1)$$

appelée *équation de transport*, avec la condition initiale

$$u(0, x) = u^0(x), \quad (1.2)$$

où la fonction inconnue  $u : J \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , qui à  $(t, x)$  associe  $u(t, x)$ , où  $J$  est un intervalle inclus dans  $I$  et contenant 0.

## 1.2 Méthode des caractéristiques

La résolution du problème (1.1)-(1.2) est fondée sur le calcul de dérivée composée suivant :

$$\frac{d}{dt}[u(t, \varphi(t))] = \partial_t u(t, \varphi(t)) + \varphi'(t) \partial_x u(t, \varphi(t)) \quad (1.3)$$

En comparant (1.1) et (1.3), on voit que si  $\varphi$  est solution de l'équation différentielle

$$\xi' = a(t, \xi), \quad (1.4)$$

alors on a

$$\frac{d}{dt}[u(t, \varphi(t))] = 0, \quad (1.5)$$

tout le long de la courbe  $x = \varphi(t)$ , ce qui signifie qu'une solution  $u$  de l'équation de transport est constante le long de cette courbe. Nous avons ainsi correspondance entre satisfaire l'EDP (1.1) et être constante le long des graphes des solutions de (1.4). Les courbes  $x = \varphi(t)$  sont appelées les *courbes caractéristiques*, ou plus simplement les caractéristiques. Nous allons utiliser l'observation précédente pour résoudre le problème (1.1)-(1.2). Nous avons deux méthodes.

**Méthode des caractéristiques directe.** Pour  $y$  fixé, notons  $t \mapsto \varphi_y(t)$  la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \xi'(t) = a(t, \xi(t)), \\ \xi(0) = y. \end{cases} \quad (1.6)$$

Nous prenons ici la condition de Cauchy à l'instant 0. À partir de (1.5), nous avons

$$u(t, \varphi_y(t)) = u(0, \varphi_y(0)) = u^0(y).$$

Afin de déterminer la valeur de  $u(t, x)$ , on résout en  $y$ , pour  $t$  fixé, l'équation

$$\varphi_y(t) = x. \quad (1.7)$$

Si cette équation a une solution, que l'on note  $\Gamma(t, x)$ , alors nous obtenons

$$u(t, x) = u(t, \varphi_y(t)) = u(0, \varphi_y(0)) = u^0(y) = u^0(\Gamma(t, x)).$$

Notons que l'équation (1.7) a *au plus* une solution en  $y$ . En effet, supposons qu'il existe  $y$  et  $z$  tels que  $\varphi_y(t) = x = \varphi_z(t)$ . Comme  $\varphi_y$  et  $\varphi_z$  sont deux solutions de  $\xi' = a(s, \xi)$  qui coïncident à l'instant  $t$ , où  $a$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz montre que  $\varphi_y = \varphi_z$  et ainsi  $y = z$  en prenant la valeur en 0.

**Méthode des caractéristiques rétrograde.** Pour  $t, x$  fixés, notons  $s \mapsto \psi_x(s)$  la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \xi'(s) = a(s, \xi(s)), \\ \xi(t) = x. \end{cases} \quad (1.8)$$

Nous prenons ici la condition de Cauchy à l'instant  $t$ . À partir de (1.5), nous avons

$$u(t, x) = u(t, \psi_x(t)) = u(0, \psi_x(0)) = u^0(\psi_x(0)).$$

*Remarque 1.1* La première s'appelle directe, car on prend pour condition de Cauchy la valeur au temps 0, puis on cherche les valeurs sur les temps  $t > 0$ . La seconde méthode s'appelle rétrograde, car on prend comme condition de Cauchy la valeur au temps  $t > 0$  et on remonte dans le temps en cherchant la solution pour les valeurs de temps jusqu'à 0.

*Remarque 1.2* Géométriquement, dans la méthode directe, on détermine pour tout  $y$ , les graphes des solutions de (1.4) puis pour un point  $(t, x)$  donné sur quel graphe il se trouve et dans la méthode rétrograde, on calcule la solution de (1.4) dont la graphe passe par  $(t, y)$  et on prend sa valeur en 0.

*Remarque 1.3* Le soucis est que les solutions de (1.4) ne remplissent pas forcément l'ouvert de définition de l'équation de transport. Dans la méthode directe, ceci se traduit par le fait que l'équation (1.7) n'a pas forcément de solution en  $y$ . Dans la méthode rétrograde, ceci se traduit par le fait que la solution  $\psi$  de (1.8) n'est pas forcément définie pour  $s = 0$ .

*Remarque 1.4* Si la quantité  $u$  se trouve à l'instant 0 au point  $x$ , elle se trouve à l'instant  $t$  au point  $\varphi_x(t)$ . C'est pour cela que (1.1) est appelée équation de transport.

Traitons un exemple pour bien fixer les idées.

*Exemple 1.5* (Coefficient constant). Soit  $a \in \mathbf{R}$ . Résoudre

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0,$$

avec la condition initiale  $u(0, x) = u^0(x)$ .

Nous allons faire la résolution avec les deux méthodes proposées.

Méthode directe : la résolution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \xi'(t) = a, \\ \xi(0) = y, \end{cases}$$

donne  $\phi_y(t) = at + y$ . Alors

$$\frac{d}{dt}[u(t, at + y)] = \partial_t u(t, at + y) + a \partial_x u(t, at + y) = 0$$

si et seulement si

$$u(t, at + y) = u(0, y) = u^0(y),$$

pour tout  $t$ . La résolution en  $y$ , pour  $t$  fixé, de l'équation

$$at + y = \varphi_y(t) = x,$$

donne  $y = x - at$  et il vient la solution

$$u(t, x) = u^0(x - at).$$

Méthode rétrograde : la résolution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \xi'(s) = a, \\ \xi(t) = y, \end{cases}$$

donne  $\psi_x(s) = a(s - t) + x$ . Alors

$$\frac{d}{ds}[u(s, a(s - t) + x)] = \partial_t u(s, a(s - t) + x) + a \partial_x u(s, a(s - t) + x) = 0$$

si et seulement si

$$u(t, x) = u(0, a(-t) + x) = u^0(x - at),$$

pour tout  $t$ .

### 1.3 Existence et unicité de la solution du transport

Avant de passer à la justification des méthodes, nous avons besoin de montrer des propriétés sur les solutions de l'équation différentielle caractéristique. Pour cela, nous allons définir le flot de cette équation. Pour  $t$  et  $x$  donnés, notons  $x \mapsto X(s; t, x)$  la solution maximale de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \xi'(s) = a(s, \xi(s)), \\ \xi(t) = x. \end{cases} \quad (1.9)$$

Dans le cas où les solutions maximales de cette équation différentielle sont globales, nous définissons ainsi une fonction  $X$  appelée flot sur  $I \times I \times \mathbf{R}$ . Notons  $\partial_s X$ ,  $\partial_t X$  et  $\partial_x X$  les dérivées partielles de  $X$  par rapport à ses trois composantes. Nous avons ainsi

$$\begin{cases} \partial_s X(s; t, x) = a(s, X(s; t, x)), \\ X(t; t, x) = x. \end{cases} \quad (1.10)$$

Le flot vérifie les propriétés suivantes.

**Lemme 1.6** *Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et  $a : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Supposons que les solutions maximales de  $\xi'(s) = a(s, \xi(s))$  sont globales. Alors*

1. Pour tous  $t_1, t_2, t_3 \in I$  et tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$X(t_1; t_3, x) = X(t_1; t_2, X(t_2; t_3, x)). \quad (1.11)$$

2. Pour tous  $s, t \in I$  et tout  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$\partial_t X(s; t, x) + a(t, x) \partial_x X(s; t, x) = 0 \quad (1.12)$$

DÉMONSTRATION.

1. Soient  $t_2, t_3 \in I$  et  $x \in \mathbf{R}$ . Posons

$$\phi(t) := X(t; t_3, x), \quad \text{et} \quad \psi(t) := X(t; t_2, X(t_2; t_3, x)).$$

On montre que  $\phi$  et  $\psi$  sont solution de  $\xi'(s) = a(s, \xi(s))$  et  $\phi(t_2) = \psi(t_2)$ . Par unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, on obtient  $\phi(t) = \psi(t)$  pour tout  $t \in I$ .

2. En dérivant (1.11) par rapport à  $t_2$ , on trouve

$$0 = \partial_t X(t_1; t_2, X(t_2; t_3, x)) + \partial_x X(t_1; t_2, X(t_2; t_3, x)) \partial_s X(t_2; t_3, x).$$

En utilisant (1.10) et en prenant  $t_1 = s, t_2 = t_3 = t$ , on obtient

$$\partial_t X(s; t, x) + a(t, x) \partial_x X(s; t, x) = 0.$$

□

Jusqu'à maintenant rigoureusement les deux méthodes des caractéristiques présentées. Commençons par la justification de la méthode directe. Pour cette méthode, nous avons besoin de savoir que l'on peut résoudre en  $y$ , pour  $t$  fixé, l'équation (1.7). Nous allons ainsi le supposer dans l'énoncé du résultat.

**Proposition 1.7 (Méthode des caractéristiques directes)** *Soit  $a : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$  contenant 0. Soit  $u^0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour tout  $y \in \mathbf{R}$ , notons  $\varphi_y(t)$  la solution maximale du problème de Cauchy (1.6). Supposons que*

$$(t, y) \mapsto (t, \varphi_y(t))$$

*est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $I \times \mathbf{R}$  dans lui-même. On note  $(t, x) \mapsto (t, \Gamma(t, x))$  l'application réciproque. Alors il existe une unique solution, définie sur  $I$ , au problème (1.1)-(1.2). Elle est donnée par la formule*

$$u(t, x) = u^0(\Gamma(t, x)), \quad (1.13)$$

pour tout  $(t, x) \in I \times \mathbf{R}$ .

DÉMONSTRATION. L'unicité provient du calcul de la dérivée composée de la méthode directe, qui montre qu'il y a un seul candidat possible pour le problème. On injecte la fonction définie par (1.13) dans (1.1), et on obtient

$$(u^0)'(\Gamma(t, x))(\partial_x \Gamma(t, x) + a(t, x)\partial_x \Gamma(t, x)).$$

En dérivant par rapport à  $t$  l'égalité  $\Gamma(t, \varphi_y(t)) = y$ , nous avons

$$\partial_t \Gamma(t, \varphi_y(t)) + \partial_t \varphi_y(t) \partial_x \Gamma(t, \varphi_y(t)) = 0.$$

Puisque  $\partial_t \varphi_y(t) = a(t, \varphi_y(t))$ , et que  $(t, y) \mapsto (t, \varphi_y(t))$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, on a pour tout  $(t, x) \in I \times \mathbf{R}$ ,

$$\partial_t \Gamma(t, x) + a(t, x)\partial_x \Gamma(t, x) = 0.$$

Ainsi,

$$\partial_t u(t, x) + a(t, x)\partial_x u(t, x) = 0.$$

□

Passons à la justification de la méthode rétrograde. Pour cette méthode, nous avons besoin de savoir que les solutions avec une condition de cauchy en  $t$  sont définies en 0. Pour cela, nous allons faire une hypothèse afin d'être assuré que les solutions maximales sont globales. Ceci permet en particulier de définir le flot associé à cette équation différentielle comme précédemment.

**Proposition 1.8 (Méthode des caractéristiques rétrograde)** *Soit  $a : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$  contenant 0 et telle que les solutions maximales de  $\xi' = a(t, \xi)$  sont globales. Soit  $u^0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $X : I \times I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  le flot de l'équation différentielle  $\xi' = a(t, \xi)$ . Alors il existe une unique solution définie sur  $I$  pour le problème (1.1)-(1.2). Elle est donnée par la formule*

$$u(t, x) = u^0(X(0; t, x)), \quad (1.14)$$

pour tout  $(t, x) \in I \times \mathbf{R}$ .

DÉMONSTRATION. L'unicité provient du calcul de la dérivée composée de la méthode rétrograde, qui montre qu'il y a un seul candidat possible pour le problème. On injecte la fonction définie par (1.14) dans (1.1), et on obtient

$$\partial_t u(t, x) + a(t, x)\partial_x u(t, x) = (u^0)'(X(0; t, x))(\partial_t X(0; t, x) + a(t, x)\partial_x X(0; t, x)) = 0,$$

d'après (1.12).

□

*Remarque 1.9* Les hypothèses des Proposition 1.7 et Proposition 1.8 sont par exemple vérifiées si  $a$  est globalement Lipschitz en la variable d'espace.

Complétons cette étude avec le cas d'une équation de transport avec second membre :

$$\partial_t u + a(t, x)\partial_x u = f(t, x). \quad (1.15)$$

En comparant le calcul de dérivée composée (1.3) avec (1.15), on voit que si  $\varphi$  est solution de l'équation différentielle  $\xi' = a(t, \xi)$ , alors on a

$$\frac{d}{ds}[u(s, \varphi(s))] = f(s, \varphi(s)). \quad (1.16)$$

Utilisons la méthode des caractéristiques rétrogrades et, pour  $t, x$  fixés, notons  $s \mapsto \psi_x(s)$  la solution maximale du problème de Cauchy (1.8). Alors (1.16) écrit le long de la courbe  $x = \psi_x(x)$  équivaut, par intégration, à

$$u(s, \psi_x(s)) - u(0, \psi_x(0)) = \int_0^s f(\sigma, \psi_x(\sigma)) d\sigma,$$

pour tout  $s$ . Ainsi, il vient

$$u(t, x) = u(t, \psi_x(t)) = u^0(\psi_x(0)) + \int_0^t f(\sigma, \psi_x(\sigma)) d\sigma.$$

On peut aussi écrire cette formule en utilisant le flot  $X$  associé à l'équation différentielle  $\xi' = a(t, \xi)$  qui donne les relations  $\psi_x(0) = X(0; t, x)$  et  $\psi_x(\sigma) = X(\sigma; t, x)$ .

**Proposition 1.10 (Méthode des caractéristiques avec second membre)** Soit  $a : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$  contenant 0 et telle que les solutions maximales de  $\xi' = a(t, \xi)$  sont globales. Soient  $u^0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $f : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $X : I \times I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  le flot de l'équation différentielle  $\xi' = a(t, \xi)$ . Alors il existe une unique solution, définie sur  $I$ , pour (1.15) avec la condition initiale (1.2). Elle est donnée par la formule

$$u(t, x) = u^0(X(0; t, x)) + \int_0^t f(s, X(s; t, x)) ds, \quad (1.17)$$

pour tout  $(t, x) \in I \times \mathbf{R}$ .

*Remarque 1.11* En pratique, on ne retient pas nécessairement les formules (1.13), (1.14) et (1.17). Les résultats précédents donnent un cadre où la méthode des caractéristiques est bien justifiée et on peut alors refaire le calcul pour retrouver les formules.

## 2 L'équation de la chaleur

### 2.1 Modélisation

On va étudier l'équation de la chaleur en dimension 1 d'espace sur un intervalle en utilisant des techniques de Fourier qui ramènent l'EDP à un problème d'équations différentielles : les séries de Fourier. Considérons le problème de diffusion de la chaleur dans une barre (unidimensionnelle) homogène de longueur  $L$ , de coefficient de conductivité thermique  $\lambda$ , de masse volumique  $\rho$  et de coefficient calorifique  $C$ . On suppose l'absence de sources de chaleur externes et on suppose que les deux extrémités de la barre sont à une température fixe  $T_0$ . La température  $T$  suit la loi de conservation

$$\partial_t(\rho CT) + \partial_x j = 0,$$

où  $j$  est le flux de diffusion, donné par la loi de Fourier :

$$j = -\lambda \partial_x T.$$

Nous obtenons l'équation

$$\partial_t T - \frac{\lambda}{\rho C} \partial_{xx}^2 T = 0,$$

avec les conditions aux limites  $T(0, 0) = T(0, L) = T_0$ . Posons  $\kappa = \lambda/(\rho C)$  et

$$u(t, x) = T(t, \sqrt{\kappa}x) - T_0.$$

Alors  $u$  vérifie le problème

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx}^2 u = 0, & (t, x) \in ]0, +\infty[ \times ]0, L[, \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0, & t \in [0, +\infty[, \end{cases} \quad (2.1a)$$

$$(2.1b)$$

d'inconnue  $u = u(t, x)$  avec des conditions aux limites nulles (conditions de Dirichlet homogènes). Il convient d'ajouter à ce problème d'évolution une condition initiale :

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in [0, L]. \quad (2.2)$$

Le problème fait intervenir une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre.

### 2.2 Analyse du problème

On recherche tout d'abord des solutions de classe  $\mathcal{C}^2$  à variables séparées, c'est-à-dire des solutions de la forme

$$u(t, x) = f(t)g(x).$$

On a alors

$$\partial_t u(t, x) - \partial_{xx}^2 u(t, x) = f'(t)g(x) - f(t)g''(x)$$

et  $u$  est solution de l'équation de la chaleur si et seulement si

$$f'(t)g(x) - f(t)g''(x) = 0.$$

En supposant que  $f$  et  $g$  ne s'annulent pas, cela revient à

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)}.$$

La fonction  $t \mapsto f'(t)/f(t)$  étant égale à une fonction indépendante de  $t$ , c'est une constante, ainsi,

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = C \quad \text{et} \quad \frac{g''(x)}{g(x)} = C.$$

Les solutions de  $f'(t) = Cf(t)$  sont les fonctions

$$t \mapsto f(t) = Ae^{Ct},$$

où  $A$  est une constante quelconque. En ce qui concerne les solutions de  $g''(x) = Cg(x)$ , il faut distinguer les cas selon le signe de  $C$ . Si  $C = 0$ , alors

$$g(x) = \alpha x + \beta.$$

Si  $C > 0$ , alors

$$g(x) = \alpha e^{\sqrt{C}x} + \beta e^{-\sqrt{C}x}.$$

Si  $C < 0$ , alors

$$g(x) = \alpha \cos(\sqrt{-C}x) + \beta \sin(\sqrt{-C}x).$$

Faisons maintenant intervenir les conditions aux limites :

$$f(t)g(0) = u(t, 0) = 0 \quad \text{et} \quad f(t)g(L) = u(t, L) = 0,$$

ce qui donne, puisque  $f$  est supposée non identiquement nulle,

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad g(L) = 0.$$

Si  $C = 0$ , ceci donne  $\beta = 0$  et  $\alpha = 0$ , d'où la solution nulle.

Si  $C > 0$ , alors  $\alpha + \beta = 0$  et  $\alpha e^{\sqrt{C}L} + \beta e^{-\sqrt{C}L} = 0$  et à nouveau,  $\alpha = \beta = 0$ .

Si  $C < 0$ , alors  $\alpha = 0$  et  $\alpha \cos(\sqrt{-C}L) + \beta \sin(\sqrt{-C}L) = 0$ , ce qui conduit à la condition

$$\sin(\sqrt{-C}L) = 0.$$

En choisissant des constantes  $C$  qui vérifient cette condition, on obtient des solutions  $g$  non nulles qui répondent au problème. Les constantes qui conviennent sont les  $\sqrt{-C}L = k\pi$  où  $k \in \mathbf{N}^*$ .

On a ainsi obtenu des solutions pour les constantes

$$C_k := \frac{-k^2\pi^2}{L^2},$$

à savoir

$$u_k(t, x) := b_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad \text{où } k \in \mathbf{N}^*. \quad (2.3)$$

Remarquons que les combinaisons linéaires de ces solutions sont encore solutions. Par suite, si  $u^0$  est de la forme

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^K b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

alors la fonction

$$u(t, x) := \sum_{k=1}^K b_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

est solution du problème (2.1)-(2.2). Ceci conduit immédiatement à la question : peut-on écrire une fonction quelconque  $u^0$  nulle pour  $x = 0$  et  $x = L$  sous la forme d'une série

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)?$$

La réponse est positive, comme on va le voir. Pour étudier la possibilité de décomposer  $u^0$  en série de sinus, on se ramène au cas bien connu des fonctions périodiques. On suppose que  $u^0$  est continue sur  $[0, L]$ , avec  $u^0(0) = u^0(L) = 0$  afin que les conditions aux limites soient vérifiées par la donnée initiale. On commence par prolonger  $u^0$  sur  $[-L, L]$  en posant  $u^0(x) = -u^0(-x)$  pour  $x \in [-L, 0]$ . Puisque  $u^0(-L) = u^0(L) = 0$ , on peut encore prolonger  $u^0$  à tout  $\mathbf{R}$  en une fonction continue, impaire et  $2L$ -périodique. De plus, si  $u^0$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, L]$ , la fonction prolongée est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur tout  $\mathbf{R}$ . Avec ces hypothèses sur  $u^0$ , le prolongement de  $u^0$ , que l'on notera encore  $u^0$ , se développe en série de Fourier selon

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < +\infty,$$

ce qui assure la convergence en tout point  $x \in \mathbf{R}$ . Les  $b_k$  sont les coefficients de Fourier trigonométriques impairs de  $u^0$ , les coefficients pairs  $a_k$  étant nuls car  $u^0$  est impaire.

*Remarque 2.1* L'idée de cette méthode revient à Daniel Bernouilli en 1753, à propos du problème des cordes vibrantes, c'est-à-dire le problème d'une corde tendue entre deux points. L'EDP associées est

$$\partial_{tt}^2 u = c^2 \partial_{xx}^2 u,$$

où  $u$  est le déplacement dans la direction verticale de la corde à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$  avec  $c = \sqrt{\tau/\mu}$ , où  $\tau$  est la norme de la tension appliquée aux deux extrémités et  $\mu$  la masse par unité de longueur (masse linéique) de la corde de longueur  $L$ . Ce déplacement est relié au son produit. La corde possède un son fondamental

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \alpha \cos\left(\frac{\pi c}{L} t + \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \\ &= \left(A \cos\left(\frac{\pi c}{L} t\right) + B \sin\left(\frac{\pi c}{L} t\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \end{aligned}$$

de fréquence  $\nu = c/(2L)$  (c'est un coefficient qui peut être identifié à la vitesse de son dans la corde tendue) et des harmoniques

$$u(t, x) = \left(A \cos\left(\frac{\pi c}{L} kt\right) + B \sin\left(\frac{\pi c}{L} kt\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} kx\right)$$

dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale. Selon Bernouilli, en mélangeant le son fondamental et les harmoniques, on doit pouvoir obtenir n'importe quel son produit par la corde. Ce qui revient à la question posée plus haut.

Cette question entraîna de nombreuses discussions et la réponse complète et rigoureuse n'arriva qu'avec Fourier et Dirichlet dans le premier tiers du XIX<sup>e</sup> siècle.

### 2.3 Existence et unicité de la solution de l'équation de la chaleur

L'analyse menée dans la section précédente permet d'obtenir un candidat solution de (2.1)-(2.2), et donc d'énoncer la proposition suivante.

**Proposition 2.2** *Soit  $u^0 \in \mathcal{C}^1([0, L])$  avec  $u^0(0) = u^0(L) = 0$ . On peut prolonger  $u^0$  en une fonction impaire et  $2L$ -périodique, que l'on note encore  $u^0$ . Notons*

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

son développement en série de Fourier. Alors la fonction

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

est une solution du problème (2.1)-(2.2) avec la régularité

$$u \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[ \times \mathbf{R}) \cap \mathcal{C}^0[0, +\infty[ \times \mathbf{R}. \quad (2.4)$$

DÉMONSTRATION. Posons pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,

$$u_k(t, x) = b_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right).$$

Les fonctions  $u_k$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbf{R}$ . Comme  $u^0$  est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, la série des coefficients de fourier converge absolument,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < +\infty.$$

La majoration

$$|u_k(t, x)| \leq |c_k|,$$

valable pour tout  $(t, x) \in ]0, +\infty[ \times \mathbf{R}$ , démontre alors la convergence normale de la série de fonctions  $\sum u_k$  sur cet ensemble. Ainsi,  $u$  est continue sur  $]0, +\infty[ \times \mathbf{R}$ .

Soient  $a, b \in \mathbf{R}$  tels que  $0 < a < b < +\infty$ . Pour tout  $t \in [a, b]$ , on a la majoration

$$|\partial_x^n \partial_t^m u_k(t, x)| \leq |b_k| e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} a} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^l \left(\frac{k^2 \pi^2}{L^2}\right)^m \quad (2.5)$$

avec  $(b_k)_k$  bornée car la série  $\sum |b_k|$  converge, donc  $(b_k)_k$  converge vers 0. Nous avons donc la convergence uniforme de toutes les dérivées de  $u_k$  sur  $[a, b] \times \mathbf{R}$ . Ainsi  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[a, b] \times \mathbf{R}$  pour tous  $0 < a < b < +\infty$  et donc sur  $]0, +\infty[ \times \mathbf{R}$ . On peut alors dériver la série terme à terme sur cet ensemble, ce qui donne

$$\begin{aligned} & \partial_t u(t, x) - \partial_{xx}^2 u(t, x) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} b_k\right) e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-\frac{k^2 \pi^2}{L^2} t} \left(-\frac{k^2 \pi^2}{L^2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour  $(t, x) \in ]0, +\infty[ \times \mathbf{R}$ . □

On peut maintenant se poser la question de l'unicité de la solution. Pour commencer, on énonce un principe du maximum pour l'équation de la chaleur.

**Lemme 2.3 (Principe du maximum)** Soit  $Q := ]0, +\infty[ \times ]0, L[$ . Soit  $u \in \mathcal{C}^0(\bar{Q}) \cap \mathcal{C}^2(Q)$  telle que  $Pu(t, x) \leq 0$  sur  $Q$ , où  $P := \partial_t u - \partial_{xx}^2$ . Soient  $T > 0$  et  $K := [0, T] \times [0, L]$ . Alors

$$\sup_K u = \sup_{K \cap \partial Q} u. \quad (2.6)$$

Autrement dit  $u$  atteint son maximum pour  $t = 0$  ou pour  $x = 0, L$  et  $0 \leq t \leq T$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $u_\varepsilon(t, x) := u(t, x) + \varepsilon x^2$ , qui vérifie donc  $Pu_\varepsilon = Pu - 2\varepsilon \leq -2\varepsilon$  sur  $Q$ . Soit  $m_\varepsilon = (x_\varepsilon, t_\varepsilon)$  un point de  $K$  où  $u_\varepsilon$  atteint son maximum sur  $K$ . Supposons par l'absurde que  $m_\varepsilon \notin K \cap \partial Q$ .

Alors

- $0 < x_\varepsilon < L$  donc  $\partial_x u_\varepsilon(m_\varepsilon) = 0$  et  $\partial_{xx}^2 u_\varepsilon(m_\varepsilon) \leq 0$ .
- $0 < t_\varepsilon \leq T$  donc

$$\partial_t u_\varepsilon(m_\varepsilon) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{u_\varepsilon(t_\varepsilon - h, x_\varepsilon) - u_\varepsilon(t_\varepsilon, x_\varepsilon)}{-h} \geq 0.$$

Ainsi,  $Pu_\varepsilon(m_\varepsilon) \geq 0$ , ce qui contredit  $Pu_\varepsilon \leq -2\varepsilon$ . Donc  $m_\varepsilon \in K \cap \partial Q$  et

$$\sup_K u \leq \sup_K u_\varepsilon = \sup_{K \cap \partial Q} u_\varepsilon \leq \sup_{K \cap \partial Q} u + \varepsilon L^2.$$

En prenant la limite quand  $[\varepsilon \rightarrow 0]$ , on obtient (2.6).  $\square$

On peut maintenant énoncer un théorème d'unicité.

**Théorème 2.4** *Le problème (2.1)-(2.2) admet une unique solution  $u \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[ \times \mathbf{R}) \cap \mathcal{C}^0[0, +\infty[ \times \mathbf{R}$ .*  
 DÉMONSTRATION. Soient  $u, v$  deux solutions de (2.1)-(2.2). Posons  $w := u - v$ , alors  $w$  est aussi solution de (2.1)-(2.2) et

$$\forall (t, x) \in \partial Q, \quad w(t, x) = 0. \quad (2.7)$$

Fixons  $T > 0$ , puisque  $Pw = 0$  sur  $Q$ , (2.6) et (2.7) entraînent  $w(T, x) \leq 0$ . En faisant de même avec  $P(-w) = 0$  sur  $Q$ , on obtient  $-w(T, x) \leq 0$ , d'où  $w(T, x) = 0$ , pour tout  $x \in [0, L]$ . Puisque  $T$  est arbitraire, on a bien  $w = 0$  sur  $Q$ .  $\square$

## 3 Le Laplacien

### 3.1 Les limites des solutions classiques

Dans cette section, nous nous intéressons à l'analyse des EDP de type elliptique. Nous allons montrer que les problèmes aux limites admettent une unique solution. L'approche que nous allons suivre est appelée *approche variationnelle*. L'intérêt de cette approche dépasse le cadre des EDP elliptiques. Elle peut-être utilisée pour traiter des problèmes d'évolution en temps (EDP parabolique ou hyperbolique), et elle est à la base de la méthode numérique des éléments finis.

Au cours de cette section, l'exemple prototype d'équation aux dérivées partielles de type elliptique sera le Laplacien pour lequel nous étudierons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

où nous imposons des condition aux limites de Dirichlet. Dans (3.1),  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^N$ ,  $\partial\Omega$  est son bord,  $f$  un second membre et  $u$  l'inconnue.

Pour simplifier, on travaillera sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbf{R}$ . Cela évite l'utilisation de la formule de Green et l'introduction de la théorie des traces. Cependant, les idées et la plupart des résultats majeurs restent les mêmes en dimension supérieure.

La formulation classique de (3.1), qui pourrait paraître naturelle à première vue, est de supposer suffisamment de régularité pour la solution  $u$  afin que les équations de (3.1) aient un sens en tout point de  $\Omega$  ou de  $\partial\Omega$ .

Une *solution classique* (on parle aussi de *solution forte*) de (3.1) est une solution  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ , ce qui implique que le second membre de  $f$  doit appartenir à  $\mathcal{C}^0(\Omega)$ . Cette formulation classique pose malheureusement un certain nombre de problèmes. En effet, sous la seule hypothèse  $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , lorsque la dimension d'espace est plus grande que deux, le problème (3.1) admet bien une solution mais celle-ci n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Dans la suite, pour étudier (3.1), nous remplacerons sa formulation classique par une formulation dite variationnelle, beaucoup plus avantageuse.

*Remarque 3.1* Lorsque  $\Omega := ]0, 1[$ , qui est le cadre dans lequel on se placera, le problème (3.1) devient

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{pour } 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Ce problème admet une solution explicite, de classe  $\mathcal{C}^2$ , donnée par

$$u(x) = x \int_0^1 f(s)(1-s)ds - \int_0^x f(s)(x-s)ds.$$

Ceci étant dit, on oublie à présent cette formule explicite, qui n'a pas toujours d'équivalent pour des problèmes plus compliqués, pour se concentrer sur la méthode mise en oeuvre.

En une dimension d'espace, l'appellation EDP perd de sa justesse, comme il n'y a plus qu'une seule variable. Cependant, l'équation (3.2) n'est pas une équation différentielle "usuelle", au sens où la solution doit satisfaire des conditions au deux bouts 0 et 1, plutôt qu'une condition initiale en une seule extrémité de  $[0, 1]$ . Les méthodes classiques d'équations différentielles ordinaires ne sont pas très commodes pour étudier (3.2), et totalement inopérantes en dimension supérieure. En effet, les techniques usuelles nous permettent de résoudre pour  $m \in \mathbf{R}$ ,

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{sur } ]0, 1[ \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = m \end{cases} \quad (3.3)$$

Il faut donc ensuite ajuster le paramètre  $m$  pour que la solution  $u$  de (3.3) vérifie aussi  $u(1) = 0$ . Cette méthode, appelée *méthode du tir*, permet de résoudre aussi bien théoriquement que numériquement le problème (3.1). En pratique, c'est une méthode peu efficace qui a l'inconvénient majeur de ne pas se généraliser en dimension supérieure.

Voyons maintenant ce qu'est une formulation variationnelle de (3.1). L'idée est d'exprimer (3.1) sous la forme

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V, \quad (3.4)$$

où  $V$  est un espace de fonctions,  $a : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  et  $L : V \rightarrow \mathbf{R}$ . Si  $V$  est un espace de Hilbert,  $a$  une forme bilinéaire continue, coercive, et  $L$  une forme linéaire continue, alors d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (3.4) admet une unique solution. On verra dans la suite comment établir cette formulation variationnelle, et on étudiera le lien entre les solutions faibles et les solutions fortes.

## 3.2 Espaces de Sobolev

Dans cette section, nous définissons les espaces de Sobolev, qui sont les espaces "naturels" de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'EDP. Sauf mention explicite du contraire,  $\Omega$  désignera l'ouvert  $]0, 1[$ .

**Définition 3.2** *L'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$  est défini par*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \quad v' \in L^2(\Omega)\}, \quad (3.5)$$

où  $v'$  est la dérivée faible de  $v$ .

Donnons tout de suite un critère simple et pratique pour déterminer si une fonction est dans  $H^1(\Omega)$ .

**Lemme 3.3** *Soit  $v \in L^2(\Omega)$ . S'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a*

$$\left| \int_{\Omega} v(x)\phi'(x)dx \right| \leq C\|\phi\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.6)$$

alors  $v \in H^1(\Omega)$ .

*Exemple 3.4* La fonction  $x \mapsto x^\alpha$  est dans  $H^1(\Omega)$  si et seulement si  $\alpha > 1/2$ .

*Exemple 3.5* Soit  $\Omega := ]0, 1[$ . Toute fonction continue sur  $\bar{\Omega}$  et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux est dans  $H^1(\Omega)$ .

*Exemple 3.6* Les fonctions  $\mathcal{C}^1$  par morceaux mais pas continues ne sont pas dans  $H^1(\Omega)$ .

**Proposition 3.7** *Muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} (u(x)v(x) + u'(x)v'(x))dx \quad (3.7)$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 + |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

l'espace des Sobolev  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

En dimension  $N \geq 2$ , les fonctions de  $H^1(\Omega)$  ne sont en général ni continues, ni bornées, comme le montre le contre exemple suivant.

*Exemple 3.8* Soit  $B$  la boule unité ouverte de  $\mathbf{R}^N$ . Si  $N = 2$ , la fonction  $u(x) := |\log(|x|)|^\alpha$  appartient à  $H^1(B)$  pour  $0 < \alpha < 1/2$ , mais n'est pas bornée au voisinage de l'origine. Si  $N \geq 3$ , la fonction  $v(x) := |x|^{-\beta}$  appartient à  $H^1(B)$  pour  $0 < \beta < (N - 2)/2$ , mais n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

Le cas de la dimension  $N = 1$  est particulier, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme 3.9** *Pour toute fonction  $v \in H^1(0, 1)$  et pour tout  $x, y \in [0, 1]$ , on a*

$$v(y) = v(x) + \int_x^y v'(s) ds. \quad (3.8)$$

Plus généralement, pour tout  $x \in [0, 1]$ , l'application  $v \mapsto v(x)$ , définie de  $H^1(0, 1)$  dans  $\mathbf{R}$ , est une forme linéaire continue sur  $H^1(0, 1)$ . En particulier, toute fonction  $v \in H^1(0, 1)$  est continue sur  $[0, 1]$ .

*Remarque 3.10* L'affirmation que toute fonction de  $H^1(0, 1)$  est continue peut sembler à première vue contradictoire avec le fait que les fonctions de  $H^1(0, 1)$  ne sont définies que presque partout. Le résultat du Lemme précédent doit se comprendre dans le sens qu'il existe un représentant de la classe de fonctions  $v \in H^1(0, 1)$  qui est continu.

Il est très important en pratique de savoir si les fonctions régulières sont denses dans l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ . Cela justifie en partie la notion d'espace de Sobolev qui apparaît très simplement comme l'ensemble des fonctions régulières complété par les limites de suites de fonctions régulières dans la norme de l'énergie  $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ . Cela permet de démontrer facilement de nombreuses propriétés en les établissant d'abord sur les fonctions régulières puis en utilisant un argument de densité.

**Théorème 3.11 (de densité)** *L'ensemble  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $H^1(\Omega)$ .*

Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de  $H^1(\Omega)$  et qui nous sera utile pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

**Définition 3.12** *L'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est défini comme l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .*

On verra plus loin que  $H_0^1(\Omega)$  est en fait le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord de  $\partial\Omega$  puisque tel est le cas des fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Remarquons que le Lemme (3.9) nous dit qu'un élément  $v$  de  $H^1(\Omega)$  est continu sur  $[0, 1]$ , donc on peut bien parler de ses valeurs ponctuelles. En dimension supérieure, on n'a plus ce résultat, et on doit introduire la notion de trace, ce que l'on ne fera pas ici.

En général,  $H_0^1(\Omega)$  est strictement plus petit que  $H^1(\Omega)$ , une exception importante étant le cas où  $\Omega = \mathbf{R}$ . Cette exception se comprend aisément puisque l'espace entier  $\mathbf{R}$  n'a pas de bord.

**Proposition 3.13** *Muni du produit scalaire (3.7) de  $H^1(\Omega)$ , l'espace de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.*

Un résultat essentiel en pratique est l'inégalité suivante.

**Proposition 3.14 (Inégalité de Poincaré)** *Il existe  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,*

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx. \quad (3.9)$$

*Remarque 3.15* L'inégalité de Poincaré (3.9) n'est pas vraie pour les fonctions de  $H^1(\Omega)$ , prendre par exemple une fonction constante.

Un corollaire important est le résultat suivant qui fournit une norme équivalente plus simple dans  $H_0^1(\Omega)$ .

**Corollaire 3.16** *La semi-norme*

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

*est une norme sur  $H_0^1(\Omega)$ , équivalente à la norme usuelle induite par celle de  $H^1(\Omega)$ .*

### 3.3 Approche variationnelle

Revenons à l'étude du Laplacien. Nous considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

où on prend toujours  $\Omega = ]0, 1[$ , et  $f$  un second membre qui appartient à l'espace  $L^2(\Omega)$ . L'approche variationnelle pour étudier (3.10) est constituée de trois étapes que nous détaillons.

**Étape 1 :** Établissement d'une formule variationnelle.

Dans une première étape il faut proposer une formulation variationnelle du problème aux limites (3.10), c'est-à-dire qu'il faut trouver une forme bilinéaire  $a$ , une forme linéaire  $L$ , et un espace de Hilbert  $V$  tels que (3.10) soit équivalent à :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \text{ pour tout } v \in V. \quad (3.11)$$

Le but de cette première étape est seulement de trouver la formulation variationnelle (3.11) ; on vérifiera l'équivalence précise avec (3.10) plus tard au cours de la troisième étape.

Soit  $u$  solution de (3.1), on multiplie l'équation par  $v \in \mathcal{D}(0, 1)$ , puis on fait une intégration par parties, qui est légitime car  $u', v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . On obtient

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_0^1 u''(x)v(x)dx = u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Or  $v \in \mathcal{D}(0, 1)$ , donc  $v(0) = v(1) = 0$ , d'où

$$\int_0^1 f(x)v(x)dx = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx. \quad (3.12)$$

Pour que le terme de gauche de (3.12) ait un sens il suffit que  $u'$  et  $v'$  appartiennent à  $L^2(\Omega)$ , et pour que le terme de droite de (3.12) ait un sens il suffit que  $v$  appartienne à  $L^2(\Omega)$  (puisque l'on a supposé  $f \in L^2(\Omega)$ ). Par conséquent, un choix raisonnable pour l'espace de Hilbert est  $V = H_0^1(\Omega)$ , le sous-espace de  $H^1(\Omega)$  dont les éléments s'annulent sur le bord  $\partial\Omega$ .

En conclusion, la formulation variationnelle proposée pour (3.10) est :

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\omega), \int_{\Omega} u'(x)v'(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad (3.13)$$

Nous avons fait un certain nombre de choix pour arriver à (3.12). D'autres choix nous auraient conduit à d'autres formulations variationnelles. La justification de (3.13) s'effectuera donc a posteriori : tout d'abord, la deuxième étape consiste à vérifier que (3.13) admet bien une unique solution, puis la troisième étape que la solution de (3.13) est aussi solution du problème aux limites (3.10) (dans un sens à préciser).

**Étape 2 :** Résolution de la formulation variationnelle.

Dans cette deuxième étape nous vérifions que la formulation variationnelle (3.13) admet une unique solution. Pour cela nous utilisons le théorème de Lax-Milgram dont nous vérifions les hypothèses. Posons pour  $u, v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$a(u, v) := \int_{\Omega} u'(x)v'(x)dx, \quad \text{et} \quad L(v) := \int_{\Omega} f(x)v(x)dx,$$

alors on cherche à résoudre  $a(u, v) = L(v)$  pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ . On voit par inégalité de Cauchy-Schwarz que  $a$  est une forme bilinéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$  et que  $L$  est une forme linéaire continue sur  $H_0^1(\Omega)$ . De plus, en vertu de l'inégalité de Poincaré (3.9), la forme bilinéaire  $a$  est coercive. Comme  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert, toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites, donc on peut conclure qu'il existe une unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle (3.13).

**Étape 3 :** Équivalence avec l'équation.

La troisième étape consiste à vérifier qu'en résolvant la formulation variationnelle (3.13) on a bien résolu le problème aux limites (3.10), et à préciser dans quel sens la solution de (3.13) est aussi solution de (3.10). En d'autres termes, il s'agit d'interpréter la formulation variationnelle et de retourner à l'équation. Contrairement à l'établissement de la formulation variationnelles (3.13), on ne dispose cette fois pas de l'intégration par parties, car  $u$  est dans  $H_0^1(\Omega)$ , et donc pas assez régulière. Mais  $\mathcal{D}(\Omega)$  est inclu dans  $H_0^1(\omega)$ , donc on peut regarder (3.13) au sens des distributions. On obtient pour tout  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,

$$\langle u', v' \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\omega)} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\omega)},$$

soit

$$-\langle u'', v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\omega)} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\omega)},$$

où  $u''$  est la dérivée faible de  $u'$ . Ainsi,  $-u'' = f$  au sens des distributions. Comme on a supposé  $f \in L^2(\Omega)$ , on a  $u'' \in L^1(\Omega)$  et

$$-u'' = f \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Comme  $u \in H_0^1(\Omega)$ , et que le Lemme 3.9 nous assure que  $u$  est continue sur  $[0, 1]$ , on a bien  $u(0) = u(1) = 0$ .

En conclusion nous avons démontré le résultat suivant.

**Théorème 3.17** *Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . Il existe une unique solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de la formulation variationnelle (3.13). De plus,  $u$  est solution du problème aux limites (3.10) au sens où*

$$-u'' = f \quad \text{presque partout dans } \Omega, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

*Remarque 3.18* En fait, la solution faible peut être solution forte si le second membre  $f$  est plus régulier. En effet, si l'on suppose  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ , comme  $-u'' = f$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , alors  $u''$  est continue, donc  $u'$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et donc  $u''$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .

En suivant la même approche, on peut étudier un problème similaire, le problème de Sturm-Liouville :

$$\begin{cases} (-pu')' + ru' + qu = f & \text{on } ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $p \in \mathcal{C}^1(0, 1)$  et  $r, q, f \in \mathcal{C}^0(0, 1)$ . On peut alors montrer le théorème suivant.

**Théorème 3.19** *Supposons qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,*

$$q(x) \geq 1, \quad p(x) \leq \alpha, \quad r(x)^2 \leq \alpha.$$

*Alors le problème de Sturm-Liouville (3.14) admet une unique solution  $u \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ .*

# Bibliographie

- [1] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Les éditions de l'École polytechnique, 2005.
- [2] Florent Berthelin. *Équations différentielles*. Cassini, 2017.
- [3] Jean-Michel Bony. *Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Les éditions de l'École Polytechnique, 2001.
- [4] Hervé Queffelec Claude Zuily. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2013.