Analyse probabiliste de la méthode volumes finis pour l'équation de transport

Thomas Harbreteau

Stage de Master 1 encadré par Julien Vovelle

Année universitaire 2020/2021

Sommaire

Sommaire 1
Introduction 1
Section 1 2
1.1 L'équation de transport 2
1.2 Équation discrète 2
1.3 Simplification du problème 4
Section 2 7
2.1 Interprétation probabiliste de l'équation discrète 7
2.2 Utilisation de l'approche probabiliste 10
Section 3 12
3.1 Étude de l'écart entre les caractéristiques déterministes et aléatoires 12
3.2 Inversion de la chaîne de Markov 16
3.3 Majoration de l'erreur de convergence 21
Annexe 22
Bibliographie 24

Introduction

Soient $T > 0$, $d \in \mathbf{N}^*$, $a : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ une application Lipschitz et $u^0 \in BV(\mathbf{R}^d)$. On considère l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \langle a(x), \nabla u(t,x)\rangle = 0, & (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^d \\ u(0,x) = u^0(x), & x \in \mathbf{R}^d \end{cases}$$

qui admet une unique solution u. Une méthode pour approcher numériquement u est la méthode volumes finis. Considèrons un maillage $\mathcal{T}$ et une discrétisation uniforme du temps $[0,T]$, de pas Δt. On note u_K^n la valeur de l'approximation de u dans la cellule K au temps $n\Delta t$ par la méthode volumes finis. Le calcul de ces quantités se fait de manière itérative. On initialise la méthode en prenant u_K^0 comme la moyenne de u^0 dans la cellule K, et la valeur u_K^{n+1} de l'approximation au temps $(n+1)\Delta t$ est définie comme une certaine combinaison convexe des valeurs des approximations des autres cellules, de la forme

$$u_K^{n+1} = \sum_{K \in \mathcal{T}} p_{K,L} u_L^n,$$

où les $p_{K,L}$ sont positifs et

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} p_{K,L} = 1.$$

Cette écriture permet d'introduire une chaîne de Markov $(K_n)_n$ de noyau de transitions $(p_{K,L})_{K,L \in \mathcal{T}}$. On peut alors montrer que $u_K^n = \mathbf{E}_K[u_{K_n}^0]$. Le but de cette approche probabiliste est de retrouver le résultat de convergence du schéma numérique suivant :

Théorème 0.1 *On suppose la donnée initiale $u^0 \in BV(\mathbf{R}^d)$. Sous des hypothèses de régularité du maillage $\mathcal{T}$ qui seront précisées dans la suite, il existe une constante $C > 0$ ne dépendant ni du pas de temps Δt, ni du maillage, telle que pour $N \geq 1$,*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \|u_K^N - u(N\Delta t, \cdot)\|_{L^1(K)} \leq C h^{1/2} e^{CN\Delta t},$$

où $h := \sup_{K\in\mathcal{T}} \operatorname{diam}(K)$.

Cette démonstration est issue de l'article Probabilistic analysis of the upwind scheme for transport, de Delarue et Lagoutière [1].

Section 1

1.1 L'équation de transport

Soient $T > 0$, $d \in \mathbf{N}^*$, $a : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ une application Lipschitz et $u^0 \in BV(\mathbf{R}^d)$. On considère l'équation de transport

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \langle a(x), \nabla u(t,x)\rangle = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^d \\ u(0,x) = u^0(x), \quad x \in \mathbf{R}^d \end{cases} \tag{1.1}$$

Le champ de vecteurs a étant supposé Lipschitz, le problème (1.1) admet une unique solution, notée u, dont l'expression dépend de la donnée initiale u^0 et des caractéristiques. Pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, la caractéristique issue de x est la solution $X(\cdot,x) : [0,T] \to \mathbf{R}^d$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t X(t,x) = a(X(t,x)), \quad t \in [0,T] \\ X(0,x) = x \end{cases} \tag{1.2}$$

En notant pour tout $t \in [0,T]$, $X^{-1}(t,\cdot)$ l'inverse de $x \mapsto X(t,x)$, on a alors

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^d, \quad u(t,x) = u^0(X^{-1}(t,x)).$$

Le champ a étant indépendant du temps, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $X^{-1}(\cdot,x)$ est en fait la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t Z(t,x) = -a(Z(t,x)), \quad t \in [0,T] \\ Z(0,x) = x \end{cases},$$

que l'on notera Z dans la suite. Ainsi,

$$\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^d, \quad u(t,x) = u^0(Z(t,x)).$$

On en déduit que pour tout $t \geq 0$, $u(t,\cdot) \in L^1(\mathbf{R}^d)$.

Dans la suite, on sera amenés à utiliser le résultat suivant.

Théorème 1.1 Rademacher *Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}^m$, une fonction globalement Lipschitz. Alors f est presque-partout dérivable.*

On pourra trouver une preuve de ce théorème dans [2].

1.2 Équation discrète

Soit $\mathcal{T}$ un maillage de $\mathbf{R}^d$, dont les cellules sont des polygones fermés, d'intérieurs disjoints tel que

$$\mathbf{R}^d = \bigcup_{K\in\mathcal{T}} K.$$

On notera $|K|$ le volume de K pour la mesure de Lebesgue en dimension d et $h = \sup_{K\in\mathcal{T}} \operatorname{diam}(K)$, le supremum des diamètres des cellules. Deux cellules K et L seront dites adjacentes si elles ne sont pas disjointes, mais ont des intérieurs disjoints. On notera alors $K \sim L$. On suppose que le maillage est tel que pour toutes les cellules K, L adjacentes, leur intersection $K \cap L$ est inclue dans un hyperplan de $\mathbf{R}^d$. On dénotera par $|K \cap L|$ la mesure de Lebesgue de dimension $d-1$ de $K \cap L$. On supposera également que les cellules ne sont pas plates et que leur bord n'est pas trop long, dans le sens où il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall K \in \mathcal{T}, \quad \sum_{L\sim K} |K \cap L| \leq \alpha |K| h^{-1}, \quad \text{et} \quad |K| \geq \beta^{-1} h^d \tag{1.3}$$

Soit $\Delta t > 0$ le pas de temps du schéma numérique. La méthode volume finis vise à calculer u_K^n, une valeur approchée de la valeur moyenne de $u(n\Delta t, \cdot)$ dans la cellule K, et ce pour tout temps n et toute cellule K. Établissons l'équation discrète qui régit la méthode. L'application u est solution de

$$\partial_t u(t,x) + \langle a(x), \nabla u(t,x)\rangle = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^d,$$

ce qui peut se réécrire

$$\partial_t u(t,x) + \mathrm{div}(au)(t,x) - u(t,x)\mathrm{div}(a)(x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^d.$$

On va intégrer cette relation sur $[n\Delta t, (n+1)\Delta t] \times K$. Formellement, on a

$$\int_{[n\Delta t,(n+1)\Delta t]\times K} \partial_t u(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_K [u((n+1)\Delta t, x) - u(n\Delta t, x)]\mathrm{d}x,$$

et

$$\begin{aligned}\int_{[n\Delta t,(n+1)\Delta t]\times K} \mathrm{div}(au)(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x &= \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_{\partial K} \langle u(t,x)a(x), n_{K\to L}\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \sum_{K\sim L} \int_{K\cap L} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} u(t,x)\langle a(x), n_{K\to L}\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\int_K u((n+1)\Delta t, x)\mathrm{d}x - \int_K u(n\Delta t, x)\mathrm{d}x \\ &\quad + \sum_{K\sim L} \int_{K\cap L} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} u(t,x)\langle a(x), n_{K\to L}\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_K \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} u(t,x)\mathrm{div}(a)(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = 0 \qquad (1.4)\end{aligned}$$

où $n_{K\to L}$ est la normale sortante unitaire de K sur le bord $K \cap L$, pour $K \sim L$. Puisque l'on a supposé que $K \cap L$ est inclu dans un hyperplan de $\mathbf{R}^d$, $n_{K\to L}$ est bien constante le long de $K \cap L$. Comme u_K^n est une approximation de la valeur moyenne de $u(n\Delta t, \cdot)$ dans la cellule K, on a

$$u_K^n \approx \frac{1}{|K|} \int_K u(n\Delta t, x)\mathrm{d}x.$$

On introduit deux quantités, le flux numérique $u_{K\to L}^n$ qui approche la valeur moyenne de u sur le bord $K \cap L$ entre les temps n et $n+1$,

$$u_{K\to L}^n := \frac{1}{\Delta t|K\cap L|} \int_{K\cap L} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} u(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

ainsi que

$$a_{K\to L} := \frac{1}{|K\cap L|} \int_{K\cap L} a(x)\mathrm{d}x,$$

la valeur moyenne de a sur le bord $K \cap L$. On a alors

$$\sum_{K\sim L} \int_{K\cap L} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} u(t,x)\langle a(x), n_{K\to L}\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}t \approx \Delta t \sum_{L\sim K} \langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle |K\cap L| u_{K\to L}^n.$$

On peut aussi réécrire le troisième terme du membre de gauche de (1.4)

$$\begin{aligned}\int_K \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} u(t,x)\mathrm{div}(a)(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x &\approx \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} u_K^n \mathrm{div}(a)(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\approx \Delta t u_K^n \int_{\partial K} \langle a(x), n_{K\to L}\rangle \mathrm{d}x \\ &\approx \Delta t u_K^n \sum_{K\sim L} \langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle.\end{aligned}$$

On en déduit une version approchée de (1.1),

$$|K|(u_K^{n+1} - u_K^n) + \Delta t \sum_{L\sim K} \langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle |K\cap L| u_{K\to L}^n - \Delta t u_K^n \sum_{K\sim L} \langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle = 0.$$

Ici, on étudie le schéma amont, où on prend pour flux numériques $u_{K\to L}^n = u_K^n$ si $L \in K^+$, et $u_{K\to L}^n = u_L^n$ si $L \in K^-$, avec

$$K^+ := \{L \sim K \mid \langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle > 0\}, \qquad K^- := \{L \sim K \mid \langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle < 0\}.$$

Cette hypothèse explique le nom du schéma, Finalement, on obtient l'équation approchée

$$|K|(u_K^{n+1} - u_K^n) + \Delta t \sum_{L\in K^-} \langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle |K\cap L|(u_L^n - u_K^n) = 0,$$

que l'on peut écrire

$$u_K^{n+1} = \left(1 + \sum_{L\in K^-} \frac{\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle \Delta t |K\cap L|}{|K|}\right) u_K^n - \sum_{L\in K^-} \frac{\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle \Delta t |K\cap L|}{|K|} u_L^n \tag{1.5}$$

On appellera cette équation l'équation discrète. Elle permet de définir par récurrence les suites des $(u_K^n)_n$ pour toute cellule K.

Pour K une cellule, on pose

$$\begin{aligned} &u_K^0 := \frac{1}{|K|}\int_K u^0(x)\mathrm{d}x \\ &\forall n \geq 1, \quad u_K^{n+1} := \left(1 + \sum_{L\in K^-} \frac{\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle \Delta t |K\cap L|}{|K|}\right) u_K^n - \sum_{L\in K^-} \frac{\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle \Delta t |K\cap L|}{|K|} u_L^n. \end{aligned}$$

En définissant ensuite

$$\begin{aligned} p_{K\to L} &:= -\frac{\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle \Delta t |K\cap L|}{|K|}, \quad \text{si } L \in K^- \\ p_{K\to K} &:= 1 + \sum_{L\in K^-} \frac{\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle \Delta t |K\cap L|}{|K|} \\ p_{K\to L} &:= 0, \quad \text{si } L \in \mathcal{T} \setminus (K^- \cup \{K\}) \end{aligned}$$

on obtient

$$u_K^{n+1} = \sum_{L\sim K} p_{K\to L} u_L^n.$$

On va également imposer aux $p_{K\to L}$ d'être tous positifs. Puisque si $L \in K^-$, $p_{K\to L} \geq 0$, il suffit d'avoir $p_{K\to K} \geq 0$. On impose donc au maillage $\mathcal{T}$ la condition suivante, que l'on nommera condition CFL,

$$1 + \sum_{L\in K^-} \frac{\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle \Delta t |K\cap L|}{|K|} \geq 0 \tag{1.6}$$

qui assure la positivité de $p_{K\to K}$, et qui sera supposée vérifiée dans toute la suite.

1.3 Simplification du problème

Pour simplifier les expressions, on supposera dans toute la suite que $h \leq 1$ et qu'il existe un $\theta > 0$ tel que $\Delta t \leq \theta h$. On appellera une constante une quantité ne dépendant ni de Δt, ni du maillage $\mathcal{T}$, c'est-à-dire de h ou de certaines cellules. Une constante peut dépendre de toutes les autres données du problèmes, tel que $\|a\|_\infty$, θ, $\|u^0\|_{BV(\mathbf{R}^d)}$, α, β, et d'autres. Entre deux lignes de calcul, la valeur d'une constante peut changer, sans que cela soit précisé.

Si $u^0 \in BV(\mathbf{R}^d)$ et u est la solution du problème du transport ayant pour donnée initiale u^0, on cherche à montrer la majoration

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{K \in \mathcal{T}} \|u_K^n - u(N\Delta t, \cdot)\|_{L^1(K)} \leq Ch^{1/2} e^{CN\Delta t},$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant ni de Δt, ni de h.

Fixons $h \leq 1$ et $N \in \mathbf{N}$. Soit $u^0 \in BV(\mathbf{R}^d)$. Par théorème d'approximation (voir [3]), il existe $u_h^0 \in BV(\mathbf{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$ telle que $\|u_h^0 - u^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} \leq h^{1/2}$ et $\|\nabla u_h^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} \leq \|u^0\|_{BV(\mathbf{R}^d)}$. Dans la suite, on aura besoin de majorer localement le gradient de u_h^0. On va donc dès maintenant introduire l'application

$$\bar{u}^0 : x \in \mathbf{R}^d \longmapsto \frac{1}{|\mathcal{B}(0, h^{1/2})|} \int_{\mathcal{B}(0,h^{1/2})} u_h^0(x-y)\mathrm{d}y.$$

Proposition 1.2 *L'application $\bar{u}^0$ vérifie les inégalités suivantes.*

$$\|u^0 - \bar{u}^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} \leq h^{1/2}(1 + \|u^0\|_{BV(\mathbf{R}^d)})$$
$$\|\nabla \bar{u}^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} \leq \|u^0\|_{BV(\mathbf{R}^d)}$$
$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \forall R > 0, \quad \sup_{y \in \mathcal{B}(x,R)} |\nabla \bar{u}^0(y)| \leq \frac{1}{|\mathcal{B}(0, h^{1/2})|} \|\nabla u_h^0\|_{L^1(\mathcal{B}(x, R+h^{1/2}))}$$

Preuve. Les deux premières inégalités découlent d'un simple calcul. Démontrons la troisième. Puisque $u_h^0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$, par théorème de dérivation sous l'intégrale,

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad \nabla \bar{u}^0(x) = \frac{1}{|\mathcal{B}(0, h^{1/2})|} \int_{\mathcal{B}(0,h^{1/2})} \nabla u_h^0(x-y)\mathrm{d}y,$$

ce qui conclut. □

Notons $\bar{u} : (t,x) \mapsto \bar{u}^0(Z(t,x))$ la solution du problème du transport pour la donnée initiale $\bar{u}^0$, ainsi que pour tout $K \in \mathcal{T}, n \in \mathbf{N}$, $\bar{u}_K^n$ la solution approchée par la méthode volumes finis. Par inégalité triangulaire, pour tout $K \in \mathcal{T}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{K \in \mathcal{T}} \|u_K^N - u(N\Delta t, \cdot)\|_{L^1(K)} \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}} \|u_K^N - \bar{u}_K^N\|_{L^1(K)} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, \cdot)\|_{L^1(K)} + \sum_{K \in \mathcal{T}} \|\bar{u}(N\Delta t, \cdot) - u(N\Delta t, \cdot)\|_{L^1(K)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

On étudie chaque terme du membre de droite.

Théorème 1.3 *Soient $v^0, w^0 \in BV(\mathbf{R}^d)$, et soient $(v_K^n)_{K \in \mathcal{T}, n \in \mathbf{N}}, (w_K^n)_{K \in \mathcal{T}, n \in \mathbf{N}}$ les solutions numériques données par le schéma volume fini. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} |K||u_K^N - \bar{u}_K^N| \leq Ce^{CN\Delta t} \|v_0 - w_0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}.$$

Preuve. Par théorème de Fubini-Tonelli,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} |K||v_K^1 - w_K^1| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| \sum_{L \in \mathcal{T}} p_{K \to L} |v_L^0 - w_L^0| = \sum_{L \in \mathcal{T}} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}} |K| p_{K \to L} \right) |v_L^0 - w_L^0|.$$

Si $L \in \mathcal{T}$, par théorème de Fubini-Tonelli, puis par théorème de Stokes,

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}} |K| p_{K\to L} &= -\Delta t \sum_{K\in\mathcal{T}\setminus\{L\}} \langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle |K\cap L| + |L| \left(1 + \sum_{J\in L^-} \frac{\langle a_{L\to J}, n_{L\to J}\rangle |J\cap L|\Delta t}{|L|}\right) \\
&\leq -\Delta t \sum_{K\in\mathcal{T}} \langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle |K\cap L| + |L| \left(1 + \sum_{J\in L^-} \frac{\langle a_{L\to J}, n_{L\to J}\rangle |J\cap L|\Delta t}{|L|}\right) \\
&\leq -\Delta t \sum_{K\in\mathcal{T}} \int_{K\cap L} \langle a(x), n_{K\to L}\rangle \mathrm{d}x + |L| + \Delta t \sum_{J\in L^-} \langle a_{L\to J}, n_{L\to J}\rangle |J\cap L| \\
&\leq -\Delta t \int_{\partial L} \langle a(x), n_{K\to L}\rangle \mathrm{d}x + |L| + \Delta t \sum_{J\in L^-} \int_{J\cap L} \mathrm{div}(a)(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \Delta t \int_{\partial L} \langle a(x), n_{L\to K}\rangle \mathrm{d}x + |L| + \Delta t \sum_{J\in L^-} \int_{J\cap L} \mathrm{div}(a)(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \Delta t \int_{L} \mathrm{div}(a)(x)\mathrm{d}x + |L| + \Delta t \sum_{J\in L^-} \int_{J\cap L} \mathrm{div}(a)(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{K\in\mathcal{T}} |K| p_{K\to L} &\leq \Delta t |L| \|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} + |L| + \|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \Delta t \sum_{J\in L^-} \int_{J\cap L} \mathrm{d}x \\
&\leq (1 + 2\Delta t \|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)})|L| \\
&\leq (1 + C\Delta t)|L|
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} |K||v_K^1 - w_K^1| \leq (1 + C\Delta t) \sum_{L\in\mathcal{T}} |L||v_K^0 - w_K^0|.$$

En itérant ce procédé,

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} |K||v_K^N - w_K^N| \leq (1 + C\Delta t)^N \sum_{L\in\mathcal{T}} |L||v_K^0 - w_K^0| \leq (1 + C\Delta t)^N \|v^0 - w^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}.$$

De l'inégalité $1 + x \leq e^x$, valable pour tout $x \in \mathbf{R}$, on déduit que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} |K||v_K^N - w_K^N| \leq C e^{CN\Delta t} \|v^0 - w^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}.$$

□

Avec la Proposition 1.1 et ce théorème, on montre que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \|u_K^N - \bar{u}_K^N\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} = \sum_{K\in\mathcal{T}} |K||u_K^N - \bar{u}_K^N| \leq c h^{1/2} e^{CN\Delta t} \tag{1.8}$$

Théorème 1.4 *Soient $v^0, w^0 \in BV(\mathbf{R}^d)$, et soient respectivement v, w les solutions de l'équation de transport pour ces données initiales. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \|v(t,\cdot) - w(t,\cdot)\|_{L^1(K)} \leq e^{Ct} \|v^0 - u^0\|_{L^1(\mathbf{R})}.$$

PREUVE. Remarquons que les applications v et w sont solutions de la même équation de transport, mais avec des données initiales différentes, donc v, w vérifient $v, w(t,x) = v^0, w^0(Z(t,x))$, où Z sont les caractéristiques. Si $t \geq 0$, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, puis que la fonction $x \mapsto Z(t,x)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme,

$$\begin{aligned}\sum_{K\in\mathcal{T}} \|v(t,\cdot)-w(t,\cdot)\|_{L^1(K)} &= \|v(t,\cdot)-w(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}\\ &= \|v^0(Z(t,\cdot))-w^0(Z(t,\cdot))\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}\\ &= \int_{\mathbf{R}^d} |v^0(Z(t,x))-w^0(Z(t,x))|\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbf{R}^d} |v^0(y)-w^0(y)||\mathrm{Jac}(Z^{-1}(t,\cdot))(y)|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Mais $Z^{-1}(t,\cdot) = X(t,\cdot)$, c'est le flot des caractéristiques de l'équation du transport, donc pour tout $y \in \mathbf{R}^d$,

$$\begin{cases} \partial_t \mathrm{Jac}(Z^{-1}(t,\cdot))(y) = \mathrm{div}(a)(y)\mathrm{Jac}(Z^{-1}(t,\cdot))(y) \\ \mathrm{Jac}(Z^{-1}(0,\cdot))(y) = 1 \end{cases}.$$

On en déduit que

$$\forall y \in \mathbf{R}^d, \quad |\mathrm{Jac}(Z^{-1}(t,\cdot))(y)| \leq e^{\|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}t} \leq e^{Ct} \tag{1.9}$$

Par conséquent,

$$\|v(t,\cdot)-w(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} \leq e^{Ct}\|v^0-w^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}.$$

□

La Proposition 1.1 et ce théorème nous assurent que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \|\bar{u}(t,\cdot)-u(t,\cdot)\|_{L^1(K)} \leq Ch^{1/2}e^{Ct}.$$

Il ne reste plus qu'à majorer

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \|\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t,\cdot)\|_{L^1(K)} = \sum_{K\in\mathcal{T}} \|\bar{u}_K^N - \bar{u}^0(Z(N\Delta t,\cdot))\|_{L^1(K)} \tag{1.10}$$

La Proposition 1.1 nous donnant un contrôle des normes L^1 et L^∞ du gradient de $\bar{u}^0$, on aimerait exprimer $\bar{u}_K^N$ en fonction de $\bar{u}^0$ et d'un point de $\mathbf{R}^d$.

Section 2

2.1 Interprétation probabiliste de l'équation discrète

Soit $v^0 \in BV(\mathbf{R}^d)$. On note v la solution exacte du problème du transport

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + \langle a(x), \nabla v(t,x)\rangle = 0, \quad (t,x) \in [0,T]\times\mathbf{R}^d \\ v(0,x) = v^0(x), \quad x \in \mathbf{R}^d \end{cases}$$

et pour tout temps n et toute cellule K, v_K^n l'approximation de v dans la cellule K au temps n donnée par la méthode volumes finis. On rappelle que

$$\forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in \mathbf{N}, \quad v_K^{n+1} = \sum_{L\in\mathcal{T}} p_{K\to L} v_L^n.$$

On rappelle également que la condition CFL (1.6) entraîne la positivité des $p_{K\to L}$. Puisque

$$\forall K \in \mathcal{T}, \quad \sum_{L\in\mathcal{T}} p_{K\to L} = 1,$$

on peut choisir un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ainsi qu'une variable aléatoire $\xi_K : \Omega \to \mathcal{T}$ telle que

$$\forall L \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{P}(\xi_K = L) = p_{K\to L}.$$

On a alors

$$v_K^{n+1} = \mathbf{E}[v_{\xi_K}^n].$$

On souhaite itérer ce procédé. Pour cela, on va définir une chaîne de Markov de noyau de transition $(p_{K\to L})_{K,L\in\mathcal{T}}$. Il est clair que $(p_{K\to L})_{K,L\in\mathcal{T}}$ est un noyau de transition, et $\mathcal{T}$ étant dénombrable, il existe un nouvel espace probabilisé, aussi noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, une suite $(K_n)_n$ de variables aléatoires sur cet espace, à valeurs dans $\mathcal{T}$, et $(\mathbf{P}_K)_{K\in\mathcal{T}}$ un ensemble de probabilités sur Ω tels que sous chaque $\mathbf{P}_K$, $(K_n)_n$ est une chaîne de Markov de noyau de transition $(p_{K\to L})_{K,L}$ partant de la cellule K, ie $K_0 = K$. Dans la suite, on notera pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{E}_K^n[\cdot] := \mathbf{E}_K[\cdot|K_0, \dots, K_n]$.

Théorème 2.1 *Pour tous $K \in \mathcal{T}, n \in \mathbf{N}$, on a*

$$v_K^n = \mathbf{E}_K[v_{K_n}^0].$$

Preuve. Soit $K \in \mathcal{T}$. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_K^{n+1} = \mathbf{E}_K[v_{K_1}^n]$, donc par propriété de Markov,

$$\forall n, i \in \mathbf{N}, \quad v_{K_i}^{n+1} = \mathbf{E}_K[v_{K_{i+1}}^n|K_0, \dots, K_i].$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} v_K^{n+1} &= \mathbf{E}_K[v_{K_1}^n] \\ &= \mathbf{E}_K[\mathbf{E}_K^1[v_{K_2}^{n-1}]] \\ &= \dots \\ &= \mathbf{E}_K[\mathbf{E}_K^1[\dots \mathbf{E}_K^n[v_{K_{n+1}}^0]]] \\ &= \mathbf{E}_K[v_{K_{n+1}}^0]. \end{aligned}$$

□

À cette suite $(K_n)_n$ de cellules, on va maintenant associer une suite de points $(X_n)_n$ représentant sa trajectoire. Pour ce faire, on commence par sélectionner un point particulier de chaque cellule $K \in \mathcal{T}$. Notons pour toutes cellules K et L adjacentes,

$$x_{K,L} := \frac{1}{|K \cap L|} \int_{K\cap L} x \mathrm{d}x,$$

le barycentre de la face $K \cap L$. Maintenant, définissons pour toutes cellules K et J,

$$\begin{aligned} q_{K\to J} &:= \frac{\langle a_{K\to J}, n_{K\to J}\rangle \Delta t |K \cap J|}{|K|} \quad \text{si } J \in K^+, \\ q_{K\to K} &:= 1 - \sum_{J\in K^+} \frac{\langle a_{K\to J}, n_{K\to J}\rangle \Delta t |K \cap J|}{|K|} \\ q_{K\to J} &:= 0 \quad \text{si } J \in \mathcal{T} \setminus (K^- \cup \{K\}), \end{aligned}$$

qui correspondent formellement au noyau de transition que la chaîne $(K_n)_n$ aurait si le problème du transport était

$$\partial_t v = -a(v).$$

Attention, sans condition CFL, la positivité des $q_{K\to J}$ n'est pas assurée, $(q_{K\to J})_{K,J}$ n'est donc pas nécessairement un noyau de transition, l'analogie n'est que formelle. Le choix de ces $q_{K\to J}$ sera expliqué par la suite. Posons maintenant pour tout $K \in \mathcal{T}$,

$$e_K := \left(\sum_{J\in K^+} q_{K\to J}\right)^{-1} \sum_{J\in K^+} q_{K\to J} x_{K\to J},$$

une combinaison convexe des points $(x_{K,J})_{J\in K^+}$ ayant pour poids les $(q_{K\to J})_{K,J}$. On définit alors par récurrence la suite de points aléatoire

$$\begin{aligned}
&X_0 := e_{K_0}\\
&\forall n\geq 1,\quad X_n := e_{K_n} \quad \text{si } K_n = K_{n-1}\\
&\forall n\geq 1,\quad X_n := x_{K_n,K_{n-1}} \quad \text{si } K_n \neq K_{n-1}.
\end{aligned}$$

Lorsque $n=0$ ou $K_n = K_{n-1}$, X_n est un point particulier de K_n, ne dépendant pas de ce qu'il s'est passé avant le temps n, et lorsque $K_n \neq K_{n-1}$, X_n est choisi comme le barycentre de la face $K_n\cap K_{n-1}$ pour exprimer le passage de K_{n-1} à K_n.

Les poids $q_{K\to J}$ ont été choisis au regard de la proposition suivante.

Proposition 2.2 *Soit K une cellule. Pour tout point x_0 dans l'enveloppe convexe de K,*

$$a_K\Delta t = -\sum_{L\in K^-} p_{K\to L}(x_{K,L}-x_0) + \sum_{J\in K^+} q_{K\to J}(x_{K,J}-x_0) + O(h\Delta t).$$

Preuve. Soit $1\leq i\leq d$. Pour $x\in\mathbf{R}^d$, on note x_i sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base canonique de $\mathbf{R}^d$. Par formule de Green,

$$\int_K a_i(x)\mathrm{d}x = -\int_K (x-x_0)_i \mathrm{div}(a)(x)\mathrm{d}x + \sum_{L\sim K}\int_{K\cap L}(x-x_0)_i\langle a(x), n_{K\to L}\rangle \mathrm{d}x.$$

Le membre de gauche est égal à $|K|(a_K)_i$, et le premier terme du membre de droite est un $O(h|K|)$ car $\mathrm{div}(a)$ est essentiellement bornée. De plus,

$$\begin{aligned}
&\sum_{L\sim K}\int_{K\cap L}(x-x_0)_i\langle a(x), n_{K\to L}\rangle \mathrm{d}x\\
&= \sum_{L\sim K}\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle\int_{K\cap L}(x-x_0)_i\mathrm{d}x + \sum_{L\sim K}\int_{K\cap L}(x-x_0)_i\langle a(x)-a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle\mathrm{d}x\\
&= \sum_{L\sim K}\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle\int_{K\cap L}(x-x_0)_i\mathrm{d}x + O(h^2)\sum_{L\sim K}|K\cap L|.
\end{aligned}$$

Avec les hypothèses (1.3) faites sur le maillage, on en déduit que

$$\sum_{L\sim K}\int_{K\cap L}(x-x_0)_i\langle a(x), n_{K\to L}\rangle\mathrm{d}x = \sum_{L\sim K}\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle |K\cap L|(x_{K,L}-x_0)_i + O(h|K|),$$

d'où

$$a_K\Delta t = \sum_{L\sim K}\frac{\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle \Delta t|K\cap L|}{|K|}(x_{K,L}-x_0) + O(h\Delta t).$$

On conclut en séparant la somme. □

Le corollaire suivant découle directement de cette proposition.

Corollaire 2.3 *Pour toute cellule de départ K, et pour tout temps $n\in\mathbf{N}$,*

$$\mathbf{E}^n_K[X_{n+1}-e_{K_n}] = -a(X_n)\Delta t + O(h\Delta t).$$

Preuve. Par théorème de transfert,

$$\mathbf{E}^n_K[X_{n+1}-e_{K_n}] = \sum_{L\in K_n^-} p_{K_n\to L}(x_{K_n,L}-e_{K_n}),$$

et e_{K_n} est dans l'enveloppe convexe de K_n. On conclut directement en appliquant la proposition précédente avec $x_0 = e_{K_n}$. □

2.2 Utilisation de l'approche probabiliste

On reprend les notations de la fin section 1.3. On fixe $N \in \mathbf{N}$. On cherchait à majorer

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \|\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, \cdot)\|_{L^1(K)}.$$

On commence par montrer qu'il suffit de d'étudier la quantité

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} |K||\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)|.$$

Soit K une cellule. Par théorème des accroissements finis, pour tout $y \in K$,

$$\begin{aligned}|\bar{u}(N\Delta t, y) - \bar{u}(N\Delta t, e_K)| &= |\bar{u}^0(Z(N\Delta t, y)) - \bar{u}^0(Z(N\Delta t, e_K))| \\ &\leq |Z(N\Delta t, y) - Z(N\Delta t, e_K)| \sup_{z\in\mathcal{B}(Z(N\Delta t, e_K), |Z(N\Delta t, y) - Z(N\Delta t, e_K)|)} |\nabla \bar{u}^0(z)|.\end{aligned}$$

Mais pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $Z(\cdot, x)$ est solution de l'équation différentielle (1.2), donc a étant Lipschitz, par stabilité des solutions,

$$|Z(N\Delta t, y) - Z(N\Delta t, e_K)| \leq |y - e_K| e^{\mathrm{Lip}(a)N\Delta t}.$$

De plus, e_K étant dans l'enveloppe convexe de K, on a $|y - e_K| \leq h$. En utilisant la majoration du gradient de $\bar{u}^0$ établie dans la Proposition 1.1, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ vérifiant

$$|\bar{u}(N\Delta t, y) - \bar{u}(N\Delta t, e_K)| \leq Ce^{CN\Delta t} h^{1-d/2} \|\nabla u_h^0\|_{L^1(\mathcal{B}(Z(N, \Delta t, e_K), Ce^{CN\Delta t}h^{1/2})}.$$

En intégrant cette relation pour $y \in K$ et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}&\sum_{K\in\mathcal{T}} \|\bar{u}(N\Delta t, \cdot) - \bar{u}(N\Delta t, e_K)\|_{L^1(K)} \\ &\leq \sum_{K\in\mathcal{T}} Ce^{CN\Delta t} h^{1-d/2} |K| \int_{\mathcal{B}(Z(N, \Delta t, e_K), Ce^{CN\Delta t}h^{1/2})} |\nabla u_h^0(z)| \mathrm{d}z \\ &\leq Ce^{CN\Delta t} h^{1+d/2} \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u_h^0(z)| \sum_{K\in\mathcal{T}} \mathbf{1}_{\{|z - Z(N\Delta t, e_K)| \leq Ce^{CN\Delta t}h^{1/2}\}} \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

La propriété (1.3) du maillage impose $|K| \geq \beta^{-1}h^d$, donc il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$\mathrm{card}(\{K \in \mathcal{T} \mid |z - Z(N\Delta t, e_K)| \leq Ce^{CN\Delta t}h^{1/2}\}) \leq C'e^{C'N\Delta t} \frac{h^{d/2}}{h^d} \leq C'e^{C'N\Delta t}h^{-d/2}.$$

Ainsi,

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \|\bar{u}(N\Delta t, \cdot) - \bar{u}(N\Delta t, e_K)\|_{L^1(K)} \leq C'e^{C'N\Delta t} h \|\nabla u_h^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}.$$

Comme, par inégalité triangulaire,

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \|\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, \cdot)\|_{L^1(K)} \leq \sum_{K\in\mathcal{T}} \|\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)\|_{L^1(K)} + \sum_{K\in\mathcal{T}} \|\bar{u}(N\Delta t, e_K) - \bar{u}(N\Delta t, \cdot)\|_{L^1(K)},$$

il suffit bien de majorer le terme

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} \|\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)\|_{L^1(K)} = \sum_{K\in\mathcal{T}} |K||\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)|.$$

On montre maintenant que l'on peut contrôler ce terme par l'écart moyen entre les caractéristiques déterministes et les caractéristiques aléatoires. Rappelons que sous $\mathbf{P}_K$, $e_K = K_0$ presque-sûrement, donc par le Théorème 2.1,

$$\begin{aligned}|\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)| &= |\mathbf{E}_K[\bar{u}_{K_N}^0 - \bar{u}(N\Delta t, X_0)]| \\ &\leq \sum_{k\geq 0} \mathbf{E}_K[|\bar{u}_{K_N}^0 - \bar{u}^0(Z(N\Delta t, X_0))| \mathbf{1}_{\{kh^{1/2} \leq |X_N - Z(N\Delta t, X_0)| \leq (k+1)h^{1/2}\}}].\end{aligned}$$

Sur l'ensemble $\{kh^{1/2} \leq |X_N - Z(N\Delta t, X_0)| \leq (k+1)h^{1/2}\}$, puisque X_N est soit égale à e_{K_N}, soit à un élément de K_N, on a pour tout $x \in K_N$,

$$|x - Z(N\Delta t, X_0)| \leq (k+2)h^{1/2}.$$

On en déduit par inégalité des accroissements finis et par la Proposition 1.1, que

$$\begin{aligned}|\bar{u}^0_{K_N} - \bar{u}^0(Z(N\Delta t, X_0))| &\leq \frac{1}{|K_N|}\int_{K_N} |\bar{u}^0(x) - \bar{u}^0(Z(N\Delta t, X_0))| \mathrm{d}x \\ &\leq (k+2)h^{1/2} \sup_{z \in \mathcal{B}(Z(N\Delta t, X_0),(k+2)h^{1/2})} |\nabla \bar{u}^0(z)| \\ &\leq (k+2)h^{1/2} \frac{1}{|\mathcal{B}(0, h^{1/2})|} \|\nabla u^0_h\|_{L^1(\mathcal{B}(Z(N\Delta t, X_0),(k+3)h^{1/2}))}.\end{aligned}$$

On fixe $x \in K_N$. Par stabilité des solutions de (1.2), il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|Z(N\Delta t, e_K) - Z(N\Delta t, x)| \leq Ce^{CN\Delta t}h^{1/2},$$

donc il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$\mathcal{B}(Z(N\Delta t, e_K), (k+3)h^{1/2}) \subset B^k_x := \mathcal{B}(Z(N\Delta t, x), C_0 e^{C_0 N\Delta t}(k+1)h^{1/2}) \tag{2.1}$$

Ainsi, pour un $C > 0$,

$$|\bar{u}^0_{K_N} - \bar{u}^0(Z(N\Delta t, X_0))| \leq C(k+2)h^{(d+1)/2}\|\nabla u^0_h\|_{L^1(B^k_x)}.$$

Notons

$$\mathcal{T}_x := \{K \in \mathcal{T} \mid |e_K - x| \leq h^{1/2}\}.$$

Avec ce qui précède, par théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}&\sum_{K \in \mathcal{T}_x} |K||\bar{u}^N_K - \bar{u}(N\Delta t, e_K)| \\ &\leq Ch^{(d+1)/2} \sum_{k \geq 0} (k+2)\|\nabla u^0_h\|_{L^1(B^k_x)} \sum_{K \in \mathcal{T}_x} \mathbf{P}_K(kh^{1/2} \leq |X_N - Z(N\Delta t, X_0)| \leq (k+1)h^{1/2}) \\ &\leq Ch^{(d+1)/2} \sum_{k \geq 0} (k+2)\|\nabla u^0_h\|_{L^1(B^k_x)} \sum_{K \in \mathcal{T}_x} \mathbf{P}_K(kh^{1/2} \leq |X_N - Z(N\Delta t, X_0)|)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Dans la suite, l'enjeu principal sera l'estimation des

$$\mathbf{P}_K(kh^{1/2} \leq |X_N - Z(N\Delta t, X_0)| \leq (k+1)h^{1/2}),$$

la transformation des probabilités en espérances par l'inégalité de Markov qui suit n'est donc pas indispensable. Cependant, les calculs qui en résultent peuvent être utilisés pour démontrer le résultat principal sur l'erreur de convergence du schéma numérique dans des cas plus simples, notamment en dimension 1.

Si $k \in \mathbf{N}^*$, d'après l'inégalité de Markov, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{K \in \mathcal{T}_x} \mathbf{P}_K(kh^{1/2} \leq |X_N - Z(N\Delta t, X_0)|) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_x} \mathbf{P}_K(h^{-1/2}|X_N - Z(N\Delta t, X_0)| \geq k) \\ &\leq k^{-p} \sum_{K \in \mathcal{T}_x} \mathbf{E}_K[h^{-p/2}|X_N - Z(N\Delta t, X_0)|^p] \\ &\leq k^{-p}h^{-p/2} \sum_{K \in \mathcal{T}_x} \mathbf{E}_K[|X_N - Z(N\Delta t, X_0)|^p].\end{aligned}$$

Mais la suite $(k/(k+1))_k$ est bornée par une certaine constante $C > 0$, donc on peut écrire

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_x} \mathbf{P}_K(kh^{1/2} \leq |X_N - Z(N\Delta t, X_0)|) \leq C(k+1)^{-p}h^{-p/2} \sum_{K \in \mathcal{T}_x} \mathbf{E}_K[|X_N - Z(N\Delta t, X_0)|^p] \tag{2.3}$$

ce qui permet de récupérer le cas $k = 0$. Il s'agit donc maintenant d'étudier l'écart moyen entre les caractéristiques aléatoires et déterministes

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_x} \mathbf{E}_K[|X_N - Z(N\Delta t, X_0)|^p].$$

Section 3

3.1 Étude de l'écart entre les caractéristiques déterministes et aléatoires

On fixe des entiers $p \in \mathbf{N}$ et $N \in \mathbf{N}$, et on étudie pour $x := 0$ la quantité

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_x} \mathbf{E}_K[|X_N - Z(N\Delta t, X_0)|^p].$$

Notons pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbf{R}^d$,

$$\|Y\|_{p,\mathcal{T}_0} := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_0} \mathbf{E}_K[|Y|^p] \right)^{1/p},$$

qui est une norme sur l'espace des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ ayant des moments d'ordre p finis sous tous les $\mathbf{P}_K$, $K \in \mathcal{T}_0$. Remarquons que

$$\begin{aligned}
&\|X_N - Z(N\Delta t, X_0)\|_{p,\mathcal{T}_0} \\
&\leq \left\| X_N - Z(N\Delta t, X_0) + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} [a(X_n) - a(Z(n\Delta t, X_0))] \right\|_{p,\mathcal{T}_0} + \Delta t \left\| \sum_{n=0}^{N-1} [a(X_n) - a(Z(n\Delta t, X_0))] \right\|_{p,\mathcal{T}_0} \\
&\leq \left\| X_N - Z(N\Delta t, X_0) + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} [a(X_n) - a(Z(n\Delta t, X_0))] \right\|_{p,\mathcal{T}_0} \\
&\qquad + \mathrm{Lip}(a)\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \|X_n - Z(n\Delta t, X_0)\|_{p,\mathcal{T}_0}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Si l'on parvient à majorer le premier terme du membre de droite, on pourra majorer $\|X_N - Z(N\Delta t, X_0)\|_{p,\mathcal{T}_0}$ en utilisant le lemme de Grönwall. Par définition de $Z(\cdot, X_0)$ comme solution de (1.2), on écrit

$$\begin{aligned}
Z(N\Delta t, X_0) - X_0 &= -\int_0^{N\Delta t} a(Z(s, X_0))\mathrm{d}s \\
&= -\sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} a(Z(s, X_0))\mathrm{d}s \\
&= -\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} a(Z(n\Delta t, X_0)) - \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} [a(Z(s, X_0)) - a(Z(n\Delta t, X_0))]\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Mais a étant Lipschitz et bornée,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} [a(Z(s, X_0)) - a(Z(n\Delta t, X_0))]\mathrm{d}s \right| &\leq \mathrm{Lip}(a) \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} |Z(s, X_0)) - Z(n\Delta t, X_0)|\mathrm{d}s \\
&\leq \mathrm{Lip}(a) \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_{n\Delta t}^{s} |a(Z(\sigma, X_0))|\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}s \\
&\leq \mathrm{Lip}(a)\|a\|_\infty N\Delta t^2 \\
&\leq \mathrm{Lip}(a)\|a\|_\infty \Delta t e^{N\Delta t}
\end{aligned}$$

car

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x \leq 1 + x \leq e^x.$$

On a aussi supposé $\Delta t \leq \theta h$ et $h \leq 1$, donc $\Delta t \leq \theta h \leq \theta h^{1/2}$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\left\| Z(N\Delta t, X_0) - X_0 + \sum_{n=0}^{N-1} a(Z(n\Delta t, X_0)) \right\|_{p,\mathcal{T}_0} \leq Ch^{1/2} e^{CN\Delta t} \qquad (3.2)$$

Intéressons nous maintenant à la quantité

$$Q_p^N := \left\| X_N - X_0 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} a(X_n) \right\|_{p,\mathcal{T}_0}^p = \sum_{K \in \mathcal{T}_0} \mathbf{E}_K \left[\left| X_N - X_0 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} a(X_n) \right|^p \right],$$

qui mesure à quel point les caractéristiques aléatoires satisfont le schéma d'Euler explicite. On décompose Q_p^N selon les trajectoires de $(X_n)_n$, en les classant selon leurs fluctuations autour du champ de vitesse $-a$:

$$Q_p^N \leq h^{p/2} \sum_{K \in \mathcal{T}_0} \sum_{k \geq 0} (k+1)^p \mathbf{P}_K \left(kh^{1/2} \leq \sup_{1 \leq n \leq N} \left| X_N - X_0 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} a(X_n) \right| < (k+1)h^{1/2} \right).$$

On introduit pour tout $k \geq 0$, $\mathcal{T}_k^N$, l'ensemble des cellules J_N telles qu'il existe $(J_0, \dots, J_{n-1})$ des cellules vérifiant $J_0 \in \mathcal{T}_0$ et pour tout $0 \leq i \leq N-1$, soit $J_{i+1} = J_i$, soit $J_{i+1} \in J_i^-$, ainsi que

$$kh^{1/2} \leq \sup_{1 \leq n \leq N} \left| y_{J_{n-1},J_n} - e_{J_0} + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} a(y_{J_{i-1},J_i}) \right| < (k+1)h^{1/2},$$

où $y_{J_{-1},J_0} = e_{J_0}$, $y_{J_{i+1},J_i} = e_{J_i}$ si $J_i = J_{i+1}$, et $y_{J_{i+1},J_i} = x_{J_i,J_{i+1}}$ si $J_{i+1} \in J_i^-$. En fait, $\mathcal{T}_k^N$ est l'ensemble des cellules que peut valoir K_N sous $\mathbf{P}_K$, avec $K \in \mathcal{T}_0$, sachant l'évènement

$$\left\{ kh^{1/2} \leq \sup_{1 \leq n \leq N} \left| X_N - X_0 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} a(X_n) \right| < (k+1)h^{1/2} \right\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Q_p^N \leq h^{p/2} &\sum_{K \in \mathcal{T}_0} \sum_{k \geq 0} \sum_{L \in \mathcal{T}_k^N} (k+1)^p \\ &\times \mathbf{P}_K \left(kh^{1/2} \leq \sup_{1 \leq n \leq N} \left| X_N - X_0 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} a(X_n) \right| < (k+1)h^{1/2}, K_N = L \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

D'après (1.3), le cardinal de $\mathcal{T}_0$ est majoré par $Ch^{-d/2}$, pour une constante $C > 0$. Dans le lemme suivant, on estime le cardinal de $\mathcal{T}_k^N$, pour $k \in \mathbf{N}$.

Lemme 3.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$,*

$$\mathrm{card}(\mathcal{T}_k^N) \leq Ce^{CN\Delta t}(k+1)^d h^{-d/2}.$$

Preuve. Soit $k \geq 0$. On considère $(J_0, \dots, J_N)$ des cellules telles que $J_0 \in \mathcal{T}_0$ et

$$kh^{1/2} \leq \sup_{1 \leq n \leq N} \left| y_{J_{n-1},J_n} - e_{J_0} + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} a(y_{J_{i-1},J_i}) \right| < (k+1)h^{1/2}.$$

Posons

$$y_0 := e_{J_0}, y^1 := y_{J_0,J_1}, \dots, y^N := y_{J_{N-1},J_N},$$

alors

$$\sup_{1 \leq n \leq N} \left| y^n - y^0 + \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} a(y^i) \right| (k+1)h^{1/2}.$$

Par un calcul analogue à celui fait au début de cette partie, on montre que

$$\sup_{1 \leq n \leq N} \left| y^n - Z(n\Delta t, y^0) + \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} [a(y^i) - a(Z(i\Delta t, y^0))] \right| \leq (k+1)h^{1/2}(1 + CN\Delta t) \leq (k+1)h^{1/2}e^{CN\Delta t}.$$

Par caractère Lipschitz de a et par lemme de Grönwall, on en déduit que

$$|y^N - Z(N\Delta t, y^0)| \leq Ce^{CN\Delta t}(k+1)h^{1/2}.$$

Puisque $|y^0| \leq h^{1/2}$, par stabilité des solutions de (1.2),

$$|y^N - Z(N\Delta t, 0)| \leq Ce^{CN\Delta t}(k+1)h^{1/2}.$$

Mais cette majoration tient pour tout $x \in J_N$, pas seulement y^N. En effet, si $x \in J_N$, comme $y^N \in J_N$ et $h \leq 1$, $|x - y^N| \leq h \leq h^{1/2}$. Donc on peut trouver une constante $C' > 0$ telle que

$$J_N \subset \mathcal{B}(Z(N\Delta t, 0), C'e^{C'N\Delta t}(k+1)h^{1/2}),$$

donc toutes les cellules de $\mathcal{T}_k^N$ sont inclues dans cette boule. Pour un $C > 0$, le volume de cette boule est majoré par $Ce^{CN\Delta t}(k+1)h^{d/2}$, donc avec (1.3), on a bien

$$\operatorname{card}(\mathcal{T}_k^N) \leq Ce^{CN\Delta t}(k+1)^d h^{-d/2}.$$

□

Au regard du Corollaire 2.3, on introduit la décomposition suivante

$$\begin{aligned} X_N - X_0 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} a(X_n) &= \sum_{n=0}^{N-1} (X_{n+1} - X_n + \Delta t a(X_n)) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (X_{n+1} - e_{K_n} + \Delta t a(X_n)) + \sum_{n=0}^{N-1} (e_{K_n} - X_n), \end{aligned}$$

et on note $S_0 = R_0 := 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$S_n := \sum_{n=0}^{N-1} (X_{n+1} - e_{K_n} + \Delta t a(X_n)), \quad R_n := \sum_{n=0}^{N-1} (e_{K_n} - X_n).$$

Sur l'évènement

$$\left\{ kh^{1/2} \leq \sup_{1 \leq n \leq N} \left| X_N - X_0 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} a(X_n) \right| < (k+1)h^{1/2} \right\},$$

on a soit $\sup_{1 \leq n \leq N} |S_n| \geq (k/2)h^{1/2}$, soit $\sup_{1 \leq n \leq N} |R_n| \geq (k/2)h^{1/2}$, donc par (3.3),

$$\begin{aligned} h^{-p/2} Q_p^N \leq & \sum_{K \in \mathcal{T}_0} \sum_{k \geq 0} \sum_{L \in \mathcal{T}_k^N} (k+1)^p \mathbf{P}_K \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |S_n| \geq \frac{k}{2} h^{1/2}, K_N = L \right) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_0} \sum_{k \geq 0} \sum_{L \in \mathcal{T}_k^N} (k+1)^p \mathbf{P}_K \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |R_n| \geq \frac{k}{2} h^{1/2}, K_N = L \right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Regardons le premier terme du membre de droite. On rappelle que $\operatorname{card}(\mathcal{T}_0) \leq Ch^{-d/2}$, avec $C > 0$ une constante, d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_0} \sum_{k \geq 0} \sum_{L \in \mathcal{T}_k^N} (k+1)^p \mathbf{P}_K \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |S_n| \geq \frac{k}{2} h^{1/2}, K_N = L \right) \\ & \leq Ch^{-d/2} \sum_{k \geq 0} (k+1)^p \sup_{K \in \mathcal{T}} \mathbf{P}_K \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |S_n| \geq \frac{k}{2} h^{1/2} \right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Lemme 3.2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout entier $k > CN\Delta t h^{1/2}$,*

$$\sup_{K \in \mathcal{T}} \mathbf{P}_K \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |S_n| \geq \frac{k}{2} h^{1/2} \right) \leq C[e^{-k^2/(CN\Delta t)} + e^{-k/(Ch^{1/2})}].$$

Preuve. Soit $k \in \mathbf{N}$, on fixe $K \in \mathcal{T}$ et on pose $M_0 := 0$,

$$\forall n \geq 1, \quad M_n := \sum_{i=0}^{n-1} (X_{i+1} - e_{K_i} - \mathbf{E}_K^i[X_{i+1} - e_{K_i}]).$$

Sous $\mathbf{P}_K$, on vérifie que $(M_n)_n$ est une martingale pour la filtration $(\sigma(K_0, \dots, K_n))_n$, et par Corollaire 2.3, il existe $C > 0$ tel que

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |M_n - S_n| \leq \sup_{0 \leq n \leq N} \sum_{i=0}^{n-1} C\Delta t h \leq CN\Delta t h,$$

soit

$$\sup_{0 \leq n \leq N} |S_n| \leq \sup_{0 \leq n \leq N} |M_n| + CN\Delta t h.$$

Sur l'évènement $\left\{\sup_{0 \leq n \leq N} |S_n| \geq kh^{1/2}\right\}$, on a donc soit $\sup_{0 \leq n \leq N} |M_n| \geq (k/4)h^{1/2}$, soit $CNh\Delta t \geq (k/4)h^{1/2}$. En prenant $k > CN\Delta t h^{1/2}$, seule la première option est possible, d'où

$$\mathbf{P}_K \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |S_n| \geq \frac{k}{2} h^{1/2} \right) \leq \mathbf{P}_K \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |M_n| \geq \frac{k}{4} h^{1/2} \right).$$

On utilise alors une inégalité de concentration pour les martingales, démontrée en annexe.

Proposition 3.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $d \in \mathbf{N}^*$. Il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de d telle pour toute martingale $(Y_n)_n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, pour une filtration $(\mathcal{H}_n)_n$, satisfaisant*
- $Y_0 = 0$,
- $\forall n \geq 0, \quad |Y_{n+1} - Y_n| \leq 1$,
- *il existe $v > 0$ tel que*

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbf{E}[|Y_{n+1} - Y_n|^2 | \mathcal{H}_n] \leq v,$$

on a

$$\forall u > 0, \quad \mathbf{P} \left(\sup_{0 \leq k \leq n} |Y_k| \geq u \right) \leq c[e^{-u^2/(cnv)} + e^{-u/c}].$$

On a $M_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$|M_{n+1} - M_n| = |X_{n+1} - e_{K_n} - \mathbf{E}_K^n[X_{n+1} - e_{K_n}]| = |X_{n+1} - \mathbf{E}_K| \leq h.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_K^n[|M_{n+1} - M_n|^2] &= \mathbf{E}_K^n[|X_{n+1} - e_{K_n} - \mathbf{E}_K^n[X_{n+1} - e_{K_n}]|^2] \\
&= \mathrm{Var}_K^n(X_{n+1} - e_{K_n}) \\
&\leq \mathbf{E}_K^n[|X_{n+1} - e_{K_n}|^2] \\
&\leq \mathbf{E}_K^n \left[\sum_{L \in K_n^-} p_{K_n \to L}(x_{K_n,L} - e_{K_n})^2 \right] \\
&\leq h^2 \sup_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in K^-} p_{K \to L} \\
&\leq -h^2 \sup_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in K^-} \frac{\langle a_{K \to L}, n_{K \to L} \rangle \Delta t |K \cap L|}{|K|} \\
&\leq h^2 \|a\|_\infty \Delta t \sup_{K \in \mathcal{T}} \left(\frac{1}{|K|} \sum_{L \sim K} |K \cap L| \right),
\end{aligned}$$

et par (1.3),

$$\sup_{K\in\mathcal{T}}\left(\frac{1}{|K|}\sum_{L\sim K}|K\cap L|\right)\leq \alpha h^{-1},$$

d'où l'existence d'une constante $C>0$ telle que

$$\mathbf{E}_K^n[|M_{n+1}-M_n|^2]\leq Ch\Delta t.$$

Ces calculs montrent que l'on peut appliquer la Proposition 3.2 à $(h^{-1}M_n)_n$, ce qui conclut. $\square$

De cette proposition et de l'inégalité (3.5), on déduit qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\begin{aligned}
&\sum_{K\in\mathcal{T}_0}\sum_{k\geq 0}(k+1)^p\mathbf{P}_K\left(\sup_{0\leq n\leq N}|S_n|\geq\frac{k}{2}h^{1/2}\right)\\
&\leq Ch^{-d/2}\left[CN\Delta t h^{1/2}(1+CN\Delta t h^{1/2})^p+\sum_{k>CN\Delta t h^{1/2}}(k+1)^pC[e^{-k^2/(CN\Delta t)}+e^{-k/(Ch^{1/2})}\right]\\
&\leq Ch^{-d/2}\left[N\Delta t(1+CN\Delta t)^p+\sum_{k\in\mathbf{N}}(k+1)^p[e^{-k^2/(CN\Delta t)}+e^{-k/(Ch^{1/2})}\right],
\end{aligned}\tag{3.6}$$

Il faut maintenant étudier le terme

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_0}\sum_{k\geq 0}\sum_{L\in\mathcal{T}_k^N}(k+1)^p\mathbf{P}_K\left(\sup_{0\leq n\leq N}|R_n|\geq\frac{k}{2}h^{1/2},K_N=L\right)$$

3.2 Inversion de la chaîne de Markov

Soit $N\in\mathbf{N}$. Remarquons que

$$\sup_{1\leq n\leq N}|R_n|=\sup_{1\leq n\leq N}\left|\sum_{i=1}^{n-1}(e_{K_i}-x_{K_i,K_{i-1}})\mathbf{1}_{\{K_{i-1}\neq K_i\}}\right|,$$

donc en notant pour tout $0\leq n\leq N$, $\overleftarrow{K}_n^N:=K_{N-n}$, on a

$$\sup_{1\leq n\leq N}|R_n|=\sup_{1\leq n\leq N}\left|\sum_{i=1}^{n-1}(e_{\overleftarrow{K}_n^N}-x_{\overleftarrow{K}_i^N,\overleftarrow{K}_{i+1}^N})\mathbf{1}_{\{\overleftarrow{K}_{i+1}^N\neq\overleftarrow{K}_i^N\}}\right|.$$

La suite $(K_n)_n$ étant une chaîne de Markov, la chaîne inversée $(\overleftarrow{K}_n^N)_{0\leq n\leq N}$ est aussi une chaîne de Markov, mais on ne sait a priori rien sur son noyau de transition. On a vu que puisque le champ a est indépendant du temps, les inverses des caractéristiques associées à a sont les caractéristiques associées à $-a$. On va donc comparer les lois de la chaîne inversée $(\overleftarrow{K}_n^N)_{0\leq n\leq N}$ et de la chaîne associée à $-a$, de noyau de transitions $(q_{K\to J})_{K,J}$. Mais comme on l'a déjà évoqué, la condition CFL qui assure que $(p_{K\to J})_{K,J}$ est un noyau de transitions ne garantit rien sur $(q_{K\to J})_{K,J}$. On va donc modifier un peu les $q_{K\to J}$ pour obtenir un noyau de transitions.

Proposition 3.4 *Notons*

$$\forall K\in\mathcal{T},\quad \delta_K:=\frac{1}{|K|}\int_K \mathrm{div}(a)(x)\mathrm{d}x.$$

Pour tout pas de temps $\Delta t>0$ respectant la condition

$$\exists 0<\eta<1,\quad \|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}\Delta t<1-\eta\tag{3.7}$$

le noyau défini par

$$\begin{aligned}\gamma_{K\to J} &:= \frac{1}{1+\delta_K\Delta t} q_{K\to J} \quad \textit{si } J \in K^+,\\ \gamma_{K\to K} &:= 1 - \sum_{J\in K^+} \frac{1}{1+\delta_K\Delta t} q_{K\to J},\\ \gamma_{K\to J} &:= 0 \quad \textit{si } J \in \mathcal{T}\setminus(K^+\cup\{K\})\end{aligned}$$

est un noyau de transition vérifiant $\gamma_{K\to K} = (1+\delta_K\Delta t)^{-1} p_{K\to K}$.

Preuve. Soit $K\in\mathcal{T}$. Par (3.7), on a $1+\delta_K\Delta t > 0$. Par formule de Stokes,

$$\begin{aligned}\delta_K\Delta t &= \frac{\Delta t}{|K|}\int_K \mathrm{div}(a)(x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\Delta t}{|K|}\sum_{L\sim K}\int_{K\cap L}\langle a(x), n_{K\to L}\rangle \mathrm{d}x\\ &= \frac{\Delta t}{|K|}\sum_{L\sim K}|K\cap L|\langle a_{K\to L}, n_{K\to L}\rangle\\ &= \sum_{L\in K^+} q_{K\to L} - \sum_{L\in K^-} p_{K\to L}\\ &= \sum_{L\sim K} q_{K\to L} - \sum_{L\sim K} p_{K\to L},\end{aligned}$$

d'où

$$p_{K\to K} - 1 + (1+\delta_K\Delta t)(1-\gamma_{K\to K}) = \delta_K\Delta t,$$

soit $\gamma_{K\to K} = (1+\delta_K\Delta t)^{-1}p_{K\to K}$. Ceci montre que les $\gamma_{K\to J}$ sont tous positifs, de somme égale à 1, donc forment un noyau de transitions. □

Dans toute la suite, on supposera (3.7) vérifée. Avec la proposition précédente, on sait qu'il existe une suite de variables aléatoires $(\Gamma_n)_n$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, ainsi qu'une famille de probabilités $(\mathbf{Q}_K)_K$ telle que sous chaque $\mathbf{Q}_K$, $(\Gamma_n)_n$ est une chaîne de Markov de noyau de transitions $(\gamma_{L\to J})_{L,J\in\mathcal{T}}$ partant de K. On notera $\mathbf{E}_K^{\mathbf{Q}}$ l'espérance sous $\mathbf{Q}_K$. Le lien entre cette nouvelle chaîne $(\gamma_n)_n$ et la chaîne inversée $(\overleftarrow{K}_n^N)_{0\le n\le N}$ est donné par la proposition suivante.

Proposition 3.5 *Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $(K,L)\in\mathcal{T}^2$ et toute fonction mesurable $\psi : \mathcal{T}^{N+1}\to\mathbf{R}_+$,*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{C}[1-\|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}\Delta t]^N \mathbf{E}_L^{\mathbf{Q}}[\psi(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_N)\mathbf{1}_{\{\Gamma_N=K\}}]\\ &\le \mathbf{E}_K[\psi(\overleftarrow{K}_0^N,\ldots,\overleftarrow{K}_N^N)\mathbf{1}_{\{K_N=L\}}]\\ &\le C[1+\|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}\Delta t]^N \mathbf{E}_L^{\mathbf{Q}}[\psi(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_N)\mathbf{1}_{\{\Gamma_N=K\}}]\end{aligned}$$

Preuve. Par un procédé d'approximations, il suffit de démontrer le résultat pour les fonctions de la forme $\mathbf{1}_{(J_0,\ldots,J_N)}$, où $(J_0,\ldots,J_N)\in\mathcal{T}^{N+1}$, $J_0 = L$ et $J_N = K$. Soit ψ une telle fonction. Alors $(K_n)_n$ étant une chaîne de Markov de noyau de transition $(p_{K\to J})_{K,J}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_K[\psi(\Gamma_0,\ldots,\Gamma_N)\mathbf{1}_{\{\Gamma_N=K\}}] &= \mathbf{P}_{J_N}(\overleftarrow{K}_0^N = J_0,\ldots,\overleftarrow{K}_{N-1}^N = J_{N-1},\overleftarrow{K}_N^N = J_N)\\ &= \mathbf{P}_{J_N}(K_0 = J_N, K_1 = J_{N-1},\ldots,K_N = J_0)\\ &= p_{J_N,J_{N-1}}p_{J_{N-1},J_{N-2}}\times\cdots\times p_{J_1,J_0}.\end{aligned}$$

En remarquant que pour toutes cellules $K\sim J$,

$$q_{K\to J} = \frac{|J|}{|K|}p_{J\top K},$$

et en utilisant la Proposition 3.4, on montre que

$$\forall 0 \leq n \leq N-1, \quad \gamma_{J_n \to J_{n+1}} = \frac{|J_{n+1}|}{|J_n|(1+\delta_{J_n}\Delta t)} p_{J_{n+1},J_n}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_K[\psi(\Gamma_0,\dots,\Gamma_N)\mathbf{1}_{\{\Gamma_N=K\}}] &= \left(\prod_{n=0}^{N-1}(1+\delta_{J_n}\Delta t)\right)\frac{|J_0|}{|J_N|}\gamma_{J_0,J_1}\times\cdots\times\gamma_{J_{N-1},J_N} \\
&= \left(\prod_{n=0}^{N-1}(1+\delta_{J_n}\Delta t)\right)\frac{|J_0|}{|J_N|}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_L[\psi(\Gamma_0,\dots,\Gamma_N)\mathbf{1}_{\{\Gamma_N=K\}}.
\end{aligned}$$

Mais d'après (1.3), si J est une cellule, $\beta^{-1}h^d \leq |J| \leq h^d$, donc la quantitée $|J_0|/|J_N|$ est bornée. Et

$$|1-\|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}\Delta t| \leq 1+\delta_J\Delta t \leq |1+\|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}\Delta t|,$$

donc avec (3.7),

$$0 \leq 1-\|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}\Delta t \leq 1+\delta_J\Delta t \leq 1+\|\mathrm{div}(a)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}\Delta t,$$

ce qui conclut. □

On rappelle que

$$\sup_{1\leq n\leq N}|R_n| = \sup_{1\leq n\leq N}\left|\sum_{i=1}^{n-1}(e_{\overleftarrow{K}^N_n} - x_{\overleftarrow{K}^N_i,\overleftarrow{K}^N_{i-1}})\mathbf{1}_{\{K_{i-1}\neq K_i\}}\right|,$$

et que l'on cherche à majorer

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_0}\sum_{k\geq 0}\sum_{L\in\mathcal{T}^N_k}(k+1)^p\mathbf{P}_K\left(\sup_{0\leq n\leq N}|R_n| \geq \frac{k}{2}h^{1/2}, K_N = L\right).$$

Au vu de cette proposition, on introduit l'analogue de $(R_n)_n$ pour la chaîne $(\Gamma_n)_n$,

$$\Xi_0\ 0, \quad \Xi_n = \sum_{i=0}^{n-1}(e_{\Gamma_i} - x_{\Gamma_i,\Gamma_{i+1}})\mathbf{1}_{\{\Gamma_{i+1}\neq\Gamma_i\}}, \quad n\geq 1.$$

D'après la Proposition 3.5, il existe $C>0$ tel que alors pour tous $k\in\mathbf{N}$, $K,L\in\mathcal{T}$,

$$\mathbf{P}_K\left(\sup_{1\leq n\leq N}|R_n| \geq \frac{k}{2}h^{1/2}, K_N = L\right) \leq C(1+C\Delta t)^N\mathbf{Q}_L\left(\sup_{1\leq n\leq N}|\Xi_n| \geq \frac{k}{2}h^{1/2}, K_N = K\right) \tag{3.8}$$

On va montrer que $(\Xi_n)_n$ est une martingale sous $\mathbf{Q}_K$, et utiliser l'inégalité de concentration de la Proposition 3.3 comme dans la partie précédente.

Proposition 3.6 *Pour toute cellule $K\in\mathcal{T}$, la suite $(\Xi_n)_n$ est une martingale sous $\mathbf{Q}_K$ pour la filtration $(\sigma(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n))_n$.*

Preuve. Il est clair que pour tout $n\in\mathbf{N}$, Ξ_n est $\sigma(\Gamma_0,\dots,\Gamma_n)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_L[\Xi_{n+1}|\Gamma_0,\dots,\Gamma_n] - \Xi_n &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_L[e_{\Gamma_n} - x_{\Gamma_{n+1},\Gamma_n}|\Gamma_0,\dots,\Gamma_n] \\
&= \sum_{J\in\Gamma_n^+}\gamma_{\Gamma_n\to J}(e_{\Gamma_n - x_{J,\Gamma_n}}) \\
&= (1+\delta_{\Gamma_n}\Delta t)^{-1}\sum_{J\in\Gamma_n^+}q_{\Gamma_n,J}(e_{\Gamma_n} - x_{J,\Gamma_n}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

par définition des e_K. □

En reprenant la démarche de la preuve du Lemme 3.2, on montre le lemme suivant.

Lemme 3.7 *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \geq 0$,*

$$\sup_{L \in \mathcal{T}} \mathbf{Q}_L \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |\Xi_n| > \frac{k}{2} h^{1/2} \right) \leq C[e^{-k^2/(CN\Delta t)} + e^{-k/(Ch^{1/2})}].$$

D'après ce lemme et (3.8), il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&\sum_{K \in \mathcal{T}_0} \sum_{k \geq 0} \sum_{L \in \mathcal{T}_k^N} (k+1)^p \mathbf{P}_K \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |R_n| \geq \frac{k}{2} h^{1/2}, K_N = L \right) \\
&\leq C(1 + C\Delta t)^N \sum_{K \in \mathcal{T}_0} \sum_{k \geq 0} \sum_{L \in \mathcal{T}_k^N} (k+1)^p \mathbf{Q}_L \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |\Xi_n| \geq \frac{k}{2} h^{1/2}, K_N = K \right) \\
&\leq C(1 + C\Delta t)^N \sum_{k \geq 0} \mathrm{card}(\mathcal{T}_k^N)(k+1)^p \sup_{L \in \mathcal{T}} \mathbf{Q}_L \left(\sup_{0 \leq n \leq N} |\Xi_n| \geq \frac{k}{2} h^{1/2} \right) \\
&\leq Ch^{-d/2} e^{CN\Delta t} \sum_{k \geq 0} (k+1)^{d+p} [e^{-k^2/(CN\Delta t)} + e^{-k/(Ch^{1/2})}] \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

D'après (3.4), (3.6) et (3.9), il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
h^{-p/2} Q_p^N &\leq Ch^{-d/2} N\Delta t(1 + CN\Delta t)^p + Ch^{-d/2} e^{CN\Delta t} \sum_{k \geq 0} (k+1)^{p+d} [e^{-k^2/(CN\Delta t)} + e^{-k/(CNh^{1/2})}] \\
&\leq Ch^{-d/2} N\Delta t(1 + CN\Delta t)^p + Ch^{-d/2} e^{CN\Delta t} \sum_{k \geq 0} (k+1)^{p+d} [e^{-k/(CN\Delta t)} + e^{-k/(Ch^{1/2})}].
\end{aligned}$$

Lemme 3.8 *Pour tous $n \geq 1$ et $\alpha > 0$,*

$$\sum_{k \geq 0} (k+1)^n e^{-k/\alpha} \leq 2^n (n+1)!(1+\alpha)^n.$$

PREUVE. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha > 0$, on note

$$f_n : x \in \mathbf{R} \mapsto (x+1)^n + e^{-x/\alpha}.$$

On a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_n'(x) = (n - \alpha^{-1}(x+1))(x+1)^{n-1} e^{-x/\alpha},$$

donc $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \leq \alpha n - 1$. Par comparaison avec une intégrale, et comme pour tout $x \geq 1$, $1 + x \leq 2x$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{+\infty} (k+1)^n e^{-k/\alpha} &\leq \int_{\lfloor n\alpha \rfloor}^{+\infty} (x+1)^n e^{-x/\alpha} \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^{+\infty} (x+1)^n e^{-x/\alpha} \mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^1 (x+1)^n e^{-x/\alpha} \mathrm{d}x + 2^n \int_1^{+\infty} x^n e^{-x/\alpha} \mathrm{d}x \\
&\leq 2^n \alpha + 2^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x/\alpha} \mathrm{d}x \\
&\leq 2^n \left(\alpha + \alpha^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x \right) \\
&\leq 2^n \alpha (1 + \alpha^{n-1} \Gamma(n+1)) \\
&\leq 2^n \alpha (1 + (n+1)! \alpha^{n-1}).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n\alpha \rfloor}(k+1)^n e^{-k/\alpha} \leq (1+n\alpha)^n,$$

d'où, comme $(n+1)! \geq 1$ et $1+\alpha^{n-1} \leq (1+\alpha)^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}(k+1)^n e^{-k/\alpha} &\leq 2^n\alpha(1+(n+1)!\alpha^{n-1}) + (1+n\alpha)^n \\ &\leq 2^n(n+1)!\alpha(1+\alpha^{n-1}) + (1+\alpha)^n \\ &\leq 2^n(n+1)!(1+\alpha)(1+\alpha)^{n-1} + (1+\alpha)^n \\ &\leq 2^n(n+1)!(1+\alpha)^n\end{aligned}$$

$\square$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}(k+1)^{p+d}[e^{-k/(CN\Delta t)} + e^{-k/(CNh^{1/2})}] &\leq 2^{p+d}(p+d+1)!((1+CN\Delta t)^{p+d} + (1+Ch^{1/2})^{p+d}) \\ &\leq 2^{p+d}(p+d+1)!((1+CN\Delta t)^{p+d} + (1+C)^{p+d}) \\ &\leq 2^{p+d+1}(p+d+1)!(1+C)^{p+d}(1+CN\Delta t)^{p+d},\end{aligned}$$

donc il existe une constante $C_p > 0$ dépendant de p telle que

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)^{p+d}[e^{-k/(CN\Delta t)} + e^{-k/(CNh^{1/2})}] \leq C_p(1+CN\Delta t)^{p+d}.$$

Par conséquent, en gardant à l'esprit que $h \leq 1$,

$$\begin{aligned}Q_p^N &\leq Ch^{(p-d)/2}N\Delta t(1+CN\Delta t)^p + C_pCh^{(p-d)/2}e^{CN\Delta t}(1+CN\Delta t)^{p+d} \\ &\leq h^{(p-d)/2}e^{2pCN\Delta t} + C_pCh^{(p-d)/2}e^{2(p+d)CN\Delta t} \\ &\leq h^{(p-d)/2}C_pe^{C_pN\Delta t}\end{aligned}$$

soit

$$\left\| X_N - X_0 + \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}a(X_n)\right\|_{p,\mathcal{T}_0} \leq C_ph^{1/2-d/(2p)}e^{C_pN\Delta t} \tag{3.10}$$

On revient à l'inégalité (3.1),

$$\begin{aligned}&\|X_N - Z(N\Delta t, X_0)\|_{p,\mathcal{T},0} \\ &\leq \left\| X_N - Z(N\Delta t, X_0) + \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}[a(X_n) - a(Z(n\Delta t, X_0))]\right\|_{p,\mathcal{T}_0} + \mathrm{Lip}(a)\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|X_n - Z(n\Delta t, X_0)\|_{p,\mathcal{T}_0}.\end{aligned}$$

D'après (3.2) et (3.10), il existe $C_p > 0$ dépendant de p telle que

$$\begin{aligned}\left\| X_N - Z(N\Delta t, X_0) + \Delta t\sum_{n=0}^{N-1}[a(X_n) - a(Z(n\Delta t, X_0))]\right\|_{p,\mathcal{T}_0} &\leq C_ph^{1/2-d/(2p)}e^{C_pN\Delta t} + C_ph^{1/2}e^{C_pN\Delta t} \\ &\leq 2C_ph^{1/2-d/(2p)}e^{C_pN\Delta t},\end{aligned}$$

donc

$$\|X_N - Z(N\Delta t, X_0)\|_{p,\mathcal{T}_0} \leq C_ph^{1/2-d/(2p)}e^{C_pN\Delta t} + C_p\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}\|X_n - Z(n\Delta t, X_0)\|_{p,\mathcal{T}_0}.$$

Le lemme de Grönwall permet alors de montrer que

$$\|X_N - Z(N\Delta t, X_0)\|_{p,\mathcal{T}_0} \leq C_p h^{1/2-d/(2p)} e^{C_p N\Delta t}.$$

Au tout début de la section 3, on a fixé $x = 0$ pour majorer

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_x} \mathbf{E}_K[|X_N - Z(N\Delta t, X_0)|^p].$$

Mais la preuve de la majoration ne dépend en fait pas du x choisi, on a donc

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad \sum_{K\in\mathcal{T}_x} \mathbf{E}_K[|X_N - Z(N\Delta t, X_0)|^p] \leq C_p h^{p/2-d/2} e^{C_p N\Delta t} \tag{3.11}$$

3.3 Majoration de l'erreur de convergence

D'après les inégalités (2.3) et (3.11), il existe une constante $C_p > 0$ dépendant de p telle que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_x} \mathbf{P}_K(kh^{1/2} \leq |X_N - Z(N\Delta t, X_0)|) \leq C_p(k+1)^{-p} h^{-d/2} e^{C_p N\Delta t},$$

ce qui entraîne avec (2.2)

$$\sum_{K\in\mathcal{T}_x} |K||\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)| \leq C_p h^{1/2} e^{C_p N\Delta t} \sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)^{-p}\|\nabla u_h^0\|_{L^1(B_x^k)}.$$

On intègre cette relation pour $x \in \mathbf{R}^d$. Par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d} \sum_{K\in\mathcal{T}_x} |K||\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)|\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{\substack{K\in\mathcal{T} \\ |e_K - x| \leq h^{1/2}}} |K||\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)|\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{K\in\mathcal{T}} |K||\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)| \int_{\mathbf{R}^d} \mathbf{1}_{\mathcal{B}(x,h^{1/2})}(e_K)\mathrm{d}x \\
&\leq h^{d/2} \sum_{K\in\mathcal{T}} |K||\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)|.
\end{aligned}$$

Par la définition (1.2) de B_x^k, par changement de variable $Z(N\Delta t, \cdot)$, dont on a vu en (1.9) une majoration du Jacobien, et par l'inégalité $\|\nabla u_h^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} \leq \|u^0\|_{BV(\mathbf{R}^d)}$ vue au début de la section 1.3, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^d} \|\nabla u_h^0\|_{L^1(B_x^k)}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathcal{B}(Z(N\Delta t,x), C_0 e^{C_0 N\Delta t}(k+1)h^{1/2})} |\nabla u_h^0|(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&\leq e^{CN\Delta t} \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathcal{B}(x, C_0 e^{C_0 N\Delta t}(k+1)h^{1/2})} |\nabla u_h^0(z)|\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&\leq C(k+1)^d h^{d/2} e^{CN\Delta t} \|\nabla u_h^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} \\
&\leq C(k+1)^d h^{d/2} e^{CN\Delta t} \|u^0\|_{BV(\mathbf{R}^d)}.
\end{aligned}$$

La majoration Donc par théorème de Fubini-Tonelli, il existe une constante $C_p > 0$ ne dépendant que de p telle que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} |K||\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)| \leq C_p h^{1/2} e^{C_p N\Delta t} \|\nabla u_h^0\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} \sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)^{d-p}.$$

En choisissant l'entier p tel que la série $\sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)^{d-p}$ converge, par exemple $p = d+3$, on obtient l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\sum_{K\in\mathcal{T}} |K||\bar{u}_K^N - \bar{u}(N\Delta t, e_K)| \leq C h^{1/2} e^{CN\Delta t} \|u^0\|_{BV(\mathbf{R}^d)} \tag{3.12}$$

Avec les inégalités (1.7), (1.8), (1.10) et (3.12), on montre le théorème suivant.

Théorème 3.9 *Soit $\mathcal{T}$ un maillage de $\mathbf{R}^d$, dont les cellules sont des polygones fermés, d'intérieurs disjoints. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta, \eta > 0$ tels que (1.3) et (3.7) soient vérifiées. On suppose de plus (1.6) vérifiée. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de $\|a\|_\infty$, α, β, d, $\mathrm{Lip}(a)$, η, θ et $\|u^0\|_{BV(\mathbf{R}^d)}$ telle que pour tout $N \geq 1$,*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \|u_K^N - u(N\Delta t, \cdot)\|_{L^1(K)} \leq Ch^{1/2} e^{CN\Delta t}.$$

Annexe

Dans cette annexe, on démontre la Proposition 3.3.

Proposition 3.10 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $d \in \mathbf{N}^*$. Il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de d telle pour toute martingale $(Y_n)_n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, pour une filtration $(\mathcal{H}_n)_n$, satisfaisant*

— $Y_0 = 0$,

— $\forall n \geq 0, \quad |Y_{n+1} - Y_n| \leq 1$,

— *il existe $v > 0$ tel que*

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbf{E}[|Y_{n+1} - Y_n|^2 | \mathcal{H}_n] \leq v,$$

on a

$$\forall u > 0, \quad \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq k \leq n} |Y_k| \geq u\right) \leq c[e^{-u^2/(cnv)} + e^{-u/c}].$$

Preuve. Sans perte de généralités, on peut supposer que $d = 1$. En effet,

$$\forall u > 0, \quad \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq k \leq n} |Y_k| \geq u\right) \leq \sum_{i=1}^{d} \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq k \leq n} |(Y_k)_i| \geq ud^{-1/2}\right),$$

où $(Y_k)_i$ désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de Y_k. En dimension 1, il suffit d'étudier $\mathbf{P}(\sup_{0 \leq k \leq n} Y_k \geq u)$, puis de considérer la martingale $(-Y_n)_n$ pour récupérer les valeurs absolues. On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.11 *Soit $(\mathcal{F}_n)_n$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Soient $(X_n)_n$ des variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad X_n \leq 1 \quad \mathbf{P}\text{-p.s.}, \qquad \mathbf{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 0 \quad \mathbf{P}\text{-p.s.} \tag{3.13}$$

On note $S_0 := 0$, $T_0 := 0$, et pour tout $n \geq 1$,

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad T_n := \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}).$$

Pour tout $\lambda \geq 0$, on pose $e(\lambda) := e^\lambda - 1 - \lambda$, ainsi que

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \quad Q_\lambda(x, y) := e^{\lambda y - e(\lambda) x}.$$

Alors pour tout $\lambda \geq 0$, $(Q_\lambda(T_n, S_n))_n$ est une sur-martingale.

Preuve. Soit $\lambda \geq 0$. Soit $n \in \mathbf{N}$, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, V_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable,

$$\mathbf{E}[Q_\lambda(T_{n+1}, S_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = \mathbf{E}[e^{\lambda S_{n+1} - e(\lambda) T_{n+1}} | \mathcal{F}_n] = Q_\lambda(T_n, S_n) \mathbf{E}[e^{\lambda X_{n+1}} | \mathcal{F}_n] e^{-e(\lambda) V_{n+1}}.$$

Une étude de fonction montre que l'application définie par

$$g(0) := \frac{1}{2}, \qquad \forall x \neq 0, \quad g(x) := \frac{e(x)}{x^2},$$

est croissante. Donc pour tout $x \leq 1$, $g(\lambda x) \leq g(\lambda)$, soit

$$e^{\lambda x} \leq 1 + \lambda x + x^2 e(\lambda).$$

Ainsi, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n \leq 1$, on a

$$\mathbf{E}[e^{\lambda X_{n+1}}|\mathcal{F}_n] \leq 1 + \lambda \mathbf{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] + e(\lambda)\mathbf{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] \leq 1 + e(\lambda)V_{n+1} \leq e^{e(\lambda)V_{n+1}}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{E}[Q_\lambda(T_{n+1}, S_{n+1})|\mathcal{F}_n] \leq Q_\lambda(T_{n+1}, S_{n+1}),$$

donc $(Q_\lambda(T_n, S_n))_n$ est une sur-martingale. □

Soit $n \in \mathbf{N}$. Les variables aléatoires $X_0 := 0$, $X_k := Y_n - Y_{n-1}$ si $k \leq n$, $X_k := 0$ si $k > n$, vérifient les hypothèses du lemme précédent, pour la filtration $(\mathcal{H}_n)_n$. Donc pour tout temps d'arrêt σ, par théorème d'arrêt de Doob,

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{\sigma < +\infty\}} Q_\lambda(T_\sigma, S_\sigma)] \leq \mathbf{E}[Q_\lambda(T_0, S_0)] \leq 1.$$

Soit $u > 0$. Soit σ le plus petit entier k tel que $S_k \geq u$, en prenant $\sigma = +\infty$ s'il n'existe pas de tel entier. Les variances conditionnelles des X_k étant bornées par v, on a

$$A := \{\exists k \in \mathbf{N}, \quad S_k \geq u, T_k \leq nv\} = \{\exists k \in \mathbf{N}, \quad S_k \geq u\} = \{\sigma < +\infty\},$$

donc

$$1 \geq \mathbf{E}[\mathbf{1}_{\{\sigma < +\infty\}} Q_\lambda(T_\sigma, S_\sigma)] \geq \mathbf{E}[\mathbf{1}_A e^{\lambda S_\sigma - e(\lambda) T_\sigma}] \geq \mathbf{P}(A) e^{\lambda u - e(\lambda) nv},$$

d'où

$$\mathbf{P}(\exists k \in \mathbf{N}, \quad S_k \geq u) \leq e^{-\lambda u + e(\lambda) nv}.$$

Or

$$\mathbf{P}(\exists k \in \mathbf{N}, \quad S_k \geq u) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq k \leq n} Y_k \geq u\right),$$

et une étude de fonctions montre que

$$\forall \lambda \geq 0, \quad e^{-\lambda u + e(\lambda) nv} \leq \left(\frac{nv}{u + nv}\right)^{u + nv} e^u \leq e^{-u^2/(2(u+nv))}.$$

Ceci montre que

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq k \leq n} Y_k \geq u\right) \leq e^{-u^2/(2(u+nv))}.$$

En distinguant les cas $u \leq nv$ et $u > nv$, on en déduit que

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0 \leq k \leq n} Y_k \geq u\right) \leq e^{-u^2/(4nv)} + e^{-u/4},$$

ce qui conclut. □

Bibliographie

[1] Frédéric Lagoutière François Delarue. *Probabilistic analysis of the upwind scheme for transport.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, Springer Verlag, 2011.

[2] Ronald F. Gariepy Lawrence C. Evans. *Mesure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, 2015.

[3] Julien Vovelle. *Approximation by PDEs.* 2020.