Méthode BKW pour l'équation de Schrödinger : cas faiblement non linéaire

Analyse BKW multiphase

DONNART Titouan, HOSTEIN Matthias

25 Janvier 2023

Introduction

Travail fait pour le moment :

- Méthode BKW pour l'équation de Schrödinger linéaire : développement formel, construction de la solution approchée, justification du développement.
- Développement BKW faiblement non linéaire à une phase

Introduction

Travail fait pour le moment :

- Méthode BKW pour l'équation de Schrödinger linéaire : développement formel, construction de la solution approchée, justification du développement.
- Développement BKW faiblement non linéaire à une phase

Plan

Hypothèses

Équation de Schrödinger générale :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2)u^\varepsilon$$

Hypothèses de notre étude :

- $\alpha = 1,\ V = 0,\ f : x \mapsto \lambda x^\sigma, \sigma \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$.
- La donnée initiale est de la forme :

$$u^\varepsilon(0,x) = \sum_{j\in J_0} a^\varepsilon_{0j}(x)e^{\frac{i\phi_{0j}(x)}{\varepsilon}} \quad \text{où } J_0 \text{ est au plus dénombrable.}$$

- On considère que les phases initiales sont linéaires :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists \kappa_j \in \mathbb{R}^d \mid \forall x : \phi_{0j}(x) = \kappa_j \cdot x.$$

Hypothèses

Équation de Schrödinger générale :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = V u^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2)u^\varepsilon$$

Hypothèses de notre étude :

- $\alpha = 1,\ V = 0,\ f : x \mapsto \lambda x^\sigma, \sigma \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{R}^*.$
- La donnée initiale est de la forme :

$$u^\varepsilon(0,x) = \sum_{j\in J_0} a^\varepsilon_{0j}(x) e^{\frac{i\phi_{0j}(x)}{\varepsilon}} \quad \text{où } J_0 \text{ est au plus dénombrable.}$$

- On considère que les phases initiales sont linéaires :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists \kappa_j \in \mathbb{R}^d \mid \forall x : \phi_{0j}(x) = \kappa_j \cdot x.$$

Hypothèses

Équation de Schrödinger générale :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = Vu^\varepsilon + \varepsilon^\alpha f(|u^\varepsilon|^2)u^\varepsilon$$

Hypothèses de notre étude :

- $\alpha = 1,\ V = 0,\ f : x \mapsto \lambda x^\sigma, \sigma \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{R}^*.$
- La donnée initiale est de la forme :

$$u^\varepsilon(0,x) = \sum_{j\in J_0} a^\varepsilon_{0j}(x)e^{\frac{i\phi_{0j}(x)}{\varepsilon}} \quad \text{où } J_0 \text{ est au plus dénombrable.}$$

- On considère que les phases initiales sont linéaires :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists \kappa_j \in \mathbb{R}^d \mid \forall x : \phi_{0j}(x) = \kappa_j \cdot x.$$

Hypothèses sur la solution approchée

L'équation aux dérivées partielles étudiée est donc :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = \lambda\varepsilon|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon$$

On cherche une solution approchée sous la forme :

$$u^\varepsilon_{app}(t,x) = \sum_{j\in J} a_j(t,x)e^{i\frac{\kappa_j\cdot x}{\varepsilon} - i\frac{|\kappa_j|^2 t}{2\varepsilon}}.$$

- On a déjà vu que :

  $$\phi_j(t,x) = \kappa_j\cdot x - \frac{|\kappa_j|^2 t}{2}$$

  était la solution de l'équation eikonale dans le cas où la phase initiale était linéaire et lorsque l'on considérait qu'une seule phase lorsque $V \equiv 0$.
- J est un ensemble qui peut être strictement plus grand que J_0 à cause du phénomène de résonance (voir partie suivante)

Hypothèses sur la solution approchée

L'équation aux dérivées partielles étudiée est donc :

$$i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon = \lambda\varepsilon|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon$$

On cherche une solution approchée sous la forme :

$$u^\varepsilon_{app}(t,x) = \sum_{j\in J} a_j(t,x)e^{i\frac{\kappa_j\cdot x}{\varepsilon}-i\frac{|\kappa_j|^2t}{2\varepsilon}}.$$

- On a déjà vu que :

$$\phi_j(t,x) = \kappa_j\cdot x - \frac{|\kappa_j|^2t}{2}$$

  était la solution de l'équation eikonale dans le cas où la phase initiale était linéaire et lorsque l'on considérait qu'une seule phase lorsque $V\equiv 0$.
- J est un ensemble qui peut être strictement plus grand que J_0 à cause du phénomène de résonance (voir partie suivante)

Plan

Phénomène de résonance, illustration dans le cas cubique $\sigma = 1$

On a :

$$|u^\varepsilon_{app}|^2 u^\varepsilon_{app} = \sum_{k,l,m \in J} a_k \overline{a_l} a_m e^{\frac{i}{\varepsilon}(\phi_k - \phi_l + \phi_m)}.$$

Or, $\phi_k - \phi_l + \phi_m$ vérifie l'équation eikonale si et seulement si :

$$|\kappa_k - \kappa_l + \kappa_m|^2 = |\kappa_k|^2 - |\kappa_l|^2 + |\kappa_m|^2.$$

Cette condition est équivalente à :

$$(\kappa_l - \kappa_m) \cdot (\kappa_l - \kappa_k) = 0.$$

Si $d = 1$, alors nécessairement : $\kappa_l = \kappa_m$ ou $\kappa_l = \kappa_k$: il n'y a pas de nouvelles phases.

Condition de résonance dans le cas cubique ($\sigma = 1$)

Proposition

Supposons que $d \geqslant 2$. Soient $\kappa_k, \kappa_l, \kappa_m \in \mathbb{R}^d$, notons $\kappa_j = \kappa_k - \kappa_l + \kappa_m$ et supposons que $\kappa_l \neq \kappa_k$ et $\kappa_l \neq \kappa_m$. Alors :
$\phi_k - \phi_l + \phi_m = \phi_j$ si et seulement si les extrémités des vecteurs $\kappa_j, \kappa_k, \kappa_l, \kappa_m$ forment les 4 coins d'un rectangle non dégénéré avec κ_j et κ_l opposés.

Exemple ($\sigma = 1$)

- On considère : $\kappa_1 = (0,1), \kappa_2 = (1,1), \kappa_3 = (1,0)$. Le seul mode crée est $\phi_0 = 0$.
- Cette création peut être dynamique, par exemple les phases crées peuvent interagir entre elles pour créer de nouvelles phases.

Ainsi avec ces deux exemples, on a une seule phase générée ou bien une infinité de phases générées.

Exemple ($\sigma = 1$)

- On considère : $\kappa_1 = (0,1), \kappa_2 = (1,1), \kappa_3 = (1,0)$. Le seul mode crée est $\phi_0 = 0$.
- Cette création peut être dynamique, par exemple les phases crées peuvent interagir entre elles pour créer de nouvelles phases.

Ainsi avec ces deux exemples, on a une seule phase générée ou bien une infinité de phases générées.

Exemple ($\sigma = 1$)

- On considère : $\kappa_1 = (0,1), \kappa_2 = (1,1), \kappa_3 = (1,0)$. Le seul mode crée est $\phi_0 = 0$.
- Cette création peut être dynamique, par exemple les phases crées peuvent interagir entre elles pour créer de nouvelles phases.

Ainsi avec ces deux exemples, on a une seule phase générée ou bien une infinité de phases générées.

Exemple ($\sigma = 1$)

- On considère : $\kappa_1 = (0,1), \kappa_2 = (1,1), \kappa_3 = (1,0)$. Le seul mode crée est $\phi_0 = 0$.
- Cette création peut être dynamique, par exemple les phases crées peuvent interagir entre elles pour créer de nouvelles phases.

Ainsi avec ces deux exemples, on a une seule phase générée ou bien une infinité de phases générées.

Cas $\sigma \geqslant 2$

Dans le cas où $\sigma \geqslant 2$, on a :

$$|u^{\varepsilon}_{app}|^4 u^{\varepsilon}_{app} = \sum_{h,k,l,m,p \in J} a_h \overline{a_k} a_l \overline{a_m} a_p \, e^{\frac{i}{\varepsilon}(\phi_h - \phi_k + \phi_l - \phi_m + \phi_p)}.$$

Et $\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 + \phi_5$ résout l'équation eikonale si et seulement si :

$$(\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4 + \kappa_5)^2 = \kappa_1^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - \kappa_4^2 + \kappa_5^2.$$

Ex : Prenons $p, q \in \mathbb{Z},\ p, q \neq 0,\ p \neq q$, et considérons :

$$(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5) = (pq, -q^2, -pq, p^2, p^2 - q^2).$$

Dans ce cas, on remarque que :

$$|\kappa_1|^2 - |\kappa_2|^2 + |\kappa_3|^2 - |\kappa_4|^2 + |\kappa_5|^2 = |\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4 + \kappa_5|^2 = 0.$$

La résonance a créé un terme constant !

Plan

Problème

Nous devons chercher les amplitudes a_j désormais. Comme on a différentes phases, on doit adapter le raisonnement précédent.
Pour $j \in J$, annuler le coefficient d'ordre ε donne :

$$\partial_t a_j + \kappa_j \cdot \nabla a_j = -i\lambda \sum_{\phi_{j_1} - \phi_{j_2} + \ldots + \phi_{2\sigma+1} = \phi_j} a_{j_1} \overline{a_{j_2}} \ldots a_{j_{2\sigma+1}}.$$

Condition de résonance :

$$(\kappa_{j_1}, \ldots, \kappa_{j_{2\sigma+1}}) \in \mathcal{R}_j, \text{ où}$$

$$\mathcal{R}_j = \left\{ (\kappa_{j_l})_{1 \leqslant l \leqslant 2\sigma+1}, \sum_{l=1}^{2\sigma+1} (-1)^{l+1} \kappa_{j_l} = \kappa_j \text{ et } \sum_{l=1}^{2\sigma+1} (-1)^{l+1} |\kappa_{j_l}|^2 = |\kappa_j|^2 \right\}.$$

Résolution dans le cas $d = 1, \sigma = 1$.

On a vu que :

$$\mathcal{R}_j = \left\{(l,l,j),(j,l,l), l \in J_0\right\}.$$

Donc

$$\partial_t a_j + \kappa_j \cdot \nabla a_j = -2i\lambda \sum_{l \in J_0} |a_l|^2 a_j + i\lambda |a_j|^2 a_j.$$

Or on remarque que :

$$\partial_t |a_j|^2 + \kappa_j \partial_x |a_j|^2 = 0.$$

On obtient alors :

$$|a_j(t,x)|^2 = |a_{0j}(x - t\kappa_j)|^2.$$

Donc

$$a_j(t,x) = a_{0j}(x - t\kappa_j) e^{iS_j(t,x)}$$ où S_j est une phase indépendante de ε.

Résolution dans le cas $d = 1, \sigma = 1$.

$$a_j(t,x) = a_{0j}(x - t\kappa_j)e^{iS_j(t,x)}$$ où S_j est une phase indépendante de ε.

En réinjectant dans l'équation de transport, on obtient :

$$(\partial_t + \kappa_j\partial_x)S_j(t,x) = -2\lambda \sum_{l\in J_0} |a_{0l}(x - t\kappa_l)|^2 + \lambda|a_{0j}(x - t\kappa_j)|^2.$$

Donc on obtient :

$$S_j(t,x) = -2\lambda \sum_{l\in J_0-\{j\}} \int_0^t |a_{0l}(x + (\tau - t)\kappa_j - \tau\kappa_l)|^2 \mathrm{d}\tau - t\lambda|a_{0j}(x - t\kappa_j)|^2.$$

Discussion autour du cas général

- Dans le cas $d \geqslant 2$, on ne peut plus s'attendre à avoir $\partial_t |a_j|^2 + \kappa_j \cdot \nabla_x |a_j|^2 = 0$ pour tout $j \in J$. On a cependant une autre propriété, certes plus faible, mais bien connue des physiciens :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j \in J} \|a_j(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) = 0.$$

- Dans le cas $d = 1$, $\sigma \geqslant 2$, les ensembles $\mathcal{R}_j$ deviennent plus compliqués, et on peut partir d'une amplitude $a_{00} \equiv 0$ pour avoir au final une amplitude $a_0(t, x)$ non-nulle, cf. le cas à 5 phases !

Discussion autour du cas général

- Dans le cas $d \geqslant 2$, on ne peut plus s'attendre à avoir $\partial_t |a_j|^2 + \kappa_j \cdot \nabla_x |a_j|^2 = 0$ pour tout $j \in J$. On a cependant une autre propriété, certes plus faible, mais bien connue des physiciens :
$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j\in J} \|a_j(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) = 0.$$
- Dans le cas $d = 1$, $\sigma \geqslant 2$, les ensembles $\mathcal{R}_j$ deviennent plus compliqués, et on peut partir d'une amplitude $a_{00} \equiv 0$ pour avoir au final une amplitude $a_0(t,x)$ non-nulle, cf. le cas à 5 phases !

Plan

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent.
L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0,\ \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leqslant C\|f\|_X\|g\|_X,$$

- Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik\cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0,\ \exists C > 0,\ \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leqslant C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{F}L^1\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right) \mid \hat{f} \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent.
L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0,\ \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leqslant C\|f\|_X\|g\|_X,$$

- Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik\cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0,\ \exists C > 0,\ \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leqslant C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{F}L^1\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right) \mid \hat{f} \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent. L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0,\ \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leqslant C\|f\|_X\|g\|_X,$$

- Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X,$$ en notant $e_k : x \mapsto e^{ik\cdot x}$ avec $k \in \mathbb{R}^d$.

- Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0,\ \exists C > 0,\ \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leqslant C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{F}L^1\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right) \mid \hat{f} \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent. L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0,\ \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leqslant C\|f\|_X\|g\|_X,$$

- Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik\cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0,\ \exists C > 0,\ \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leqslant C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{F}L^1\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)\ \middle|\ \hat{f} \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent.
L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0,\ \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leqslant C\|f\|_X\|g\|_X,$$

- Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik\cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0,\ \exists C > 0,\ \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leqslant C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{F}L^1\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{ f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right) \ \middle|\ \hat{f} \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Introduction d'un nouvel espace fonctionnel

Il n'est pas possible de faire, dans le cas multiphase, la même analyse que le groupe précédent. L'espace fonctionnel X dans lequel nous devons raisonner doit donc vérifier :

- Invariance par translation :

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|\tau_k f\|_X = \|f\|_X,$$

- Algèbre de Banach :

$$\exists C > 0,\ \forall f, g \in X, \quad \|fg\|_X \leqslant C\|f\|_X\|g\|_X,$$

- Invariance par multiplication par une onde plane d'amplitude 1

$$\forall k \in \mathbb{R}^d,\ \forall f \in X, \quad \|fe_k\|_X = \|f\|_X, \quad \text{en notant } e_k : x \mapsto e^{ik\cdot x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^d.$$

- Continuité uniforme locale en temps de l'opérateur de Schrödinger :

$$\exists T_0 > 0,\ \exists C > 0,\ \forall t \in [0, T_0], \quad \|e^{i\frac{t}{2}\Delta}\|_{\mathcal{L}_c(X)} \leqslant C.$$

Ex : L'espace $\mathcal{F}L^1\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{f \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)\ \mid \hat{f} \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)\right\}$ vérifie ces 4 hypothèses.

Existence et unicité d'une solution locale dans notre espace X

Sous les hypothèses précédentes sur notre espace fonctionnel, on a :

Lemme

Pour $d \geqslant 1$, si $u_0^\varepsilon \in X$, alors il existe $T^\varepsilon > 0$ et une unique solution $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^0\left([0, T^\varepsilon], X\right)$ de l'équation de Schrödinger telle que $u^\varepsilon(0, \cdot) = u_0^\varepsilon$.

Preuve

On rappelle l'équation de Schrödinger à résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcll} i\varepsilon\partial_t u^\varepsilon(t,x) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^\varepsilon(t,x) & = & \lambda\varepsilon|u^\varepsilon(t,x)|^{2\sigma}u^\varepsilon(t,x), & \forall t\in[0,T^\varepsilon],\ \forall x\in\mathbb{R}^d, \\ u^\varepsilon(0,x) & = & u_0^\varepsilon(x) & \forall x\in\mathbb{R}^d. \end{array}\right.$$

Le but est d'écrire cette équation comme un problème de point fixe, avec la formule de Duhamel :

$$u^\varepsilon(t,x) = e^{it\frac{\varepsilon}{2}\Delta}u_0^\varepsilon(x) - i\lambda\int_0^t e^{i(t-s)\frac{\varepsilon}{2}\Delta}|u^\varepsilon(s,x)|^{2\sigma}u^\varepsilon(s,x)\mathrm{d}s.$$

On note alors :

$$\begin{array}{rcrcl} \Phi & : & \mathcal{C}^0\left([0,T^\varepsilon],X\right) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0\left([0,T^\varepsilon],X\right) \\ & & u & \longmapsto & t\mapsto e^{it\frac{\varepsilon}{2}\Delta}u_0^\varepsilon - i\lambda\int_0^t e^{i(t-s)\frac{\varepsilon}{2}\Delta}|u^\varepsilon(s)|^{2\sigma}u^\varepsilon(s)\mathrm{d}s. \end{array}$$

Mise en garde et notations

Attention ! Notre T^ε pourrait tendre très vite vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$ si $\|u_0^\varepsilon\|_X$ n'est pas contrôlé uniformément en ε. Notons alors :

$$Y = \left\{ (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \mid \|a\|_Y := \sum_{j\in\mathbb{N}} \|a_j\|_X < +\infty \right\}.$$

On a alors que si $(a_{0j})_{j\in\mathbb{N}} \in Y$, alors $u_0^\varepsilon \in X$ et $\|u_0^\varepsilon\|_X \leqslant \|a_0\|_Y$: majoration indépendante de ε.

Définissons également l'ensemble :

$$Y_2 = \left\{ (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in Y \mid \sum_{j\in\mathbb{N}} \left((1+|\kappa_j|^2)\|a_j\|_X + \sqrt{1+|\kappa_j|^2}\|\nabla a_j\|_X + \|\Delta a_j\|_X \right) < +\infty \right\},$$

qui nous servira pour les estimations d'erreur.

Existence et unicité de notre système d'équations de transport

Rappelons que nous avions obtenu ce système d'équations :

$$\partial_t a_j + \kappa_j \cdot \nabla a_j = -i\lambda \sum_{\phi_{j_1} - \phi_{j_2} + \ldots + \phi_{2\sigma+1} = \phi_j} a_{j_1} \overline{a_{j_2}} \ldots a_{j_{2\sigma+1}}.$$

Théorème

Pour $d \geqslant 1$, si $(a_{0j})_{j\in\mathbb{N}} \in Y$, alors il existe $T > 0$ et une unique solution $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0([0,T];Y)$ du système ci-dessus.
Si de plus $(a_{0j})_{j\in\mathbb{N}} \in Y_2$ alors $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0([0,T];Y_2)$.

Idée de la preuve pour le premier point

Il s'agit là encore d'appliquer un théorème de point fixe en remarquant que les solutions s'écrivent :

$$a_j(t,x) = a_{0j}(x - \kappa_j t) - i\lambda \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_{2\sigma+1})\in\mathcal{R}_j} \int_0^t \left(a_{j_1}\overline{a_{j_2}}\ldots a_{j_{2\sigma+1}}\right)(s, x - \kappa_j(t-s))\,\mathrm{d}s,$$

en utilisant les propriétés d'invariance par translation et d'algèbre de Banach.

Plan

Récapitulatif du travail effectué

On a construit une solution approchée :

$$u_{app}^{\varepsilon}(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j(t,x) e^{\frac{i\phi_j(t,x)}{\varepsilon}}.$$

Par définition elle vérifie :

$$i\varepsilon\partial_t u_{app}^{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u_{app}^{\varepsilon} = \lambda\varepsilon |u_{app}^{\varepsilon}|^{2\sigma} u_{app}^{\varepsilon} + r_1^{\varepsilon} + r_2^{\varepsilon},$$

où :

- r_1^{ε} est le terme qui comprend que l'on a retrouvé que les phases résonnantes.

$$r_1^{\varepsilon} = \lambda\varepsilon \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{(j_1,\ldots,j_{2\sigma+1})\notin\mathcal{R}_j} a_{j_1}\overline{a_{j_2}}\ldots a_{j_{2\sigma+1}} e^{\frac{i(\phi_{j_1}-\phi_{j_2}+\ldots+\phi_{j_{2\sigma+1}})}{\varepsilon}}.$$

- r_2^{ε} correspond aux mêmes termes qu'il y avait au cas linéaire :

$$r_2^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}} e^{\frac{i\phi_j}{\varepsilon}}\Delta a_j.$$

Récapitulatif du travail effectué

On a construit une solution approchée :

$$u^{\varepsilon}_{app}(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j(t,x) e^{\frac{i\phi_j(t,x)}{\varepsilon}}.$$

Par définition elle vérifie :

$$i\varepsilon\partial_t u^{\varepsilon}_{app} + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta u^{\varepsilon}_{app} = \lambda\varepsilon|u^{\varepsilon}_{app}|^{2\sigma} u^{\varepsilon}_{app} + r_1^{\varepsilon} + r_2^{\varepsilon},$$

où :

- r_1^{ε} est le terme qui comprend que l'on a retrouvé que les phases résonnantes.

$$r_1^{\varepsilon} = \lambda\varepsilon \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{(j_1,\ldots,j_{2\sigma+1})\notin\mathcal{R}_j} a_{j_1}\overline{a_{j_2}}\ldots a_{j_{2\sigma+1}} e^{\frac{i(\phi_{j_1}-\phi_{j_2}+\ldots+\phi_{j_{2\sigma+1}})}{\varepsilon}}.$$

- r_2^{ε} correspond aux mêmes termes qu'il y avait au cas linéaire :

$$r_2^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{j\in\mathbb{N}} e^{\frac{i\phi_j}{\varepsilon}}\Delta a_j.$$

Estimation d'erreur

- On note $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u^\varepsilon_{app}$, l'estimation d'erreur.
- Elle vérifie :

$$i\varepsilon\partial_t w^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta w^\varepsilon = \lambda\varepsilon(|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon - |u^\varepsilon_{app}|^{2\sigma}u^\varepsilon_{app}) - r_1^\varepsilon - r_2^\varepsilon, \text{ et } w^\varepsilon_{|t=0} = 0.$$

D'après la formule de Duhamel :

$$\begin{aligned} w^\varepsilon(t) = & - i\lambda \int_0^t e^{i\varepsilon\frac{t-s}{2}\Delta}\left(|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon - |u^\varepsilon_{app}|^{2\sigma}u^\varepsilon_{app}\right) \\ & + \frac{i}{\varepsilon}\int_0^t e^{i\varepsilon\frac{t-s}{2}\Delta} r_1^\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s + \frac{i}{\varepsilon}\int_0^t e^{i\varepsilon\frac{t-s}{2}\Delta} r_2^\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Estimation d'erreur

- On note $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u^\varepsilon_{app}$, l'estimation d'erreur.
- Elle vérifie :

$$i\varepsilon\partial_t w^\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\Delta w^\varepsilon = \lambda\varepsilon(|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon - |u^\varepsilon_{app}|^{2\sigma}u^\varepsilon_{app}) - r_1^\varepsilon - r_2^\varepsilon, \text{ et } w^\varepsilon_{|t=0} = 0.$$

D'après la formule de Duhamel :

$$\begin{aligned} w^\varepsilon(t) = & - i\lambda \int_0^t e^{i\varepsilon\frac{t-s}{2}\Delta}\big(|u^\varepsilon|^{2\sigma}u^\varepsilon - |u^\varepsilon_{app}|^{2\sigma}u^\varepsilon_{app}\big) \\ & + \frac{i}{\varepsilon}\int_0^t e^{i\varepsilon\frac{t-s}{2}\Delta} r_1^\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s + \frac{i}{\varepsilon}\int_0^t e^{i\varepsilon\frac{t-s}{2}\Delta} r_2^\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Estimation d'erreur

En utilisant les propriétés de l'espace X, on obtient (où C est une constante indépendante de ε) :

$$\|w^\varepsilon(t)\|_X \leqslant |\lambda| C \int_0^t \left\| e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2}\Delta}\left(|u^\varepsilon|^{2\sigma} u^\varepsilon - |u^\varepsilon_{app}|^{2\sigma} u^\varepsilon_{app}\right)\right\|_X ds$$
$$+ \frac{C}{\varepsilon} \sum_{j=1,2} \left\| \int_0^t e^{i\varepsilon \frac{t-s}{2}\Delta} r_j^\varepsilon(s)\, \mathrm{d}s \right\|_X .$$

Erreur en r_2

Lemme

On a :

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| \int_0^t e^{i\varepsilon\frac{t-s}{2}\Delta} r_2^\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s \right\|_X = \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

Erreur en r_1 : lemme préliminaire

$$r_1^\varepsilon = \lambda\varepsilon \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{(j_1,\dots,j_{2\sigma+1})\notin\mathcal{R}_j} a_{j_1}\overline{a_{j_2}}\dots a_{j_{2\sigma+1}} e^{\frac{i(\phi_{j_1}-\phi_{j_2}+\dots+\phi_{j_{2\sigma+1}})}{\varepsilon}}.$$

On veut évaluer l'erreur du terme en r_1, pour cela on remarque que r_1 est une somme de termes de la forme (sinon ils résonneraient) :

$$g(t,x)e^{i\frac{k\cdot x}{\varepsilon}-\frac{i\omega t}{2\varepsilon}} \quad \text{avec} \quad |k|^2 \neq \omega.$$

Erreur en r_1 : lemme préliminaire

Lemme

Soient $k \in \mathbb{R}^d$, $w \in \mathbb{R}$ qui vérifient : $|k|^2 \neq \omega$. On définit :

$$D^\varepsilon(t,x) = \int_0^t e^{i\varepsilon\frac{t-s}{2}\Delta}\left(g(s,x)e^{i\frac{k\cdot x}{\varepsilon}-\frac{i\omega s}{2\varepsilon}}\right)\mathrm{d}s.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} D^\varepsilon(t,x) = &- \frac{2i\varepsilon}{|k|^2-\omega}\left[e^{i\varepsilon\frac{t-s}{2}\Delta} g(s,x) e^{i\frac{k\cdot x}{\varepsilon}-\frac{i\omega s}{2\varepsilon}}\right]_0^t \\ &+ \frac{2i\varepsilon}{|k|^2-\omega}\int_0^t e^{i\varepsilon\frac{t-s}{2}\Delta} e^{i\frac{k\cdot x}{\varepsilon}-\frac{i\omega s}{2\varepsilon}}\left(\frac{i}{2}(\varepsilon\Delta g + 2k\cdot\nabla g) + \partial_t g\right)(s,x)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Estimation de l'erreur en r_1

Proposition

Soient $k \in \mathbb{R}^d$, $\omega \in \mathbb{R}$ qui vérifient : $|k|^2 \neq \omega$. On a (où C est une constante indépendante de ε) :

$$\|D^\varepsilon(t)\|_X \leqslant \frac{C\varepsilon}{||k^2| - \omega|}\Big(\|g\|_{L^\infty([0,t],X)} + \|\Delta g\|_{L^\infty([0,t],X)} + |k|\|\nabla g\|_{L^\infty([0,t],X)} + \|\partial_t g\|_{L^\infty([0,t],X)}\Big).$$

Estimation de l'erreur : conclusion

Théorème

Soit $d \geqslant 1, \kappa_j \in \mathbb{Z}^d$ et $(a_{0j}) \in Y_2$. Alors pour T garantissant l'existence et l'unicité de u^ε_{app}, on a :

$$\|u^\varepsilon - u^\varepsilon_{app}\|_{L^\infty([0,T],X)} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$