Bases de Gröbner. Variétés algébriques.

DONNART Titouan, LE MEUR Adrienne, RINGUEDE Marceau

Novembre 2022

Plan

Variétés affines

Version faible du théorème des zéros de Hilbert

Quelques applications
- Résolution de système - Problème de minimisation
- 3-Coloriage de graphes

Définition

Définition

Soient k un corps et $f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$. On note :

$$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) = \Big\{(a_1, \ldots, a_n) \in k^s \mid \forall i \in \{1, \ldots, s\} : f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0\Big\}.$$

On l'appelle **variété affine définie par** $f_1, \ldots, f_s$.

Exemples :

Dans $\mathbb{R}^2$,

- $\mathbf{V}\left(x^2+1\right)=\emptyset$ est fini, borné.
- $\mathbf{V}\left(x^2+y^2\right)=\{(0,0)\}$ est fini, borné.
- $\mathbf{V}\left(x^2-y^2\right)$ est infini, non borné.
- $\mathbf{V}\left(\left(x^2+y^2\right)^3-4x^2y^2\right)$ est infini, borné.

Propriété

Propriété

Soient $V := \mathbf{V}\left(f_i,\ i = 1, \dots n\right)$, $W := \mathbf{V}\left(g_i,\ i = 1, \dots m\right)$ des variétés affines. Alors $V \cap W = \mathbf{V}\left(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m\right)$ et $V \cup W = \mathbf{V}\left(f_i g_j,\ i = 1, \dots n\right.$, et $\left. j = 1, \dots m\right)$ sont des variétés affines.

Plan

Variétés affines

Version faible du théorème des zéros de Hilbert

Quelques applications
- Résolution de système - Problème de minimisation
- 3-Coloriage de graphes

Correspondance Idéaux/Variétés affines

À un idéal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$, on associe :

$$\mathbf{V}(I) = \{a \in k^n \mid \forall f \in I : f(a) = 0\}.$$

C'est une variété affine d'après le théorème de la base de Hilbert.

Correspondance Idéaux/Variétés affines

À un idéal I de $k[x_1, \ldots, x_n]$, on associe :

$$\mathbf{V}(I) = \{a \in k^n \mid \forall f \in I : f(a) = 0\}.$$

C'est une variété affine d'après le théorème de la base de Hilbert.
On obtient alors l'application suivante :

$$\begin{aligned} \left\{ \text{ Idéaux de } k[x_1, \ldots, x_n] \right\} &\longrightarrow \left\{ \text{ Variétés affines } \right\} \\ I &\longmapsto \mathbf{V}(I). \end{aligned}$$

Version faible

Version faible du théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz faible)

Soit k un corps algébriquement clos et I, un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

$$I \text{ est un idéal propre si et seulement si } \mathbf{V}(I) \neq \varnothing.$$

Un résultat préliminaire

Soit k un corps algébriquement clos et I un idéal propre de $k[x_1, \dots, x_n]$. Pour tout $a \in k$, on introduit l'ideal :

$$I_{x_n=a} := \Big\{ f(x_1, \dots, x_{n-1}, a),\ f \in I \Big\}.$$

On notera quand le contexte sera évident : $f(x_1, \dots, x_{n-1}, a) = \overline{f}$.

Lemme

Soit k un corps algébriquement clos et I un idéal propre de $k[x_1, \dots, x_n]$. Il existe un élément $a \in k$ tel que :

$$I_{x_n=a} \neq k[x_1, \dots, x_{n-1}].$$

Preuve du résultat préliminaire

Lemme

Soit k un corps algébriquement clos et I un idéal propre de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Il existe un élément $a \in k$ tel que :

$$I_{x_n=a} \neq k[x_1, \ldots, x_{n-1}].$$

- **Cas 1 :** $I \cap k[x_n] \neq \{0\}$.

Preuve du résultat préliminaire

Lemme

Soit k un corps algébriquement clos et I un idéal propre de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Il existe un élément $a \in k$ tel que :

$$I_{x_n=a} \neq k[x_1, \ldots, x_{n-1}].$$

- **Cas 1 :** $I \cap k[x_n] \neq \{0\}$.
- **Cas 2 :** $I \cap k[x_n] = \{0\}$. Voici un résultat admis :

Une base $G = (g_1, \ldots, g_t)$ de I est une base de Gröbner d'un idéal I si et seulement si pour tous $i \neq j$, le S-polynôme s'écrit sous la forme :

$$\frac{x^\gamma}{LT(g_j)} g_i - \frac{x^\gamma}{LT(g_j)} g_j := S(g_i, g_j) = \sum_{l=1}^{s} A_l g_l$$

où $\text{PPCM}\big(LM(g_i), LM(f_j)\big) > LT(A_l f_l)$ quand $A_l f_l \neq 0$ et, $x^\gamma = \text{PPCM}\ (LM(g_i), LM(g_j))$.

Preuve du Nullstellensatz faible

Version faible du théorème des zéros de Hilbert (Nullstellensatz faible)

Soit k un corps algébriquement clos et I, un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

$$I \text{ est un idéal propre si et seulement si } \mathbf{V}(I) \neq \varnothing.$$

Lemme

Soit k un corps algébriquement clos et I un idéal propre de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Il existe un élément $a \in k$ tel que :

$$I_{x_n = a} \neq k[x_1, \ldots, x_{n-1}].$$

Plan

Variétés affines

Version faible du théorème des zéros de Hilbert

Quelques applications

Résolution de système - Problème de minimisation

3-Coloriage de graphes

Et les bases de Gröbner ?

Lemme

Soit k un corps et I un idéal de $k[x_1, \ldots, x_n]$. On calcule une base de Gröbner de I pour un ordre quelconque.

- Si elle contient le polynôme 1 alors : $\mathbf{V}(I) = \varnothing$.
- Sinon : $\mathbf{V}(I) \neq \varnothing$.

Plan

Variétés affines

Version faible du théorème des zéros de Hilbert

Quelques applications

Résolution de système - Problème de minimisation

3-Coloriage de graphes

Résolution de système - Problème de minimisation

On souhaite trouver les extrémas de $f(x,y,z) = x^3 - yx^2 + zy$ sur la sphère $S_3(0,2)$.
Le théorème des extrémas liés affirme que si $m \in \mathbb{R}^3$ est un tel extréma alors :

$$\nabla f(m) = t\nabla g(m) \text{ où } g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2+y^2+z^2-4 \text{ et où } t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi les extrémas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ recherchés vérifient forcément : $\begin{cases} 3x^2 - 2yx = 2tx \\ -x^2 + z = 2ty \\ y = 2tz \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases}$.

Plan

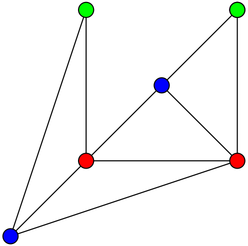
Variétés affines

Version faible du théorème des zéros de Hilbert

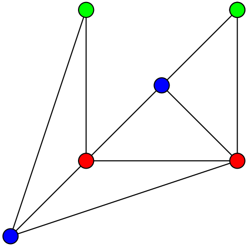
Quelques applications
- Résolution de système - Problème de minimisation
- 3-Coloriage de graphes

Mise en situation

On considère un graphe et on se demande si l'on peut colorier les sommets de celui-ci de trois couleurs différentes tel que deux sommets reliés par une arête aient des couleurs différentes.



Un graphe bien colorié.



Un graphe pas bien colorié.

Quelques exemples