ENS de Rennes
Université Rennes 1

Master 1 mathématiques fondamentales
Cours et exercices

Fonctions holomorphes et fonctions spéciales

Rapporté par :
Titouan Donnart

Enseignante :
Isabelle Gruais

Introduction :

Cette trace écrite a pour premier objectif, d'essayer d'avoir quelque chose de suffisamment "propre" dans cette matière en termes de rédaction (pour les problèmes de présentation, j'attends d'être suffisamment avancé dans le cours avant de m'y mettre). Si vous voyez des erreurs (ce qui est probable) ou des oublis (qui ne sont pas volontaires *c.f* plus bas), n'hésitez pas à me le dire. Pareil, si vous voulez partager une démonstration qui vous paraît plus simple, n'hésitez pas. En ce qui concerne le contenu de ce poly pour l'instant, voici ce qu'il manque à l'heure actuelle.

— Le délire autour de la convergence uniforme d'un produit infini (que j'ai pour l'instant remplacé par la convergence de la normale de la série associée dans les résultats où on l'utilise).

Table des matières

Notations :

- Pour U, V deux ensembles quelconques, on note $\mathcal{F}(U, V)$ l'ensemble des fonctions de U dans V. On ajoutera un indice c pour l'ensemble des fonctions continues.
- Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $B(a, b)$ la bande horizontale suivante : $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leqslant \mathcal{I}m(z) \leqslant b\}$.
- Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $\tilde{B}(a, b)$ la bande verticale suivante : $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leqslant \mathcal{R}e(z) \leqslant b\}$.
- Pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $A(a, b)$ l'anneau dans le plan complexe suivant : $\{z \in \mathbb{C}, a \leqslant |z| \leqslant b\}$.
- Si $f : U \to V$ est définie entre deux ensembles quelconques, on note $\mathcal{Z}(f)$ l'ensemble de ses zéros (non répétés avec multiplicité).
- Si K est un compact de $\mathbb{C}$, on définit la norme suivante :

$$\forall f \in \mathcal{F}_c(K, \mathbb{C}), \quad \|f\|_{\infty,K} := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Les autres notations apparaissant dans ce cours seront précisées au fur et à mesure du document.

I Quelques rappels autour des fonctions holomorphes

I.1 Quelques éléments de cours

Le but de cette partie est de faire quelques rappels (ou non) sur les fonctions holomorphes. Il n'y a pour l'instant qu'une liste incomplète de résultats qui sont utiles pour ce qu'on a fait pour l'instant. Pour les résultats qui ne sont pas démontrés, on renvoie vers un **bon** cours de L3.

Théorème I.1: Développement en série de Laurent

Toute fonction holomorphe sur une couronne $A(a,b)$ où $b > a \geqslant 0$ se développe en série de Laurent (autour de 0) :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Cette série vérifie les propriétés suivantes :

- La série converge normalement sur tous les compacts de $A(a,b)$.
- Les coefficients c_n sont donnés par :

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}\,\mathrm{d}z}.$$

  Ces valeurs sont indépendantes du choix des rayons a et b.
- Les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}^-} c_n z^n$ ont des rayons de convergence R_+ et R_- vérifiant :

$$R_- > a \text{ et } R_+ < b.$$

Lemma I.2: Lemme de Goursat

Si f est une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert d'un triangle T, alors l'intégrale curviligne de f sur le contour ∂T de T est nulle :

$$\oint_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Ce résultat reste vrai si f est supposée continue sur l'ouvert considéré, et holomorphe sur cet ouvert sauf peut-être en un nombre fini de points.

Proposition I.3

Soit f une fonction continue sur un anneau $A(a,b)$. Si f est holomorphe sur $A(a,b) - D$ où D est une droite alors f est holomorphe sur $A(a,b)$.

Démonstration : Pour montrer que ce résultat, on va montrer que f vérifie le lemme de Goursat sur $A(a,b)$. Ainsi, par caractérisation des fonctions holomorphes, on montrera que f est holomorphe sur $A(a,b)$. Pour cela, on va considérer un triangle T dans $A(a,b)$. Il y a trois possibilités :

- Soit, le triangle et la droite ne s'intersectent pas et alors c'est le lemme de Goursat dans le cas comme ci-dessus.

— Soit, le triangle et la droite coïncident sur un côté du triangle. **La fin de ce point sera faite dans une version actualisée (avec des dessins)**.

— Sinon, le triangle et la droite s'intersectent et on peut se ramener au cas précédent.

□

Définition I.4

Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de $a \in \mathbb{C}$. On appelle ***résidu de f en*** *a le coefficient devant $\frac{1}{(z-a)}$ dans le développement en série de Laurent de f en a*

Théorème I.5: Théorème des résidus

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert étoilé U, sauf aux points d'un ensemble S de singularités isolées. Soit γ un lacet tracé dans U, et ne rencontrant pas S. Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{a \in S} \mathrm{Ind}(\gamma, a)\mathrm{Res}(f, a).$$

Proposition I.6: Calcul de résidus

Soit U un ouvert étoilé, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une application méromorphe.

— Si a est pôle simple de f alors :

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z \to a}(z-a)f(z).$$

— Si a est un pôle d'ordre $m \in \mathbb{N}$ alors :

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\Big((z-a)^m f(z)\Big).$$

Théorème I.7: Théorème de Weierstrass

Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans un ouvert U qui converge uniformément sur les parties compactes de U vers une fonction f. Alors f est holomorphe, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite des dérivées k-ième $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur les compacts de U vers $f^{(k)}$.

Théorème I.8: Théorème d'holomorphie sous l'intégrale

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et U un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : (z, x) \in U \times E \mapsto f(z, x) \in \mathbb{C}$. On suppose que :

— Pour tout $z \in U$, $x \mapsto f(z, x)$ est mesurable ;

— Pour μ-presque tout $x \in E$, $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur U, de dérivée notée $\frac{\partial f}{\partial z}$;

— Il existe un fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable, intégrable vérifiant pour tout $z \in U$ et pour μ-presque tout $x \in E$: $|f(z, x)| \leqslant \varphi(x)$.

Alors la fonction $F : z \mapsto F(z) = \int_E f(z, x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est holomorphe sur U et pour tout $z \in U$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial z}(z,x)$ est intégrable et pour tout $z \in U$:

$$F'(z) = \int_E \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Proposition I.9

Si f holomorphe :

$$\int_\gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z = 2i\pi(N-P),$$

où N (*resp.* P) est le nombre de zéros (*resp.* de pôles) entourés par γ.

Proposition I.10: Principe du maximum

- Soit f une fonction holomorphe dans un domaine U. Si $|f|$ a un maximum local en un point a de U, alors f est constante dans U.
- Soit U un ouvert borné et f une fonction holomorphe dans U et continue sur $\overline{U}$. Alors, pour tout $z \in U$, on a :

$$|f(z)| \leq \sup\{|f(w)| :\ w \in \partial U\}.$$

Théorème I.11: Principe des zéros isolés

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans U, non identiquement nulle. Si a est un zéro de f, il existe un voisinage de a dans lequel f n'admet pas d'autres zéros. Autrement dit, les zéros de f sont isolés.

Théorème I.12: Principe du prolongement analytique

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions holomorphes sur U, A une partie de U admettant un point d'accumulation. Alors :

$$f = g \text{ sur } A \iff f = g \text{ sur } U.$$

I.2 Homographies

Ce point sera actualisé plus tard, il n'est pas nécessaire pour le premier CC (hormis ce qui sera marqué au fur et à mesure du document).

II Exemples de construction de fonctions

II.1 Exemples de fonctions périodiques

Chercher une fonction périodique c'est finalement chercher le stabilisateur sous une certaine action de groupe :

$$\begin{cases} G \times E \to E \\ (g, x) \mapsto g.x \end{cases}$$

Dans cette partie, nous allons essayer de caractériser les fonctions holomorphes et méromorphes périodiques.

II.1.1 Cas des fonctions holomorphes périodiques

Pour commencer, remarquons que si $E = \mathbb{C}$ et $G = 2i\pi\mathbb{Z}$, chercher le stabilisateur de notre action de groupe revient à chercher les fonctions entières périodiques vérifiant pour tout $z \in \mathbb{C}$: $f(z+2i\pi) = f(z)$. On sait que les fonctions de la forme $z \mapsto ae^z + b$ où a, b sont des constantes complexes, correspondent. Dans le cas général, c'est le théorème suivant qui nous permet de résoudre ce problème.

Théorème II.1: Caractérisation des fonctions holomorphes périodiques

Soit f une fonction holomorphe sur une bande $B(a, b)$, périodique de période $T > 0$. Alors :

— f se développe sous la forme d'une série de Fourier :

$$\forall z \in B(a,b) : f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{\frac{2i\pi n}{T} z},$$

où les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}^-} a_n z^n$ ont des rayons de convergence respectivement supérieurs à $e^{-\frac{2\pi a}{T}}$ et $e^{-\frac{2\pi b}{T}}$.

— Inversement, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifie ces propriétés, la fonction f définie comme ci-dessus est bien une fonction holomorphe sur la bande $B(a, b)$ et périodique de période $T > 0$.

Démonstration :

— Pour montrer le premier point, l'idée est de passer par un développement général d'une fonction holomorphe sous la forme d'une série. On pense donc à développer en série de Laurent cette fonction. Malheureusement, il y a un problème : on veut des termes exponentiels à la place des termes polynômiaux qui apparaissent dans une série de Laurent. Cela nous invite donc à poser $\varphi : z \in \mathbb{C} \mapsto e^{\frac{2i\pi z}{T}}$ et de développer en série de Laurent la fonction $f \circ \varphi^{-1}$.
Montrons d'abord que φ induit une bijection entre $B(a,b) \cap \{|\mathcal{R}e(z)| < \frac{\pi}{2}\}$ et $A(\beta, \alpha) - \mathbb{R}_-$ où $\alpha = e^{-\frac{2\pi a}{T}}$ et $\beta = e^{-\frac{2\pi b}{T}}$.
On a facilement que :

$$z \in B(a,b) \Longleftrightarrow \varphi(z) \in A(\beta, \alpha).$$

Or si $\varphi(z) = \xi$ alors $z = \frac{T}{2i\pi}\log(\xi)$ où log est la détermination principale du logarithme.
Donc $\varphi : B(a,b) \cap \{|\mathcal{R}e(z)| < \frac{\pi}{2}\} \to A(\beta,\alpha) - \mathbb{R}_-$ est une bijection holomorphe.
Ainsi par composition, $f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe sur $A(\beta, \alpha) - \mathbb{R}_-$. Ainsi d'après I.3, $f \circ \varphi^{-1}$ est

holomorphe sur $A(\beta, \alpha)$. Comme cela est vrai pour tout $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, on en déduit que $f \circ \varphi^{-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc on peut développer $f \circ \varphi^{-1}$ en série de Laurent en 0 :

$$\forall \xi \in \mathbb{C} \ : \ f \circ \varphi^{-1}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \xi^n.$$

Ainsi on obtient un développement en série de Fourier pour f :

$$\forall z \in B(a, b) \ : \ f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{\frac{2i\pi n z}{T}}.$$

Les inégalités sur les rayons de convergence proviennent directement de celles obtenues sur le développement en série de Laurent de $f \circ \varphi^{-1}$. I.1

— C'est une conséquence du théorème de Weierstrass.

□

II.1.2 Cas des fonctions méromorphes périodiques

C'est plutôt un point qui est abordé lors des exercices. Voici ce qu'Isabelle Gruais m'a dit là-dessus :

Les fonctions mésomorphes périodiques interviennent aussi dans le TD 2 (exercice 1 et estimations uniformes dans l'exercice 2), dans le TD 3 que j'ai distribué. Elles vont encore intervenir au cours des TDs suivants car elles ont très importantes et efficaces d'un point de vue pratique même si par ailleurs elles suivent très banalement le théorème de convergence uniforme sur les compacts. Il n'y a donc pas de résultat plus général. C'est un outil qu'il faut maîtriser au même titre que le théorème de convergence dominée de Lebesgue en intégration.

II.2 Produits infinis

L'objectif de cette partie est d'avant tout de s'intéresser aux produits infinis de fonctions. Mais avant cela on va faire quelques rappels dans le cas des produits infinis numériques.

II.2.1 Cas numérique

Définition II.2

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}$ une suite de complexes. On dit que le ***produit infini*** $\prod_{n \in \mathbb{N}} a_n$ ***converge*** *si la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$ converge.*

Si un produit infini $\prod_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge, on notera $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa limite. Dans le cadre des réels positifs, la convergence d'un produit infini est équivalente à la convergence d'une série d'après la propriété suivante :

Proposition II.3

Soit (a_n) une suite de réels positifs. Le produit infini $\prod_{n \geq 0} (1 + a_n)$ converge si et seulement si $\sum_{n \geqslant 0} a_n$

converge

Rappelons qu'on peut remplacer l'hypothèse de positivité par "les a_n sont positifs à partir d'un certain rang".

Démonstration : Nous allons démontrer cette propriété par double implication. Remarquons juste avant que comme la suite (a_n) est à termes positifs, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\ln(1+a_n) \geqslant 0$ et aussi que par continuité des fonctions exponentielles et logarithmes :

$$\text{Le produit infini } \prod_{n\geq 0}(1+a_n) \text{ converge si et seulement si la série } \sum_{n\geqslant 0}\ln(1+a_n) \text{ converge.}$$

— Supposons que le produit infini $\prod_{n\geq 0}(1+a_n)$ converge. On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 + a_n$. Ainsi (a_n) converge vers 0. Ainsi comme $\ln(1+a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, par comparaison de séries à termes positifs, on obtient que la série de terme général $a_n, n \in \mathbb{N}$ converge.

— Supposons que la série de terme général $a_n, n \in \mathbb{N}$ converge. Alors nécessairement (a_n) converge vers 0. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, on obtient que la série de terme général $\ln(1+a_n), n \in \mathbb{N}$ converge donc que le produit infini considéré converge.

□

II.2.2 Produits de fonctions

On commence par deux lemmes techniques qui nous seront utiles pour la suite.

Lemme II.4

Si $u_1, \ldots, u_n$ sont n éléments de $\mathbb{C}$ alors on a l'inégalité suivante :

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+u_k) - 1\right| \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|\right) - 1.$$

Démonstration : On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : C'est une conséquence directe de l'inégalité de convexité : $1 + x \leqslant e^x$ pour $x > 0$.

Hérédité : On suppose que l'inégalité est vraie pour n complexes $u_1, \dots u_n$. Soit $u_{n+1} \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\left|\prod_{k=1}^{n+1}(1+u_k)-1\right| &= \left|\Big(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)-1\Big)(1+u_{n+1})-u_{n+1}\right| \\
&\leqslant \left|\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)-1\right|(1+|u_{n+1}|)+|u_{n+1}| \text{ par inégalité triangulaire,} \\
&\leqslant \left(\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}|u_k|\Big)-1\right)(1+|u_{n+1}|)+|u_{n+1}| \text{ par hypothèse de récurrence,} \\
&\leqslant \exp\Big(\sum_{k=1}^{n}|u_k|\Big)(1+|u_{n+1}|)-1, \\
&\leqslant \exp\Big(\sum_{k=1}^{n+1}|u_k|\Big)-1 \text{ par convexité de l'exponentielle.}
\end{aligned}$$

□

Lemme II.5

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$|\ln(1+z)| \leqslant \frac{|z|}{1-|z|}.$$

Démonstration : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On utilise simplement le développement en série du logarithme autour de 1 :

$$|\ln(1+z)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|z|^n \leqslant \frac{|z|}{1-|z|}.$$

□

Définition II.6

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On dit que ***le produit infini*** $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ ***converge*** *si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = \prod_{k=0}^{n} f_k$ converge.*

Si un produit infini $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge, on notera $\prod_{n=0}^{+\infty} f_n$ sa limite.

Proposition II.7

Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On suppose que la série $\sum_{n\geq 0}(f_n - 1)$ converge normalement sur tout compact de U. Alors :

- le produit infini $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ et la limite f est holomorphe sur U.
- l'ensemble des zéros de f est la réunion des zéros des f_n et l'ordre de multiplicité d'un zéro de f est égale à la somme des multiplicités de ce zéro des f_n.

Démonstration : Comme pour tout $n_0 > 0$, on a : $\prod_{n\geqslant 0} f_n = f_0 \dots f_{n_0} \prod_{n>n_0} f_n$, on obtient facilement l'inclusion suivante :

$$\bigcup_{n\geqslant 0} \mathcal{Z}(f_n) \subset \mathcal{Z}(f).$$

Soit K un compact de U. Soient $k > n$ deux entiers naturels non nuls. On a pour tout $z \in K$:

$$|p_n(z) - p_k(z)| = |p_n(z)|\Big|1 - \prod_{j=n+1}^{k} f_j(z)\Big|.$$

On pose pour tous $j \in \mathbb{N}, z \in K$, $u_j(z) = f_j(z) - 1$. Par inégalité triangulaire puis par le lemme II.4, on a pour tout $z \in K$:

$$\begin{aligned}|p_n(z) - p_k(z)| &\leqslant |p_n(z)|\Big(\prod_{j=n+1}^{k}(1 + |u_j(z)|) - 1\Big),\\ &\leqslant |p_n(z)|\Bigg(\exp\Big(\sum_{j=n+1}^{k}|u_j(z)|\Big) - 1\Bigg).\end{aligned}$$

Or comme $\prod_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur K, la série de terme général $\|u_j\|_{\infty,K}$ converge. Donc il existe un entier N_0 suffisamment grand tel que si $N \geqslant N_0$ (ce que l'on fera par la suite) on ait alors :

$$\sum_{j=n+1}^{k}|u_j(z)| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi on obtient pour tout $z \in K$ et pour ε suffisamment petit :

$$|p_n(z) - p_k(z)| \leqslant |p_n(z)|(e^{\varepsilon} - 1) \leqslant 2\varepsilon|p_n(z)|.$$

On précise que la dernière inégalité peut être obtenue par simple étude la fonction $x \mapsto e^x - 1 - 2x$ autour de 0.
Or, par inégalité triangulaire,

$$|p_n(z) - p_k(z)| \geqslant |p_n(z)| - |p_k(z)|.$$

Ainsi on obtient :

$$(1 - 2\varepsilon)|p_n(z)| \leqslant |p_k(z)|.$$

Ainsi pour $k \to +\infty$:

$$|f(z)| \geqslant (1 - 2\varepsilon)|p_n(z)|.$$

Ainsi, si on considère $z \in \mathcal{Z}(f)$, pour tout ε suffisamment proche de 0, il existe un entier N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$: $p_n(z) = 0$. On obtient finalement l'autre inclusion demandée :

$$\bigcup_{n\geqslant 0} \mathcal{Z}(f_n) = \mathcal{Z}(f).$$

□

Théorème II.8

Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert de U de $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: f_n ne s'annule pas. On suppose que la série de terme général $f_n - 1$ converge normalement sur tout compact de U.

La série de terme général $\frac{f_n'}{f_n}$ converge normalement sur tout compact de U vers $\frac{f'}{f}$.

Démonstration : Soit K un compact de U. Soit $\varepsilon_0 > 1$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Par hypothèse, on dispose d'un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $\sum_{n \geqslant n_0} \|u_n\|_{\infty,K} \leqslant \varepsilon$. Soit $z \in K$, on a :

$$|u_n(z)| \leqslant \|u_n\|_{\infty,K} \leqslant \varepsilon < 1.$$

D'après le lemme II.5, on a :

$$|\ln(1 + u_n(z))| \leqslant \frac{|u_n(z)|}{1 - |u_n(z)|} \leqslant \frac{\|u_n(z)\|_{\infty,K}}{1 - \varepsilon_0}.$$

Donc :

$$\|\ln(1 + u_n)\|_{\infty,K} \leqslant \frac{\|u_n(z)\|_{\infty,K}}{1 - \varepsilon_0}.$$

On en déduit que la série $\sum_{n \geqslant n_0} \ln(1 + u_n)$ converge normalement sur K. On note $S = \sum_{n \geqslant n_0} \ln(1 + u_n)$. S est holomorphe sur K comme limite uniforme d'une série de fonctions holomorphes sur K. De plus ce résultat nous dit que :

$$\sum_{n \geqslant n_0} \frac{u_n'}{1 + u_n} = \sum_{n \geqslant n_0} \big(\ln(1 + u_n)\big)' = S'.$$

Or, par continuité de la fonction de la fonction exponentielle, on a :

$$\prod_{n \geqslant n_0} (1 + u_n) = \lim_{N \to +\infty} e^{\sum_{n=n_0}^{N} \ln(1+u_n)} = e^S.$$

Donc, on obtient une expression simple de f selon S :

$$f = f_0 \dots f_{n_0 - 1} e^S.$$

Ainsi, par dérivation, on obtient :

$$f' = (f_0 \dots f_{n_0-1})' e^S + f_0 \dots f_{n_0-1} S' e^S = \sum_{k=0}^{n_0-1} \Big(f_k' \prod_{j=0, j \neq k}^{n_0-1} f_j \Big) e^S + f_0 \dots f_{n_0-1} S' e^S.$$

Puis comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k \neq 0$, on a :

$$f' = \sum_{k=0}^{n_0-1} \Big(\frac{f_k'}{f_k} \prod_{j=0,}^{n_0-1} f_j \Big) e^S + f_0 \dots f_{n_0-1} S' e^S.$$

Puis en factorisant par $f_0 \dots f_{n_0-1} e^S = f$, on obtient alors :

$$f' = \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{f_k'}{f_k} + S' \right) f = f \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n'}{f_n}.$$

Or comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n ne s'annule pas, alors f ne s'annule pas non plus d'après II.7. Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n'}{f_n} = \frac{f'}{f}.$$

□

II.3 Séries de Dirichlet

Définition II.9

On appelle série de Dirichlet toute série de fonctions de la forme $z \mapsto a_n e^{-\lambda_n z}$ où (a_n) est une suite de nombre complexes et (λ_n) est une suite croissante de nombres réels strictement positifs.

Dans la littérature classique, on appelle souvent les séries de Dirichlet, les séries comme ci-dessus mais dans le cas particulier où $\lambda_n = \ln(n)$.

Proposition II.10

Soient (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la série de terme général $a_n e^{-\lambda_n z}, n \in \mathbb{N}$ converge pour $z = z_0$ alors elle converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > \mathcal{R}e(z_0), |\arg(z - z_0)| \leqslant \alpha\}$ pour tout $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Démonstration : Quitte à remplacer a_n par $a_n e^{\lambda_n z_0}$ dans la série de Dirichlet, on peut supposer que $z_0 = 0$. L'hypothèse devient alors que la série de terme général $a_n, n \in \mathbb{N}$ converge.

Pour tout $q > p \in \mathbb{N}$, on pose $A_{p,q} = \sum_{k=p}^{q} a_k$.

Soit $\varepsilon > 0$. On peut réécrire l'hypothèse sous cette forme :

$$\exists n_0 > 0 \mid \forall N \geqslant n_0 - 1, \ \forall p \geqslant 0, |A_{N,N+p}| \leqslant \varepsilon.$$

Soient $N \geqslant n_0$ et $p \in \mathbb{N}$. Une sommation d'Abel nous donne :

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} a_n e^{-\lambda_n z} \right| = \left| \sum_{n=N}^{N+p-1} A_{N-1,n} (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}) + A_{N-1,N+p} e^{-\lambda_{N+p} z} + A_{N-1,N-1} e^{-\lambda_N z} \right|.$$

Et alors, par inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{n=N}^{N+p} a_n e^{-\lambda_n z} \right| \leqslant \sum_{n=N}^{N+p-1} |A_{N-1,n}| |e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| + |A_{N-1,N+p}| |e^{-\lambda_{N+p} z}| + |A_{N-1,N-1}| |e^{-\lambda_N z}|.$$

Or si on écrit $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ alors $|e^{-\lambda_{N+p} z}| < 1$ et $|e^{-\lambda_N z}| < 1$. Ainsi, comme $N \geqslant n_0$, on peut écrire :

$$\Big|\sum_{n=N}^{N+p} a_n e^{-\lambda_n z}\Big| \leqslant \sum_{n=N}^{N+p-1} \varepsilon|e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| + 2\varepsilon.$$

Or pour tout $n \geqslant 1$, on écrit [1] :

$$|e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}| \leqslant |z| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-tx}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{|z|}{x}(e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}).$$

Donc en reportant dans notre précédente inégalité, on obtient finalement par télescopage :

$$\Big|\sum_{n=N}^{N+p} a_n e^{-\lambda_n z}\Big| \leqslant \varepsilon\frac{|z|}{x}(e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{N+p} x}) + 2\varepsilon \leqslant \varepsilon(\frac{|z|}{x} + 2).$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $\arg(z) = |\frac{y}{x}| \leqslant \alpha$. Comme la fonction tan est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\frac{|z|}{x} \leqslant 1 + |\frac{y}{x}| \leqslant 1 + \tan(\alpha).$$

Ainsi pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0,\ |\arg(z)| \leqslant \alpha\}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_0 tel que pour tout $N \geqslant n_0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\Big|\sum_{n=N}^{N+p} a_n e^{-\lambda_n z}\Big| \leqslant \varepsilon(2 + \tan(\alpha)).$$

On obtient ainsi, par le critère de Cauchy uniforme, la convergence uniforme de la série de Dirichlet sur le domaine souhaité. □

Proposition II.11

Si la série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge pour $z = z_0$, alors elle converge uniformément sur tout compact de $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > \mathcal{R}e(z_0)\}$.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente : on peut toujours trouver α suffisamment proche de $\frac{\pi}{2}$ tel qu'un compact de $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > \mathcal{R}e(z_0)\}$ soit inclus dans $\{\mathcal{R}e(z) > \mathcal{R}e(z_0), |\arg(z - z_0)| \leqslant \alpha\}$. □

Proposition II.12

Le domaine de convergence d'une série de Dirichlet $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n z}$ admet un demi-plan maximal de la forme $\{\mathcal{R}e(z) > \rho\},\ \rho \in \overline{\mathbb{R}}$ appelé demi-plan de convergence de la série.

Démonstration : C'est une conséquence du lemme de Zorn. □

Définition II.13

Si le demi-plan de convergence de la série de Dirichlet $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n z}$ *est* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > \rho\}$ *alors* ρ

1. l'inégalité des accroissements finis ne semble pas mener à grand chose

est appelé ***abscisse de convergence de la série de Dirichlet*** $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n z}$.

Dans ce cas, on note ρ^+, l'abscisse de convergence (dite absolue) de la série $\sum_{n\geq 0} |a_n| e^{-\lambda_n z}$.

Proposition II.14

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence ρ.

Si pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > \rho\}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z} = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.

Démonstration : Pour tout $z \in \{\xi \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(\xi) > \rho\}$, on pose :

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-\lambda_n z}.$$

On suppose que f est nulle sur cet ensemble. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série de terme général $a_n e^{-\lambda_n z_0}, n \in \mathbb{N}$ converge. Par convergence uniforme sur le domaine

$$K_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > \mathcal{R}e(z_0), |\arg(z - z_0)| \leqslant \alpha\},$$

il existe un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $z \in K_\alpha$:

$$\left| \sum_{n>n_0} a_n e^{-\lambda_n z} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $z \in K_\alpha$, on a :

$$|e^{\lambda_0 z} f(z) - a_0| \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| e^{-\lambda_n {}^{\backprime}\mathcal{R}e(z)} + \varepsilon.$$

Or le premier terme du majorant tend vers 0 lorsque $\mathcal{R}e(z)$ tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{\mathcal{R}e(z)\to+\infty} |e^{\lambda_0 z} f(z) - a_0| = 0.$$

Or, comme $z \in K_\alpha \subset \{\xi \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(\xi) > \rho\}$: $e^{\lambda_0 z} f(z) = 0$. Donc forcément $a_0 = 0$.
On montre ensuite de la même manière par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 0$. □

Proposition II.15

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n z}$ une série de Dirichlet définie sur un ensemble : $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > \rho\}$ [a] et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geqslant 0$.
Si $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n z}$ admet un prolongement holomorphe au voisinage de tout point de $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) = \rho\}$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n z}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > \rho - \varepsilon$.

a. ρ n'est pas l'abscisse de convergence

Démonstration : Pour tout $z \in \{\xi \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(\xi) \geqslant \rho\}$, on pose :

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n e^{-\lambda_n z}.$$

Quitte à remplacer a_n par $a_n e^{-\lambda_n \rho}$, on peut supposer $\rho = 0$.
Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que f admette un prolongement holomorphe sur $\overline{\mathcal{B}}(0, \delta)$. De plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leqslant 1 + \varepsilon\} = A_\varepsilon$. Pour $z \in A_\varepsilon$, f se développe en série entière sous la forme :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(z-1)^k.$$

Or d'après le théorème de convergence de Weierstrass appliqué en $z = 1$ (ce qui est bien licite) :

$$f^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n}.$$

On en déduit qu'on peut écrire $f(z)$ sous la forme d'une somme double pour $z \in A_\varepsilon$.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-\lambda_n)^k e^{-\lambda_n} \right) \frac{(z-1)^k}{k!}.$$

Et si $z = -\varepsilon \in A_\varepsilon$, $f(-\varepsilon)$ est la somme double de termes positifs, donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli :

$$f(-\varepsilon) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_n \lambda_n^k e^{-\lambda_n} \frac{(1+\varepsilon)^k}{k!}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(-\varepsilon) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n^k (1+\varepsilon)^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n} e^{\lambda_n (1+\varepsilon)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n \varepsilon}. \end{aligned}$$

Donc la série de terme général $a_n e^{-\lambda_n z}$ converge pour $z = -\varepsilon$, donc elle converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) \geqslant -\varepsilon$.

□

II.4 Fonctions elliptiques

II.4.1 Un exemple de fonction elliptique : la fonction $\mathcal{P}$ de Weierstrass

On pose $u, v \in \mathbb{C} - \{0\}$ tels que $\dfrac{u}{v} \notin \mathbb{R}$. On note $\Lambda = \{xu + yv, \quad x, y \in \mathbb{Z}\}$ le réseau de $\mathbb{C}$ engendré par u et v.

Définition II.16

On dit que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est ***bi-périodique*** *si pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$: $f(z + \lambda) = f(z)$.*

Proposition II.17

Si f est holomorphe et bi-périodique sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.

Démonstration : Comme f est holomorphe, f est continue. Ainsi f est bornée sur le compact $\{xu + yv, (x, y) \in [0, 1]^2\}$. Comme f est bi-périodique, on en déduit que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Ainsi, f est constante d'après le théorème de Liouville. □

Définition II.18

On appelle ***fonction elliptique*** *sur* $\mathbb{C}$ *toute fonction méromorphe et bi-périodique sur* $\mathbb{C}$.

Lemme II.19

La série de terme général $\frac{1}{|\lambda|^3}, \lambda \in \Lambda - \{0\}$ converge.

Démonstration : D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{|\lambda|^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n \cap \Lambda} \frac{1}{|\lambda|^3},$$

où on désigne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathcal{P}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|_\infty = n\}$. On note $d = \min\limits_{z \in \mathcal{P}_1 \cap \Lambda} \|z\|_\infty > 0$ qui existe car $\mathcal{P}_1 \cap \Lambda$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ et est strictement positif car $z \mapsto \|z\|_\infty$ est strictement positif sur $\mathcal{P}_1 \cap \Lambda$ (sinon $\frac{u}{v}$ serait réel).
Ainsi pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $\lambda \in \mathcal{P}_n \cap \Lambda$:

$$\frac{1}{|\lambda|^3} = \frac{1}{n^3} \left(\frac{n}{|\lambda|} \right)^3 \leqslant \frac{1}{(nd)^3}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{|\lambda|^3} \leqslant \frac{|\mathcal{P}_n|}{n^3 d^3}.$$

Or $|\mathcal{P}_n| = (2n + 1)4 - 4 = 8n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'où la convergence demandée par comparaison à une série de terme général $\frac{1}{n^2}, n \geqslant 1$. □

Proposition II.20

La série de fonctions méromorphes

$$z \mapsto \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} - \Lambda$ et définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration : Soit K un compact de $\mathbb{C} - \Lambda$. Comme K est borné, il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $z \in K$: $|z| \leqslant R$. Soient $\lambda \in \Lambda$ tel que $|\lambda| \geqslant 2R$ et $z \in K$. On a :

$$\left|\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right|=\frac{|2\lambda z-z^2|}{|\lambda|^2|z-\lambda|^2}.$$

Or, comme $|2-\frac{z}{\lambda}|\leqslant\frac{5}{2}$ et $|1-\frac{z}{\lambda}|\geqslant\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\frac{|2\lambda z-z^2|}{|\lambda|^2|z-\lambda|^2}=\frac{|z||2\lambda-z|}{|\lambda|^2|z-\lambda|^2}=\frac{|z(2-\frac{z}{\lambda})|}{|\lambda|^3|1-\frac{z}{\lambda}|^2}\leqslant\frac{10R}{|\lambda|^3}.$$

Donc d'après le lemme précédent, la série considérée est normalement convergente pour $|z|\leqslant R$ et $z\in\mathbb{C}-\Lambda$, donc uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{C}-\Lambda$.
Précisions toutefois ici une légère subtilité, on a considéré uniquement les λ de module supérieur ou égal à $2R$. En fait, comme le nombre de $\lambda\in\Lambda$ ne vérifiant pas cette propriété est fini, ils ne nous gênent pas pour montrer la convergence normale. □

La démonstration ci-dessus, nous donne en plus que $\mathcal{P}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles les éléments de Λ. Les pôles de $\mathcal{P}$ étant d'ordre 2.

Proposition II.21

La fonction $\mathcal{P}$ est paire.

Démonstration : Soit $z\in\mathbb{C}-\Lambda$.

$$\mathcal{P}(-z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\lambda'=-\lambda,\ \lambda'\in-\Lambda=\Lambda}\left(\frac{1}{(z-\lambda')^2}-\frac{1}{\lambda'^2}\right)=\mathcal{P}(z).$$

□

D'après le théorème de convergence de Weierstrass, pour tout $z\in\mathbb{C}-\Lambda$.

$$\mathcal{P}'(z)=-\frac{2}{z^3}-2\sum_{\lambda\in-\{0\}}\frac{1}{(z-\lambda)^3}=-2\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{(z-\lambda)^3}.$$

Proposition II.22

$\mathcal{P}$ est une fonction elliptique.

Démonstration : Avec le travail précédent, il nous suffit de montrer que $\mathcal{P}$ est Λ-périodique. Soient $z\in\mathbb{C}-\Lambda$ et $\lambda_0\in\Lambda$.

$$\mathcal{P}'(z+\lambda_0)=-2\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{(z-\lambda+\lambda_0)^3}=-2\sum_{\lambda\in\Lambda-\lambda_0=\Lambda}\frac{1}{(z-\lambda)^3}=\mathcal{P}'(z).$$

(Notons ici qu'il n'y a pas de problème de changement d'indice puisque ici toutes les séries convergent considérées convergent absolument d'après II.20).
Donc $z\mapsto\mathcal{P}(z+\lambda_0)-\mathcal{P}(z)$ est constante. En particulier, il existe deux constantes C_u et C_v dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout $z\in\mathbb{C}-\Lambda$:

$$\mathcal{P}(z+u)-\mathcal{P}(z)=C_u\text{ et }\mathcal{P}(z+v)-\mathcal{P}(z)=C_v.$$

En appliquant ces inégalités à respectivement $\frac{-u}{2}$ et $\frac{-v}{2}$, on obtient que $C_u = C_v = 0$. On en déduit par récurrence que pour tout $\lambda \in \Lambda : \mathcal{P}(z+\lambda) = \mathcal{P}(z)$. Donc $\mathcal{P}$ est une fonction elliptique. $\square$

Proposition II.23

$\mathcal{P}$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{P}')^2 = 4\mathcal{P}^3 - g_2\mathcal{P} - g_3,$$

où g_2, g_3 sont des constantes qui dépendent du réseau Λ, appelées invariants de Weierstrass.

$$g_2 = 60 \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\lambda^4} \text{ et } g_3 = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{\lambda^6}.$$

Démonstration : Notons g la fonction holomorphe définie au voisinage de 0 par

$$g(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

Au voisinage de $z = 0, \mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + g(z)$ où on considère g holomorphe sur une boule $\overline{\mathcal{B}}(0, \alpha)$ pour α suffisamment petit. Comme $\mathcal{P}$ est paire, g est aussi paire, donc pour tout $z \in \overline{\mathcal{B}}(0, \alpha)$:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}.$$

Posons pour $\lambda \in \Lambda - \{0\}, g_\lambda(z) : \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$. On pose $g_\lambda(0) = 0$. La somme qui définit g converge uniformément sur $\mathcal{B}(0, \alpha)$. Donc $g(0) = 0$, ainsi $a_0 = 0$. Et alors pour $z \to 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} \\
&= \frac{1}{z^2} + z^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+2} z^{2n} \\
&= \frac{1}{z^2} + z^2(a_2 + a_4 z^2 + o(|z|^2)).
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}'(z) &= \frac{-2}{z^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_{2n} z^{2n-1} \\
&= -\frac{2}{z^3} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{2n} z^{2n-2} \\
&= -\frac{2}{z^3} + 2z(a_2 + 2a_4 z^2 + o(|z|^2))
\end{aligned}$$

Donc un calcul donne :

$$(\mathcal{P}')^2(z) - 4(\mathcal{P})^3(z) = -20\frac{a_2}{z^2} - 28a_4 + o(1).$$

On obtient alors :

$$(\mathcal{P}')^2(z) - 4(\mathcal{P})^3(z) + 20a_2\mathcal{P}(z) = \frac{-20a_2}{z^2} - 28a_4 + 20a_2(\frac{1}{z^2} + a_2z^2 + o(|z|^2) = -28a_4 + o(1).$$

Donc il existe une fonction h définie sur $\mathcal{B}(0,\alpha)$ et holomorphe telle que :

$$(\mathcal{P}')^2(z) - 4\mathcal{P}^3(z) + 20a_2\mathcal{P} + 28a_4 = h(z).$$

On remarque que $h(0) = 0$, et que $(\mathcal{P}')^2 - 4(\mathcal{P})^3 + 20a_2\mathcal{P} + 28a_4$ est holomorphe, Λ-périodique donc constante sur $\mathcal{B}(0,\alpha)$. Donc nécessairement, cette application est nulle d'après II.17. Donc : $(\mathcal{P}')^2 - 4(\mathcal{P})^3 + 20a_2\mathcal{P} + 28a_4$. Pour trouver les expressions de a_2 et a_4, on dérive terme à terme la série associée à la fonction g et on trouve :

$$a_2 = 3\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\lambda^4} \text{ et } a_4 = 5\sum_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\frac{1}{\lambda^6}.$$

On obtient ainsi le résultat demandé. $\square$

Proposition II.24

$\mathcal{P}'$ admet 3 zéros distincts modulo Λ :

$$\omega_1 = \frac{u}{2},\quad \omega_2 = \frac{v}{2}, \omega_3 = \frac{u+v}{2}.$$

Démonstration : $\mathcal{P}'$ est impaire et Λ-périodique donc $\mathcal{P}'(\frac{-u}{2}) = \mathcal{P}'(-\frac{u}{2}+u) = \mathcal{P}'(\frac{u}{2}) = 0$. De même, $\mathcal{P}'(\frac{v}{2}) = \mathcal{P}'(\frac{u+v}{2}) = 0$. $\square$

II.4.2 Changements de réseaux

Définition II.25

*On appelle **parallélogramme fondamental** toute période de Λ.*

Proposition II.26

Soit P un parallélogramme fondamental de Λ et soit f une fonction Λ-elliptique sans pôles le long de ∂P. Soit A l'ensemble des pôles de f dans $\mathring{P}$. Alors :

$$\sum_{a\in A}\operatorname{Res}(f,a) = 0.$$

Démonstration : $A \cap \partial P = \varnothing$, donc d'après le théorème des résidus :

$$\int_{\partial P} f\,\mathrm{d}z = 2i\pi\sum_{a\in A}\operatorname{Res}(f,a).$$

Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ et (u,v) une base de Λ, on a :

$$\int_{\partial P} f\,\mathrm{d}z = \int_{[\alpha,\alpha+u]} f\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+u,\alpha+u+v]} f\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+u+v,\alpha+v]} f\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+v,\alpha]} f\,\mathrm{d}z.$$

Donc par périodicité de f :

$$\int_{[\alpha,\alpha+u]} f\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+u+v,\alpha+v]} f\,\mathrm{d}z = 0 \text{ et } \int_{[\alpha+u,\alpha+u+v]} f\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+v,\alpha]} f\,\mathrm{d}z = 0.$$

D'où le résultat. □

Proposition II.27

Soit P un parallélogramme fondamental de Λ et soit f une fonction Λ-elliptique sans points singuliers (sans pôles et sans zéros) le long de ∂P. Soit S l'ensemble des points singuliers de f à l'intérieur de P. Pour tout $s \in S$, on note m_s l'ordre de s : $m_s > 0$ si s est un zéro de f, $m_s < 0$ si s est un pôle de f. Alors :

$$\sum_{s\in S} m_s = 0 \text{ et } \sum_{s\in S} m_s s \equiv 0[\Lambda].$$

Démonstration : Comme f est Λ-elliptique, $\frac{f'}{f}$ est aussi Λ-elliptique.
Au voisinage de $s \in S$: $f(z) = (z-s)^{m_s} g(z)$ avec g holomorphe. Donc :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_s(z-s)^{m_s-1}g(z) + (z-s)^{m_s}g'(z)}{(z-s)^{m_s}g(z)} = \frac{m_s}{z-s} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Donc $\frac{g'}{g}$ est holomorphe dans le voisinage de s. On obtient alors :

$$\frac{f'}{f} \underset{z\to s}{\sim} \frac{m_s}{z-s} \text{ et } \mathrm{Res}(\frac{f'}{f}, s) = m_s.$$

D'après le théorème des résidus et car $\frac{f'}{f}$ est elliptique :

$$\int_{\partial P} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{s\in S} m_s = 0.$$

Prouvons le second point : $z \mapsto z\frac{f'(z)}{f(z)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et holomorphe sur $\mathbb{C} - \Lambda$. Soit $s \in S$. Alors :

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} \underset{z\to s}{\sim} s m_s.$$

Donc d'après le théorème des résidus :

$$\int_{\partial P} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{s\in S} s m_s.$$

Or :

$$\int_{\partial P} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{[\alpha,\alpha+u]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+u,\alpha+u+v]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+u+v,\alpha+v]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+v,\alpha]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Et :

$$\int_{[\alpha,\alpha+u]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+u+v,\alpha+v]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{[\alpha,\alpha+u]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z - \int_{[\alpha+v,\alpha+u+v]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Avec :
$$\int_{[\alpha+v,\alpha+u+v]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{[\alpha,\alpha+u]} (v+z)\frac{f'(v+z)}{f(v+z)}\,\mathrm{d}z = \int_{[\alpha,\alpha+u]} (z+v)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$
Ainsi :
$$\begin{aligned}\int_{[\alpha,\alpha+u]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+u+v,\alpha+v]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z &= \int_{[\alpha,\alpha+u]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z - \int_{[\alpha,\alpha+u]} (z+v)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z,\\ &= -v\int_{[\alpha,\alpha+u]} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -v\Big[\ln(f(z))\Big]_{\alpha}^{\alpha+u}.\end{aligned}$$

Donc :
$$\begin{aligned}\int_{[\alpha,\alpha+u]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha+u+v,\alpha+v]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z &= -v(\ln(|f(\alpha+u)|) - \ln(|f(\alpha)| + 2ik\pi)\\ &= -2ik\pi v \text{ où } k \text{ est un entier.}\end{aligned}$$

De même :
$$\int_{[\alpha+u,\alpha+u+v]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \int_{[\alpha,+v,\alpha]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -u\int_{\alpha+v,\alpha]} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -2i\pi lu \text{ où } l\in\mathbb{Z}.$$

Finalement :
$$2i(kv+lu) = \sum_{s\in S} m_s s \equiv 0[\Lambda].$$

□

Proposition II.28

Les zéros de $\mathcal{P}'$ sont simples.

Démonstration : On note $Q(X)$ le polynôme $4X^3 - g_2X - g_3$. Dans $\mathbb{C}, Q(X)$ se factorise :
$$Q(X) = 4(X-a_1)(X-a_2)(X-a_3) \text{ où } a_i = \mathcal{P}(\omega_i),\ i\in\{1,2,3\}.$$

On suppose que $\mathcal{P}'$ admet un zéro double ($i.e\ Q(\mathcal{P})=0$), sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathcal{P}(\omega_1) = \mathcal{P}(\omega_2)$. Ainsi ω_1 et ω_2 sont des zéros doubles de $\mathcal{P} - \mathcal{P}(\omega_1)$.
Soit (u,v) une base de Λ. On choisit parallélogramme fondamental P construit sur $\alpha = -\dfrac{u+v}{4}, u, v$.
$\mathcal{P} - \mathcal{P}(\dfrac{u}{2})$ est elliptique et admet $\dfrac{u}{2}$ et $\dfrac{v}{2}$ pour zéros et ces zéros sont doubles car aussi zéros de $\mathcal{P}'$.
Donc :
$$\int_{\partial P} \frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P} - \mathcal{P}(\frac{u}{2})}\,\mathrm{d}z = m_0 + m_{\frac{u}{2}} + m_{\frac{v}{2}} = -2+2+2 = 2 \neq 0.$$
La proposition précédente montre alors que nous aboutissons à une contradiction. Ainsi $\mathcal{P}'$ admet 3 zéros simples. □

Remarque : On sait que $\mathcal{P}$ vérifie
$$(\mathcal{P}')^2 = 4\mathcal{P}^3 - g_2\mathcal{P} - g_3.$$

Donc
$$(\mathcal{P}') = \pm\sqrt{4\mathcal{P}^3 - g_2\mathcal{P} - g_3}.$$

Donc $\mathcal{P}$ est solution implicite de :

$$z = z_0 + \int_{\mathcal{P}(z_0)}^{\mathcal{P}(z)} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{Q(w)}}, \text{ où l'intégrale est définie sur un chemin qui éviter les zéros de } Q.$$

Or comme $\mathcal{P}' = \sqrt{Q(\mathcal{P})}$ pour une détermination de la racine carrée, $z \mapsto \frac{1}{\mathcal{P}'}$ est bien définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{P}'(a) \neq 0$ d'après le principe des zéros isolés. Et d'après le théorème d'inversion locale, on peut définir l'inverse $\mathcal{P}^{-1}$ sur ce voisinage. Et on a :

$$\left(\mathcal{P}^{-1}\right)'(\mathcal{P}(z)) = \frac{1}{\mathcal{P}'(z)} = \frac{1}{\sqrt{Q(\mathcal{P}(z))}}.$$

Et alors :

$$(\mathcal{P}^{-1})'^2 = \frac{1}{Q}.$$

Ainsi $\mathcal{P}'$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{Q}}$.

Le résultat suivant constitue une (presque) réciproque à II.23. Sa démonstration est très difficile et figure dans le poly de Michèle Audin.

Proposition II.29

Soit $Q(X) = 4X^3 - aX - b$ tel que $a^3 - 27b^2 \neq 0$, c'est-à-dire que Q a trois pôles simples dans $\mathbb{C}$. Alors il existe un réseau Λ tel que $a = g_2(\Lambda)$ et $b = g_3(\Lambda)$.

Définition II.30

Une homographie est une application $z \in \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ *avec* $ad - bc = \pm 1$.

Proposition II.31

Soit (u, v) une base de Λ. Si (u', v') est une base de Λ, alors il existe une homographie

$$z \in \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ telle que } \begin{pmatrix} v' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$

La propriété suivante donne une description exacte des changements de réseaux.

Proposition II.32

Il existe une base (ω_1, ω_2) du réseau Λ pour laquelle $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ vérifie :

1. $\mathcal{I}m(\tau) > 0$,
2. $-\frac{1}{2} < \mathcal{R}e(\tau) \leqslant \frac{1}{2}$,
3. $|\tau| \geqslant 1$,
4. Si $|\tau| = 1$, alors $\mathcal{R}e(\tau) \geqslant 0$.

Inversement, si $\tau \in \mathbb{C}$ vérifie ces quatre conditions, alors il existe 2,4, ou 6 bases (ω_1, ω_2) de Λ telles que $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

Démonstration :

— Il existe (ω_1, ω_2) une base de Λ telle que[2] :

$$|\omega_1| \leqslant |\omega_2| \leqslant \min(|\omega_1 - \omega_2|, |\omega_1 + \omega_2|).$$

On pose $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$. Comme $|\omega_2| \leqslant |\omega_1 \pm \omega_2|$, on a :

$$|\tau| = \left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| \leqslant |\tau \pm 1|.$$

On en déduit :

$$|\tau|^2 \leqslant |\tau|^2 \pm 2\mathcal{R}e(\tau) + 1.$$

Donc $|\mathcal{R}e(\tau)| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Si $\mathcal{R}e(\tau) = -\dfrac{1}{2}$, on a alors $|\tau| = |\tau + 1|$ et ainsi :

$$|\omega_2| = |\omega_1 + \omega_2| \leqslant |\omega_1 - \omega_2|.$$

On échange alors ω_2 et $\omega_1 + \omega_2$:

$$\tau = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1} = 1 + \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ et } \mathcal{R}e(\tau) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On peut donc se ramener à $-\dfrac{1}{2} < \mathcal{R}e(z) \leqslant \dfrac{1}{2}$. Et en s'intéressant à la partie imaginaire de τ :

$$\mathcal{I}m(z) = \mathcal{I}m(\frac{\omega_2}{\omega_1}) = \mathcal{I}m(\frac{\omega_2\overline{\omega_1}}{|\omega_1|^2}) = \frac{1}{|\omega_1|^2}\mathcal{I}m(\omega_2\overline{\omega_1}).$$

Ainsi, quitte à échanger ω_1 en $-\omega_1$, on peut supposer que $\mathcal{I}m(z) > 0$. Si $|\tau| = 1$, alors on peut écrire $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in [0, \pi[$. Si $\cos(\theta) \leqslant 0$, alors $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \geqslant 0$ et $e^{i(\pi-\theta)} = -\dfrac{1}{\tau} = -\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$. On échange $-\omega_1$ et ω_2 de sorte qu'on ait toujours $\mathcal{R}e(\tau) \geqslant 0$ si $|\tau| = 1$

— Inversement, soit $\tau, \tau' \in \mathbb{C}$ satisfaisant ces quatre propriétés et on suppose qu'il existe une homographie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $ad - bc = 1$ telle que $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$. On veut montrer que $\tau = \tau'$.

$$\mathcal{I}m(\tau') = \mathcal{I}m\left(\frac{(a\tau + b)(c\overline{z} + d)}{|c\tau + d|^2}\right) = \frac{1}{|c\tau + d|^2}(ad - bc)\mathcal{I}m(\tau).$$

Ainsi

$$\mathcal{I}m(\tau') = \frac{\mathcal{I}m(\tau)}{|c\tau + d|^2} > 0.$$

Ainsi, quitte à échanger τ et τ', on peut supposer que $\mathcal{I}m(\tau') \geqslant \mathcal{I}m(\tau) > 0$. On obtient ainsi $|c\tau + d| \leqslant 1$ *i.e* :

$$c^2|\tau|^2 + 2cd\mathcal{R}e(z) + d^2 \leqslant 1.$$

Donc[3]

$$c^2 - |c||d| + d^2 \leqslant 1.$$

2. On prend une base (ω_1, ω_2) de Λ et quitte à échanger (ω_1, ω_2) avec $(\omega_1 + \omega_2, \omega_1 - \omega_2)$, on a ce que l'on veut
3. Car $2cd\mathcal{R}e(z) \geqslant -2|c||d||\mathcal{R}e(\tau)| \geqslant -|c||d|$.

On en déduit que
$$\left(|c| - \frac{|d|}{2}\right)^2 + \frac{3d^2}{4} \leqslant 1.$$
Ainsi
$$d^2 \leqslant \frac{4}{3} < 2.$$
Ainsi nécessairement $d \in \{-1, 0, +1\}$.

— Si $c = 0$, alors $a = d = \pm 1$. D'où
$$\tau' = \frac{a\tau + b}{d} = \tau + \frac{b}{d} = \tau \pm b.$$
Donc en module :
$$|\tau'| = |\tau \pm b| \geqslant 1$$
Or en regardant les parties réelles :
$$|\mathcal{R}e(\tau') - \mathcal{R}e(\tau)| = |b| \leqslant \frac{1}{2}.$$
Ainsi nécessairement $b = 0$ et alors $\tau' = \tau$.

— Si $c \neq 0$, alors :
$$|\tau + \frac{d}{c}| \leqslant \frac{1}{|c|}.$$
Or, on sait que $\left||c| - \frac{|d|}{2}\right| \leqslant 1$. On en déduit que
$$-1 \leqslant |c| - \frac{|d|}{2} \leqslant \;\; i.e \;\; -1 \leqslant -1 + \frac{|d|}{2} \leqslant |c| \leqslant 1 + \frac{|d|}{2} \leqslant \frac{3}{2}.$$
Ainsi nécessairement, $|c| \leqslant 1$, donc comme $c \neq 0$, on obtient que $c = \pm 1$ et $|\tau \pm d| \leqslant 1$. ‘

— Si $d = 0$, alors $|\tau| = 1$ et comme $ad - bc = 1$, on a nécessairement $b = -c = \pm 1$. Et alors :
$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau} = \frac{a}{c} - \frac{1}{\tau} = \pm a - \frac{1}{\tau} = \pm a - \overline{\tau}\,[4].$$
Ainsi $\mathcal{R}e(\tau' + \overline{\tau}) = \mathcal{R}e(\tau + \tau') = \pm a$. $\pm a = 1$, alors $\tau' = 1 - \overline{\tau}$ et ainsi :
$$\frac{1}{2} < \mathcal{R}e(\tau') = 1 - \mathcal{R}e(\tau) \leqslant 1.$$
Or ceci est faux car $\mathcal{R}e(\tau') \leqslant \frac{1}{2}$. Donc nécessairement $a = 0$ et $\tau' = -\overline{\tau} = -\frac{1}{\tau}$. Ainsi $|\tau'| = |\tau| = 1$ et ainsi : $\tau = \tau' = i$.

— Si $d \neq 0$, selon Farid :

T'inquiètes on le fera ensemble

Seules trois homographies possèdent au moins un point fixe :
$$\tau \mapsto -\frac{\tau + 1}{\tau} \;;\; \tau \mapsto \frac{-1}{\tau + 1} \;;\; \tau \mapsto \frac{-1}{\tau + 1}.$$
Fin par Farid.

4. car $|\tau| = 1$

$\square$

II.4.3 Intégrales elliptiques

On a vu que comme $\mathcal{P}' = \sqrt{Q(\mathcal{P})}$ pour une détermination de la racine carrée, $z \mapsto \dfrac{1}{\mathcal{P}'}$ est bien définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{P}'(a) \neq 0$ d'après le principe des zéros isolés. Et d'après le théorème d'inversion locale, on peut définir l'inverse $\mathcal{P}^{-1}$ sur ce voisinage. Et on a :

$$\left(\mathcal{P}^{-1}\right)'(\mathcal{P}(z)) = \frac{1}{\mathcal{P}'(z)} = \frac{1}{\sqrt{Q(\mathcal{P}(z))}}.$$

Et alors :

$$(\mathcal{P}^{-1})'^2 = \frac{1}{Q}.$$

Ainsi $\mathcal{P}'$ est une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{Q}}$. On peut généraliser ces expressions aux polynômes Q de degré 3 ou 4 avec des racines distinctes selon la proposition suivante :

Proposition II.33

Si Q est un polynôme de degré 3 ou 4 dont toutes les racines sont distinctes (donc simples), alors il existe une fonction f elliptique et non constante telle que sur tout ouvert $U \subset \mathbb{C}$ sur lequel f est inversible d'inverse $g : f(U) \to U$, on a :

$$\forall z \in f(U) : \left(g'\right)^2(z) = \frac{1}{Q(z)}.$$

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $Q(x) \neq 0$. Alors, il existe un ouvert U, $x \in U$, tel que pour tout $z \in U$, $Q(z) \neq 0$.

- Si $Q(X)$ est de la forme $Q(X) = X^3 - aX - b$, alors, d'après II.29, il existe un réseau Λ tel qu'on a $a = g_2(\Lambda), b = g_3(\Lambda)$ et alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\lambda$ vérifie $(\mathcal{P}')^2 = Q(\mathcal{P}) \neq 0$. Ainsi $\mathcal{P}' \neq 0$ dans U et d'après le théorème d'inversion locale, quitte à étendre U, $\mathcal{P}$ est inversible d'inverse $\mathcal{P}^{-1} : \mathcal{P}(U) \to U$. Et il suffit de prendre $g = \mathcal{P}^{-1}$ pour conclure dans ce cas.
- Supposons que $\deg(Q) = 4$ (et toujours que toutes les racines de Q sont distinctes). On note :

  $$Q(X) = A(X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)$$

  et on peut supposer que $a_4 \neq 0$ (quitte à réordonner les (a_i)). On considère $Q\Big(\dfrac{a_4 X}{X + \frac{1}{a_4}}\Big)$. On a :

  $$\begin{aligned} Q\Big(\frac{a_4 X}{X + \frac{1}{a_4}}\Big) &= A \prod_{i=1}^{3} \Big(\frac{a_4 X}{X + \frac{1}{a_4}} - a_i\Big)\Big(\frac{a_4 X}{X + \frac{1}{a_4}} - a_4\Big) \\ &= (X + \frac{1}{a_4})^{-4} A \prod_{i=1}^{3} \Big((a_4 - a_i)X - \frac{a_i}{a_4}\Big) \times -1 \\ &= A(X + \frac{1}{a_4})^{-4} \prod_{i=1}^{3} \Big((a_4 - a_i)X - \frac{a_i}{a_4}\Big). \end{aligned}$$

On note $\tilde{Q}(X) = \prod_{i=1}^{3} \Big((a_4 - a_i)X - \frac{a_i}{a_4} \Big)$ de telle sorte à ce que :

$$Q\Big(\frac{a_4 X}{X + \frac{1}{a_4}}\Big) A(X + \frac{1}{a_4})^4 = \tilde{Q}(X).$$

On considère $\displaystyle\int_0^{\xi} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{Q(z)}}$. Le changement de variable $z = \dfrac{a_4 s}{s + \frac{1}{a_4}} = a_4 - \dfrac{1}{s + a_4}$ donne que :

$$\int_0^{\xi} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(Q(z)}} = \int_0^{\tilde{\xi}} \frac{\mathrm{d}s}{\Big(s + \frac{1}{a_4}\Big)^2 \sqrt{Q\Big(\frac{a_4 s}{s + \frac{1}{a_4}}\Big)}} = \int_0^{\tilde{\xi}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\tilde{Q}(s)}}.$$

On se ramène donc au cas où $\deg(Q) = 3$.

— Soit $Q(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de degré 3 à racines distinctes. On suppose que $a = 1$ (quitte à considérer $\dfrac{Q}{a}$). Or, on a :

$$Q(X) = \Big(X + \frac{b}{3}\Big)^3 + (c - \frac{b^3}{3})X + d - \frac{b^3}{81}$$

Ainsi, par la transformation $X \mapsto X + \frac{b}{3}$ (de déterminant 1), on se ramène à $Q(X) = a'X^3 + b'X + c'$. Et en considérant $\frac{4}{a'}Q(X)$, on se ramène au premier cas.

□

II.4.4 Transformations conformes et intégrales elliptiques

Définition II.34

*Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dite **conforme en** $a \in U$ si sa matrice jacobienne associée est une similitude directe, i.e de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. On dira qu'elle est **conforme sur** U si elle est conforme en tout point de U*

Proposition II.35

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une application $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe est conforme sur U si f' ne s'annule pas sur U.

Démonstration : C'est une conséquence directe des conditions de Cauchy-Riemann. □

Par convention, on note une homographie :

$$\frac{az + b}{cz + d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons le cas où cette homographie est inversible, *i.e* $ad - bc \neq 0$. Un homographie inversible est une transformation conforme sur son domaine de définition. Si $c \neq 0$, on peut écrire :

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{(ad - bc)}{c^2} \frac{1}{(z + \frac{d}{c})^2}.$$

C'est la composée d'homographies élémentaires du type translation $z \mapsto z + a$, similitude directe $z \mapsto kz$ et inversion $z \mapsto 1/z$.
On vérifie que l'homographie donnée transforme tout cerle ne passsant pas par $-d/c$ en un cercle et tout cercle y passant en une droite.

La transformation de Schwarz-Christoffel

Intéressons-nous à un autre exemple de transformation conforme : *la transformation de Schwarz-Christofel.* Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \in \mathbb{R}$ une suite finie croissante. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_k \in]0,1[$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \mu_k = 2$. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle positive :

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\mu_k}.$$

f est bien définie et holomorphe sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m(z) > 0\}$. On définit $z \mapsto \ln(z)$ comme d'inverse de $z \mapsto e^z$ sur la période $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < (z) < 3\frac{\pi}{2}\}$, c'est-à-dire, $z \mapsto \ln(z)$ définie sur le plan fendu : $\{z \in \mathbb{C} | \mathcal{R}e(z) = 0, \mathcal{I}m(z) \leqslant 0\}$ Soit $z = x \in \mathbb{R}$ et supposons que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\} : x \neq a_k$.

— Si $x < a_1$, alors :

$$(x - a_k)^{\mu_k} = |x - a_k| e^{i\pi\mu_k} \text{ et } f(z) = |f(z)| e^{\sum_{k=1}^{n} i\pi\mu_k} = |f(z)| > 0.$$

— Supposons que $a_{k_0} < x < a_{k_0+1} \leqslant a_n$.
  — Si $k \leqslant k_0$: $(x - a_k)^{\mu_k} = |x - a_k|^{\mu_k}$
  — Si $k > k_0$: $(x - a_k)^{\mu_k} = |x - a_k|^{\mu_k} e^{i\pi\mu_k}$

  On obtient alors :

$$f(x) = |f(z)| e^{i\pi \sum_{k=k_0+1}^{n} \mu_k}.$$

  Ainsi $f([a_{k_0}, a_{k_0+1}])$ reste sur une droite.

— Si $x > a_n$: $f(x) = |f(x)| > 0$.

On suppose maintenant que $a_1 > 0$ (hypothèse licite car on peut toujours s'y ramener avec une translation). Alors f est holomorphe et ne s'annule pas sur le demi-plan ouvert $D := Im(z) > 0$. On pose pour tout $z \in \mathbb{H}$:

$$F(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}s}{f(s)}.$$

$s \mapsto \frac{1}{f(s)}$ est holomorphe sur $\mathbb{H}$. On note D_0 le plan $\mathbb{C}$ fendu le long des demi-droites $\{\mathcal{R}e(z) = a_k,\ \mathcal{I}m(z) \leqslant 0\}$. De plus F se prolonge à D_0 en une application holomorphe au moyen de l'homotopie de chemin :

$$\forall s \in [0,1], \forall z = x + iy,\ \varphi(z, s) = z + is \text{ si } y \geqslant 0, x + i(y + s(1 - y)) \text{ sinon}.$$

Si $t \mapsto \gamma(t)$ est une chemin dans D_0, alors $(t, s) \mapsto \varphi(\gamma(t), s)$ transforme γ en un chemin dans $\mathbb{H}$ (pour $s = 1$). C'est-à-dire, tout chemin dans D_0 est homotope à un chemin dans $\mathbb{H}$. Or, d'après II.35, F est une application conforme sur D_0.

Proposition II.36

L'application F transforme le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ en un ensemble convexe P dont la frontière est un polygone à n côtés d'angles $\pi(1-\mu_k)$ pour $i \in \{1,\dots,n\}$.

Démonstration : La preuve est passée. $\square$

Définition II.37

Considérons une application linéaire affine $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto at+b$ (où $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$) et $\mathbb{L}$ son image.

- *On appelle **segment ouvert** sur $\mathbb{L}$, l'image par γ d'un intervalle ouvert non vide borné de $\mathbb{R}$.*
- *On appelle de même **demi-droite ouverte** sur $\mathbb{L}$, l'image par γ d'un intervalle ouvert illimité de la forme $]-\infty, c[$ ou $]c, +\infty[$.*

Proposition II.38

Soit P un demi-plan ouvert dans $\mathbb{C}$ de frontière L, soit $D \subset P$ un ouvert. On suppose que ∂D contient un ensemble S, segment ouvert ou demi-droite ouverte sur L. Soit $f : D \cup S \to C$, définie et continue sur $D \cup S$, holomorphe sur D. On suppose qu'il existe une droite L' telle que $f(S) \subset L'$. Alors il existe une fonction g holomorphe sur $U = D \cup L \cup \sigma(D)$ qui prolonge f et qui vérifie :

$$g(\sigma(z)) = \sigma'(g(z)),\ \forall z \in D$$

où l'on note σ et σ' les symétries par rapport à L et L' respectivement.

Démonstration : Au moyen des transformations affines $z \mapsto az+b$ et $z \mapsto a'z+b'$ vérifiant : $a\big(\mathcal{I}m(z)=0\big)+b = L$ et $a'L'+b' = \big(Im(z)=0\big)$ et en replaçant f par $f_1 : z \mapsto a'f(az+b)+b'$, on se ramène au cas où $L = L'$ est l'axe réel. Alors $\sigma = \sigma'$ est la symétrie $z \mapsto \overline{z}$. Par hypothèse, $f(S) \subset \mathbb{R}$. L'application $f_1 : z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est continue sur $\sigma(D) \cup S$, analytique sur $\sigma(D)$ et coïncide avec f sur S. On pose : $g(z) = f(z)$ si $z \in D$, et $g(z) = f_1(z)$ si $z \in \sigma(D) \cup S$. Alors g est continue sur U et holomorphe sur $D \cup \sigma(D)$, donc holomorphe sur U. $\square$

II.4.5 Une application : la fonction sn de Jacobi

On se propose de trouver une transformation conforme $z = F(w)$ du demi-plan ouvert $D_0 = \{w \in \mathbb{C} | \mathcal{I}m(w) > 0\}$ sur un rectangle. Le problème est résolu par la transformation de Schwarz-Christofel avec $n = 4, {}_k = \frac{1}{2}, k \in \{1,\dots,4\}$, soit par exemple :

$$z = F(w) = \int_0^w \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} \text{ avec } 0 < k < 1.$$

Alors, les deux premiers sommets du rectangle ouvert $R_0 := F(D_0)$ sont :

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} =: K.$$

$$F\big(\frac{1}{k}\big) = F(1) + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} e^{i\frac{\pi}{2}} =: K + iK'.$$

De plus, par le changement de variable : $s = iu$, on remarque que pour tout $t \in R_+^*$: $F(it) \in i\mathbb{R}_+^*$. Donc d'après le principe de symétrie :

$$\forall w \in D_0 : F(-\overline{w}) = -\overline{F(w)}.$$

En particulier : $F(-1) = -F(1) = -K'$. et $F\big(-\dfrac{1}{k}\big) = -K + iK'$.

Définition II.39

On appelle ***fonction sinus intégrale de Jacobi*** *la transformation conforme $R_0 \to D_0$ réciproque de F. On la note* sn.

Du travail précédent, on a directement :

$$\forall z \in R_0 = F(D) : \mathrm{sn}(-\overline{z}) = -\overline{\mathrm{sn}(z)}.$$

Proposition II.40

L'application sn se prolonge en une fonction elliptique sur $\mathbb{C}$ avec la double périodicité :

$$\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{sn}(z + 4K) = \mathrm{sn}(z),\ \mathrm{sn}(z + 2iK') = \mathrm{sn}(z) = \overline{\mathrm{sn}(\overline{z})}.$$

Démonstration : Je passe la preuve pour ma santé mentale. $\square$

III Solutions holomorphes d'équations différentielles

Note : Pour les démonstrations de cette partie qui ne seront pas notées, on se réfère au poly de Victor Lecerf.
On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante dans $\mathbb{C}$:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \tag{III.1}$$

Théorème III.1

Si p et q sont des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors pour tout couple $(a_0, a_1) \in \mathbb{C}^2$ le problème de Cauchy III.1 admet une unique solution w holomorphe sur Ω telle que $w(z_0) = a_0, w'(z_0) = a_1$ avec $z_0 \in \Omega$.

III.1 Points singuliers Fuchsiens

On cherche à résoudre III.1 avec p et q non holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$.

Définition III.2

*Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est un **point singulier fuchsien** de III.1 si c'est un pôle d'ordre 1 de p ou d'ordre $\leqslant 2$ de q, i.e. qu'il existe $b_0, c_0 \in \mathbb{C}$ tels que :*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)p(z) = b_0 \text{ et } \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^2 q(z) = c_0.$$

Dans la littérature, on qualifie aussi ces points comme des singularités régulières.

Théorème III.3: Théorème de Fuchs

On suppose que z_0 est un point singulier fuschien de complexes associés b_0, c_0. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ les racines de $\alpha(\alpha - 1) + \alpha b_0 + c_0 = 0$, telles que $\mathcal{Re}(\alpha_1) \geqslant \mathcal{Re}(\alpha_2)$.

- Si $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$ alors il existe deux solutions linéairement indépendantes développables au voisinage de z_0 sous la forme :

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\alpha_1}\phi(z) \text{ et } w_2(z) = (z - z_0)^{\alpha_2}\psi(z)$$

  où ϕ et ψ sont des fonctions holomorphes au voisinage de z_0, donc $\phi(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k (z - z_0)^k$ avec a_0 non nul et $\psi(z) = \sum_{k \geqslant 0} a'_k (z - z_0)^k$ avec a'_0 non nul.
- Sinon, si $\alpha_1 - \alpha_2 = m \in \mathbb{Z}$, il existe deux solutions linéairement indépendantes développables au voisinage de z_0 sous la forme :

$$w_1(z) = (z - z_0)^{\alpha_1}\phi(z) \text{ et } w_2(z) = (A \ln(z - z_0) + \psi(z))w_1$$

  où $A \in \mathbb{C}$ est une constante et ψ est holomorphes au voisinage de z_0 et est défini comme dans le cas au dessus et ϕ admet z_0 comme pôle d'ordre m :

$$\phi(z) = \sum_{k\geqslant 0, k\neq m} \frac{\beta_k}{k-m}(z-z_0)^{k-m} + C.$$

Démonstration : La méthode employée est celle de Frobenius (on considère $z_0 = 0$ pour simplifier) :

— On considère les fonctions holormorphes $P : z \mapsto zp(z)$ et $Q : z \mapsto z^2 q(z)$ qui sont développables en série entière.

— On multiplie III.1 par z^2 puis on remplace tout par des séries entières, puis, par unicité de développement en série entière, on obtient une équation de récurrence sur les coefficients a_n du développement cherché d'une éventuelle solution w.

— On trouve alors le rayon de convergence de la série entière associée à w. (Dans cette démonstration, on a alors deux solutions possibles w_1, w_2 selon que l'on considère α_1 ou α_2).

— On calcule le Wronskien de w_1 et w_2 pour montrer qu'elles sont indépendantes si $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{N}$. Sinon par analyse-synthèse, on trouve u holomorphe sur un voisinage de z_0 telle que $w_2 = uw_1$.

□

Définition III.4

On dit que $z = \infty$ est un point singulier fuschien si l'équation obtenue après le changement $\zeta = \dfrac{1}{z}$ admet $\zeta = 0$ pour point singulier fuschien.

Proposition III.5

$\zeta = \infty$ est un point singulier fuschien si et seulement si :

$$\lim_{z\to 0} \left(2 - \frac{1}{\zeta^2} P\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) = b_0 \in C \text{ et } \lim_{z\to 0} \frac{1}{\zeta^2} q\left(\frac{1}{\zeta}\right) = c_0 \in \mathbb{C}.$$

A reprendre

Exemple : On cherche à résoudre :

$$w'' + \frac{w'}{z(z+2)} + \frac{w}{z^2} = 0. \tag{III.2}$$

— Ici $p(z) = \dfrac{1}{z(z+2)}$ et $q(z) = \dfrac{1}{z^2}$. $z = 0$ est donc un point singulier fuschien de III.2. Soit $z \in \mathcal{B}(0,2)$, w est solution de :

$$z^2(z+2)w'' + zw' + (z+2)w = 0\,[5].$$

On cherche w sous la forme :

$$w(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ où } a_0 \neq 0.$$

On a alors en remplaçant dans l'équation, ré-indexation et en regardant les termes en z^α :

$$2\alpha(\alpha-1)a_0 + \alpha a_0 + 2a_0 = 0.$$

5. On aurait pu garder le $\dfrac{1}{z+2}$ dans l'équation et le développer en série entière mais ça fait un peu plus de calculs.

Donc on obtient par résolution de l'équation du second degré deux racines distinctes α_+ et α_- vérifiant :

$$\alpha_+ - \alpha_- = \frac{i\sqrt{15}}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

On obtient alors deux solution indépendantes d'après le théorème de Fuchs :

$$w_\pm(z) = z^{\frac{1}{4}} z^{\pm\frac{i\sqrt{15}}{4}} \psi^\pm$$

où $\psi^\pm$ sont des fonctions holomorphes sur $\mathcal{B}(0,2)$.

— Si on cherche les solutions $v(z)$ sous la forme $w\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, on obtient en remplaçant dans III.2 (et après quelques lignes de calculs) :

$$\zeta^2 v'' + \frac{\zeta(\zeta+2)}{1+2\zeta} v' + v = 0.$$

Donc sous forme résolue (pas de coefficients devant le terme de dérivée seconde) :

$$v'' + p(\zeta)v' + q(\zeta)v = 0 \text{ où } p(\zeta) = \frac{\zeta+2}{\zeta(1+2\zeta)} \text{ et } q(\zeta) = \frac{1}{\zeta}.$$

Ainsi, 0 est un point singulier fuschien de cette équation. On cherche v sous la forme

$$v(\zeta) = \zeta^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \zeta^n \text{avec } \beta \in \mathbb{C}, b_0 \neq 0.$$

On refait la méthode du point précédent pour trouver que :

$$(\beta^2 + \beta + 1)b_0 = 0 \text{ donc } \beta^\pm = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Donc au voisinage de $\zeta \to 0$, on obtient :

$$v^\pm \sim \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \zeta^{\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}} b_0.$$

Donc au voisinage de $|z| \to \infty$:

$$w^\pm \sim \sqrt{z} z^{-\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}} b_0.$$

Enfin, on remarque que le développement obtenu est bien infini, en effet, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\big((\beta+n)^2 + (\beta+n) + 1\big)b_n\big) = -\big(2(\beta+n-1)^2 + (\beta+n-1) - 2\big)b_{n-1}.$$

Ainsi si la suite (b_n) s'annule à partir d'un certain rang, la suite (b_n) est nulle ce qui n'est pas le cas (on rappelle qu'on cherche au début une solution telle que $b_0 \neq 0$).

III.2 Intégrales de contour

Soit l'équation de Bessel :

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \lambda^2) w = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

On trouve les solutions :

$$w^{\pm}(z) = z^{\pm\lambda}\phi_{\pm}(z) \quad \text{avec } \phi_{\pm} \text{ holomorphes sur } \mathbb{C}.$$

On peut aussi chercher des solutions sous la forme d'une intégrale de contenu :

$$z \mapsto \int_L e^{z\phi(\xi)} v(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

où ϕ est une phase donnée et où v est l'inconnue définie sur un contenu L à choisir. On obtient les fonctions de Hankel :

$$H_\lambda^I(z) = \int_{L_1} e^{-iz\sin(\xi)} e^{i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{et} \quad H_\lambda^{II}(z) = \int_{L_2} e^{-iz\sin(\xi)} e^{i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

où $\phi(\xi) = -i\sin(\xi)$ et $v(\xi) = e^{i\lambda\xi}$. On définit L_1 comme ceci : on part de $(0, -\infty)$ jusqu'à $(0, 0)$ puis vers $(-\pi, 0)$ puis vers $(-\pi, +\infty)$. De même, on définit L_2 : on part de $(0, -\infty)$ jusqu'à $(0, 0)$ puis vers $(+\pi, 0)$ puis vers $(+\pi, +\infty)$.

Calcul de H_λ^I :

$$|e^{-iz\sin(\xi)+i\lambda\xi}| \leqslant e^{\mathcal{R}e - iz\sin(\xi)+i\lambda\xi}.$$

On pose $z = x + iy, \xi = \zeta + i\eta$, $\lambda = a + ib$.

- Sur la branche 1 : $\xi = i\eta, \eta < 0$: $\sin(\xi) = i\mathrm{sh}(\eta)$. Donc :

  $$-iz\sin(\xi) + i\lambda\xi = (y - ix)i\mathrm{sh}(\eta) - \lambda\eta.$$

  Donc :

  $$\mathcal{R}e - iz\sin(\xi) + i\lambda\xi = x\mathrm{sh}(\eta) - a\eta.$$

  Ainsi :

  $$|e^{-iz\sin(\xi)+i\lambda\xi}| \leqslant e^{x\mathrm{sh}(\eta)-a\eta}.$$

  Ce dernier terme étant équivalent à $e^{-\frac{x}{2}e^{|\eta|}}$ lorsque que η tend vers $-\infty$ qui est d'intégrale convergente entre 0 et $-\infty$. Donc le terme de la première intégrale de Hankel converge sur la première branche.
- Sur la branche 3 : $\xi = -\pi + i\eta$ où $\eta > 0$. Par le même raisonnement : $\sin(\xi) = -\sin(i\eta)$, donc :

  $$-iz\sin(z) + i\lambda\xi = iz\mathrm{sh}(\eta) + i\lambda(-\pi + i\eta) = iz\mathrm{sh}(\eta) - \lambda\eta - i\pi\lambda.$$

  Ainsi, on obtient le même équivalent qu'au dessus lorsque η tend vers $+\infty$. Donc le terme de la première intégrale de Hankel converge sur la troisième branche.
- Il n'y a aucun problème de définition sur la deuxième branche.

Soient $R > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leqslant x = \mathcal{R}e(z) \leqslant R$.

- Sur la branche 1 :

  $$|e^{-iz\sin(\xi)+i\lambda\xi}| = e^{x\mathrm{sh}(\eta)-a\eta} \leqslant e^{\varepsilon\mathrm{sh}(\eta)-a\eta} \in L^1(\mathbb{R}_-).$$
- Sur la branche 3 : La même majoration montre que la fonction dans la l'intégrale de Hankel est dominée sur cette branche.
- Il y a évidemment domination de la fonction sur la branche 2 qui est un compact.

Donc d'après le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, H^I_λ est holomorphe sur toute bande $\varepsilon \leqslant \mathcal{R}e(z) \leqslant R$, donc holomorphe sur tout compact de $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$ donc holomorphe sur sur cet espace.
Par la méthode des développements en série, on trouve des solutions holomorphes sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. Donc, on cherche un prolongement holomorphe de H^I_λ à $\mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. Pour cela, on se donne $\xi_0 \in]-\pi, \pi[$. On considère alors le chemin $L_1(\xi_0)$ défini par : on part de $(\xi_0, -\infty)$ jusqu'à $(0, 0)$ puis vers $(-\pi - \xi_0, 0)$ puis vers $(-\pi - \xi_0, +\infty)$. On note :

$$D_{\xi_0} = \{z = x + iy \mid x\cos(\xi_0) - y\sin(\xi_0) > 0\}.$$

On montre de la même manière que pour L_1, que $z \mapsto \displaystyle\int_{L_1(\xi_0)} e^{-iz\sin(\xi)+i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi$ est bien définie et holomorphe sur D_{ξ_0} En plus, on remarque que :

$$\bigcup_{-\pi<\xi_0<\pi} D_{\xi_0} = \mathbb{C} - \mathbb{R}_-.$$

On montre que :

$$z \mapsto \int_{L_1(\xi_0)} f(z,\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

est un prolongement holomorphe de H^I_λ sur $D_0 \cup D_{\xi_0}$ par le théorème du prolongement analytique pour tout $_0 \in]-\pi, \pi[$. On obtient ainsi un prolongement holomorphe de H^I_λ à $\bigcup_{-\pi<\xi_0<\pi} D_{\xi_0} \cup D_0 = \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$.
avec $\int_{-\infty}^0 e^{\frac{e^{-\eta}}{2}(y\sin\xi_0 - x\cos\xi_0)}d\eta < +\infty$ ssi $x\cos\xi_0 - y\sin\xi_0 > 0$. De plus :

$$|z\cos\zeta + \lambda| = |z\cos\xi_0\cosh\eta - iz\sin\xi_0\sinh\eta + \lambda| \underset{\eta\to-\infty}{\sim} \frac{e^{-\eta}}{2}|z|$$

Le demi-plan $D_{\xi_0} := \{z = x + iy \in \mathbb{C}, x\cos\xi_0 - y\sin\xi_0 > 0\}$ est l'image de $D_0 = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z > 0$ par la rotation d'angle $-\xi_0$, d'où on déduit que : $\forall z \in D_{\xi_0}$,

$$\left|i(z\cos\zeta + \lambda)e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}\right| \underset{\eta\to-\infty}{\sim} \frac{e^{-\eta}}{2}|z|e^{\frac{e^{-\eta}}{2}(y\sin\xi_0 - x\cos\xi_0)} \underset{\eta\to-\infty}{\to} 0$$

Si$\zeta \in L_1(\xi_0)$ et si $\xi = -\pi - \xi_0$, alors

$$e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta} = e^{i\lambda\pi + o\lambda\xi_0}e^{-iz\sin(\xi_0 - i\eta) - \lambda\eta}$$

et le calcul déjà fait pour $\xi = \xi_0$ montre que H^I_{λ,ξ_0} est une solution holomorphe de (2.11) sur D_{ξ_0}. Si $-\pi < \xi_0 < \pi, D_{\xi_0} \cap D_0 \neq \emptyset$, et donc on obtient un prolongement holomorphe de H^I_λ à $D_{\xi_0} \cup D_0$ si on vérifie que $H^I_\lambda \equiv H^I_{\lambda,\xi_0}$ sur $D_{\xi_0} \cap D_0$

Soit $\gamma > 0$ et soit $C^I_{+\gamma}$, resp. $C^I_{-\gamma}$, le contour réunion des segments $[-\xi_0 - \pi, -\pi] \subset \mathbb{R}, i\gamma + [-\xi_0 - \pi, -\pi] \subset i\gamma + \mathbb{R}, i[0,\gamma] \subset i\mathbb{R}, -\xi_0 - \pi + i[0,\gamma] \subset -\xi_0 - \pi + i\mathbb{R}$, resp. $[0, \xi_0] \subset \mathbb{R}, -i\gamma + [0, \xi_0] \subset -i\gamma + \mathbb{R}, i[-\gamma, 0] \subset i\mathbb{R}, \xi_0 + i[-\gamma, 0] \subset \xi_0 + i\mathbb{R}$, parcouru dans le sens direct. Pour tout $z \in \mathbb{C}, \zeta \mapsto e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}$ est holomorphe sur $C^I_{+\gamma}$, resp. $C^I_{-\gamma}$, donc

$$\int_{C^I_{\pm\gamma}} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta = 0, \quad \forall\gamma > 0$$

En particulier,

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\int_{C^I_{\pm\gamma}} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta = \int_{C^I_{\pm\infty}} e^{-iz\sin\zeta + i\lambda\zeta}d\zeta = 0$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\int_{i\gamma+[-\xi_0-\pi,-\pi]} e^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}d\zeta = \lim_{\gamma\to+\infty}\int_{-i\gamma+[0,\xi_0]} e^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}d\zeta = 0$$

En effet, si $\zeta = -i\gamma+\xi$ avec $\xi\in[0,\xi_0]$, alors

$$\left|e^{-iz\sin\zeta}\right| = e^{y\sin\xi\cosh\gamma - x\cos\xi\sinh\gamma} \underset{\gamma\to+\infty}{\sim} e^{\frac{e^{\gamma}}{2}(y\sin\xi - x\cos\xi)}$$

avec : $y\sin\xi - x\cos\xi < 0, \forall z\in D_{\xi_0}\cap D_0$. Soit $z\in D_{\xi_0}\cap D_0$ ficxé. L'application $\xi\mapsto y\sin\xi - x\cos\xi$ est continue et <0 sur le compact $[0,\xi_0]$ donc elle y atteint son maximum dans $]-\infty,0[$, i.e. il existe $c>0$ et $K>0$ t.q. :

$$\forall\zeta\in -i\gamma+[0,\xi_0]\,,\quad \left|e^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}\right| \le Ke^{-\frac{c}{2}e^{-\eta}}$$

d'où on déduit :

$$\left|\int_{C^I_{-\gamma}} e^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}d\zeta\right| \le K\pi e^{-\frac{c}{2}e^{-\eta}} \underset{\gamma\to+\infty}{\to} 0$$

De même, si $\zeta = i\gamma+\xi$ avec $\xi\in[-\pi-\xi_0,-\pi]$, alors, en posant $t=-\xi-\pi$, $0\le t\le\xi_0$, on obtient : $\forall t\in[0,\xi_0]$,

$$\left|e^{-iz\sin\zeta}\right| = e^{y\sin t\cosh\gamma - x\cos t\sinh\gamma} \underset{\gamma\to+\infty}{\sim} e^{\frac{e^{\gamma}}{2}(y\sin t - x\cos t)}$$

et on conclut de ce qui précède que

$$\lim_{\gamma\to+\infty}\int_{C^I_{+\gamma}} e^{-iz\sin\zeta+i\lambda\zeta}d\zeta = 0.$$

On obtient ainsi un prolongement holomorphe de H^I_λ, resp. H^{II}_λ, à $D_{\xi_0}\cup D_0$, $\forall\xi_0\in]-\pi,\pi[$, i.e. à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.

III.3 Comportement asymptotique

Si $\xi_0 = -\frac{\pi}{2}$ dans (2.12), alors on trouve l'expression suivante de $H^I_\lambda(z)$ valable pour $\mathrm{Im}(z)>0$:

$$H^I_\lambda(z) = \frac{e^{-i\frac{\pi\lambda}{2}}}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\cosh\eta-\lambda\eta}d\eta.$$

resp. pour $\mathrm{Im}(z)<0$:

$$H^{II}_\lambda(z) = \frac{e^{i\frac{\pi\lambda}{2}}}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\cosh\eta-\lambda\eta}d\eta$$

On en déduit :

$$H^I_\lambda(it) = \frac{e^{i\frac{\pi\lambda}{2}}}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\cosh\eta-\lambda\eta}d\eta,\quad \forall t>0$$

resp. :

$$H_\lambda^{II}(it) = \frac{e^{i\frac{\pi\lambda}{2}}}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\cosh\eta - \lambda\eta}d\eta, \quad \forall t < 0$$

Proposition III.6

$\forall \lambda > 0$

$$H_\lambda^I(it) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{i\pi\lambda}{2}}}{i\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{t}}e^{-t}$$
$$H_\lambda^{II}(it) \underset{t\to-\infty}{\sim} -\frac{e^{\frac{i\pi\lambda}{2}}}{i\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{-t}}e^{t}$$

Ce résultat est la conséquence du résultat préliminaire suivant.

Lemme III.7

On considère l'intégrale

$$I(t) = \int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx$$

où g et h sont deux fonctions réelles continues par morceaux vérifiant :

—
$$\int_0^{+\infty} |g(x)|e^{h(x)}dx < +\infty$$

— $\exists \delta_0 > 0$ t.q. $\forall \delta \in [0, \delta_0], \forall x \geq \delta, h(x) \leq h(\delta)$.

— il existe des constantes a, $A \in \mathbb{R}, A \neq 0, c > 0, \alpha > -1, \beta > 0$ t.q.

$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} Ax^\alpha, \quad h(x) \underset{x\to 0}{=} a - cx^\beta + o\left(x^\beta\right).$$

Alors :

$$I(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{A}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)e^{at}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$$

Démonstration : On commence par la preuve du lemme.Soit $\lambda \in]0, c[$. Il existe $\delta = \delta(\lambda) \in]0, \delta_0[$ t.q. $(A-\lambda)x^\alpha \leq g(x) \leq (A+\lambda)x^\alpha, \quad a-(c+\lambda)x^\beta \leq h(x) \leq a-(c-\lambda)x^\beta, \quad \forall x \in [0, \delta]$.

On en déduit :

$$e^{-at}\int_0^\delta g(x)e^{th(x)}dx \geq (A-\lambda)\int_0^\delta x^\alpha e^{-t(c+\lambda)x^\beta}dx$$

$$\underset{u=t(c+\lambda)x^\beta}{=} \frac{(A-\lambda)}{\beta(t(c+\lambda))^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\int_0^{t(c+\lambda)\delta^\beta} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}}e^{-u}du \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{(A-\lambda)}{\beta(t(c+\lambda))^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

i.e. :

$$\liminf_{t\to+\infty} e^{-at}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}\int_0^\delta g(x)e^{th(x)}dx \geq \frac{(A-\lambda)}{\beta(c+\lambda)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

De même :

$$\limsup_{t\to+\infty} e^{-at}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}\int_0^{\delta} g(x)e^{th(x)}dx \leq \frac{(A+\lambda)}{\beta(c-\lambda)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

De plus, si $t>1$,

$$\left|\int_{\delta}^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx\right| \leq \int_{\delta}^{+\infty} |g(x)|e^{th(x)}dx \leq e^{(t-1)h(\delta)}\int_{\delta}^{+\infty} |g(x)|e^{h(x)}dx$$

donc

$$\begin{aligned}
e^{-at}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}\left|\int_{\delta}^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx\right| &\leq e^{-t(a-h(\delta))}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}e^{-h(\delta)}\int_{\delta}^{+\infty} |g(x)|e^{h(x)}dx \\
&\leq e^{-t(a-h(\delta))}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}e^{-h(\delta)}\int_{0}^{+\infty} |g(x)|e^{h(x)}dx \leq C_\delta e^{-t(a-h(\delta))}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}} \\
&= C_\delta e^{-t(h(0)-h(\delta))}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}} \underset{t\to+\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

i.e. :

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-at}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}\int_{\delta}^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx = 0.$$

Finalement :

$$\liminf_{t\to+\infty} e^{-at}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}\int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx \geq \frac{(A-\lambda)}{\beta(c+\lambda)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

et

$$\limsup_{t\to+\infty} e^{-at}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}\int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx \leq \frac{(A+\lambda)}{\beta(c-\lambda)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

Ceci étant vrai pour tout $\lambda\in]0,c[$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to+\infty} e^{-at}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}\int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx &= \limsup_{t\to+\infty} e^{-at}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}\int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx \\
=: \lim_{t\to+\infty} e^{-at}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}\int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx &= \frac{A}{\beta c^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right).
\end{aligned}$$

□

Démonstration : On fait maintenant la preuve de la proposition. Si $\xi_0 = -\frac{\pi}{2}$, alors on trouve l'expression suivante de $J_\lambda(z)$ valable pour $\mathrm{Im}(z)>0$:

$$H_\lambda^I(z) = \frac{e^{-i\frac{\pi\lambda}{2}}}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\cosh\eta-\lambda\eta}d\eta.$$

En particulier, si $z=it$ avec $t>0$,

$$H_\lambda^I(it) = \frac{e^{-i\frac{\pi\lambda}{2}}}{i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\cosh\eta-\lambda\eta}d\eta = 2\frac{e^{-i\frac{\pi\lambda}{2}}}{i\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t\cosh\eta}\cosh(\lambda\eta)d\eta.$$

et on applique le Lemme préliminaire avec

$$g(x)=\cosh(\lambda a)\underset{x\to 0}{\sim}1$$
$$h(x)=-\cosh(x)\underset{x\to 0}{=}-1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

et

$$h(x)<-1\quad \forall x>0,$$

i.e. :

$$A=1,\quad a=-1,\quad \alpha=0,\quad \beta=2,\quad c=\frac{1}{2}.$$

et en tenant compte de

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

□

Définition III.8

[] On appelle ***fonction de Bessel*** *d'indice $\lambda\in\mathbb{C}$, resp.* ***fonction de Neumann*** *d'indice $\lambda\in\mathbb{C}$, l'application :*

$$J_\lambda=\frac{1}{2}\left(H_\lambda^I+H_\lambda^{II}\right)$$

resp. :

$$Y_\lambda=\frac{1}{2i}\left(H_\lambda^I-H_\lambda^{II}\right).$$

Les fonctions J_λ et N_λ sont définies et holomorphes sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.
Soit $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Par définition :

$$J_\lambda(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_L e^{-iz\sin\zeta+i\lambda z}d\zeta$$

où L est le chemin de $\mathbb{C}$ parcouru dans le sens trigonométrique direct réunion de $-\pi+i\mathbb{R}^+$, $[-\pi,\pi]\subset\mathbb{R}$ et $\pi+i\mathbb{R}^+$. Le changement de variable $u=e^{-i\zeta}$ transforme L en le chemin $C=I^+\cup\gamma\cup I^-$réunion de

$$I^\pm:=\left\{te^{\pm i\pi},t>1\right\},$$
$$\gamma:=\left\{e^{i\theta},\quad \theta\in\right]-\pi,\pi[\}.$$

On en déduit :

$$J_\lambda(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_C e^{z\left(u-\frac{1}{u}\right)}u^{-\lambda-1}du$$

et par le théorème de Cauchy cette intégrale n'est pas changée si on remplace le contour C par sa transformée dans une homothétie de rapport >0. Donc si $z=x>0$, le changement de variable $v=\frac{xu}{2}$ conduit à :

$$J_\lambda(x) = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \int_C e^{v-\frac{x^2}{4v}} v^{-\lambda-1} dv$$

et par prolongement analytique :

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-, \quad J_\lambda(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \int_C e^{v-\frac{z^2}{4v}} v^{-\lambda-1} dv;$$

avec :

$$\forall v \in C, \quad e^{-\frac{z^2}{4v}} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z^2}{4v}\right)^n$$

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$t.q. $|z| \leq R$ avec $R > 1$. Si $v \in \mathbb{C}$ et $|v| = 1$, alors

$$\sum_{n\geq 0}\left|\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z^2}{4v}\right)^n\right| \leq \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\frac{R^2}{4}\right)^n = e^{\frac{R^2}{4}} < +\infty$$

et

$$\left|e^v v^{-\lambda-1}\right| \leq e^{|v|}|v|^{-a-1}e^{2\pi|b|} = e^{2\pi|b|+1} =: M.$$

Donc on peut intégrer terme à terme sur γ. Si $v \in I^\pm$avec $|v| \geq r > 1$, soit $v = te^{\pm i\pi}$ avec $t \geq r$, alors

$$\sum_{n\geq 0}\left|\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z^2}{4v}\right)^n\right| \leq \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\frac{R^2}{4r}\right)^n = e^{\frac{R^2}{4r}} < +\infty$$

et

$$\left|e^v v^{-\lambda-1}\right| = e^{-t}t^{-a-1}$$

avec

$$\int_\rho e^{-t}t^{-a-1}dt < +\infty.$$

Donc on peut intégrer terme à terme sur $I^\pm$. Finalement :

$$\begin{aligned} J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{2i\pi}\int_C e^v v^{-\lambda-1-n}dv\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \\ = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\lambda+1+n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

IV Exercices

Exercice IV.1

1. Développer en série de Fourier $z \mapsto \dfrac{1}{\sin(z)}$ lorsque $\mathcal{I}m(z) \neq 0$.
2. Idem pour $z \mapsto \cot(z)$.

Solution :

1. Pour développer en série de Fourier cette expression, on utilise d'abord une des formules d'Euler :

$$\forall z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m(z) \neq 0, \quad \frac{1}{\sin(z)} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Cependant, comme $|e^{iz}| = e^{-\mathcal{I}m(z)}$, notre développement de cette fraction va varier selon que $\mathcal{I}m(z)$ soit strictement positif ou strictement négatif.

— Supposons que $\mathcal{I}m(z) > 0$. Dans ce cas on écrit :

$$\frac{1}{\sin(z)} = -2ie^{iz}\frac{1}{1 - e^{2iz}}.$$

On obtient alors le développement en série de Fourier voulu :

$$\frac{1}{\sin(z)} = -2ie^{iz}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{2inz} = -2i\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(2n+1)inz}.$$

— Supposons désormais que $\mathcal{I}m(z) < 0$. Dans ce cas on écrit :

$$\frac{1}{\sin(z)} = 2ie^{-iz}\frac{1}{1 - e^{-2iz}}.$$

On obtient alors le développement en série de Fourier voulu :

$$\frac{1}{\sin(z)} = 2ie^{-iz}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2inz} = 2i\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2n+1)inz}.$$

2. Pour cette deuxième question, on va faire de même qu'à la question précédente (c'est à dire utiliser encore les formules d'Euler). Pour cela on écrit :

$$\text{cotan}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} = \frac{1}{2\pi}e^{iz}\frac{1}{\sin(z)} + \frac{1}{2\pi}e^{-iz}\frac{1}{\sin(z)}.$$

Donc, avec la question précédente, on obtient les résultats suivants :

— Si $\mathcal{I}m(z) > 0$:

$$\text{cotan}(z) = -i + \sum_{n \geqslant 1} -2ie^{2inz}.$$

— Si $\mathcal{I}m(z) < 0$:

$$\text{cotan}(z) = i + \sum_{n \geqslant 1} 2ie^{-2inz}.$$

□

Exercice IV.2

1. Montrer que la série de fonctions méromorphes définie par :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$
converge uniformément sur les bandes $\{a \leqslant \mathcal{R}e(z) \leqslant b\} - \mathbb{Z},\ a < b$. On notera dans le reste de cet exercice, f sa somme.
2. Montrer que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles à préciser.
3. Montrer que f est périodique de période 1.
4. Montrer que :
$$\lim_{|y|\to+\infty} f(x+iy) = 0$$
et que la convergence est uniforme en x.
5. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$: $f(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$.

Solution :

1. Soient $a < b$ et soit $z = x + iy \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ tel que $x \in [a, b]$. On a pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$:
$$|z-n|^2 = |x-n|^2 + |y|^2 \geqslant |x-n|^2.$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $|z-n| \geqslant |x-n|$. Or, on remarque que :
— Si $n < a$: $|z-n| \geqslant |x-n| = x - n \geqslant a - n > 0$.
— Si $n > b$: $|z-n| \geqslant |x-n| = n - x \geqslant n - b > 0$.
Il en résulte que :
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} - \sum_{n=a}^{b} \frac{1}{|z-n|^2} \leqslant \sum_{n<a} \frac{1}{(n-a)^2} + \sum_{n>b} \frac{1}{(n-b)^2}.$$
On en déduit que la série de terme général $\frac{1}{(z-n)^2}$ converge uniformément sur $\tilde{B}(a, b)$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$. K étant borné, il existe $a < b$ tels que $K \subset B(\tilde{a, b})$. D'après la question précédente, f est la somme d'une série de fonctions holomorphes uniformément convergente sur $\tilde{B}(a, b) - \mathbb{Z}$ donc holomorphe (d'après I.7) sur $\tilde{B}(a, b) - \mathbb{Z}$. Donc f est holomorphe sur K. Ceci étant vrai pour tout compact K, f est holomorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$.
Soit $n_0 \in \mathbb{Z}$, on va montrer que n_0 est un pôle double de f. Le même raisonnement montre que $g : z \mapsto f(z) - \dfrac{1}{(z-n_0)^2}$ est limite uniforme sur tout compact de $\tilde{B}(n_0 - \dfrac{1}{2}, n_0 + \dfrac{1}{2})$ d'une série de fonctions holomorphes sur $\tilde{B}(n_0 - \dfrac{1}{2}, n_0 + \dfrac{1}{2})$. Donc g est holomorphe sur $\tilde{B}(n_0 - \dfrac{1}{2}, n_0 + \dfrac{1}{2})$. Donc forcément n_0 est un pôle double de f.
3. Pour montrer la périodicité, on voudrait a priori directement changer d'indice dans la série définissant f, mais cela n'est possible que pour des séries qui convergent absolument dans un complet. Pour contrer cela, on va se servir du théorème de prolongement analytique. Par ré-indiçage (on passe aux sommes finies, on ré-indice, puis on passe à la limite), on obtient facilement que pour tout

$x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z} : f(x+1) = f(x)$. Or, comme $z \in \mathbb{C}-\mathbb{Z} \mapsto f(z+1)-f(z)$ est un prolongement holomorphe de $x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z} \mapsto f(x+1)-f(x)$ à $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$, on en déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}-\mathbb{Z} : f(z+1)-f(z)$. Donc f est périodique de période 1.

4. Soit $R > 0$ et soit $z = x+iy \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$ tel que $|y| \geqslant R$. Par périodicité de f, on peut supposer que $x \in]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$. Soit $n_0 \in \mathbb{Z}^*$ que l'on considère pour l'instant quelconque. Le même raisonnement qu'à la question 1. montre que pour tout $|n| \geqslant n_0$:

$$|z-n| \geqslant \left(|n| - \frac{1}{2}\right)^2 + R^2.$$

On obtient donc :

$$\sum_{|n|\geqslant n_0} \frac{1}{|z-n|^2} \leqslant \sum_{|n|\geqslant n_0} \frac{1}{\left(|n|-\frac{1}{2}\right)^2 + R^2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n_0 \geqslant 1$ tels que :

$$\sum_{|n|\geqslant n_0} \frac{1}{\left(|n|-\frac{1}{2}\right)^2 + R^2} < \frac{\varepsilon}{2}\,;\ \lim_{|y|\to+\infty} \sum_{|n|\leqslant n_0} \frac{1}{|z-n|^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Remarquons que de tels ε et n_0 et existent par convergence de la série associée au premier terme et car le deuxième tend vers 0 lorsque $|y|$ tend vers $+\infty$ (c'est une somme finie de termes qui tendent tous vers 0). On en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{|y|\to+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} &\leqslant \lim_{|y|\to+\infty} \sum_{|n|\geqslant n_0} \frac{1}{|z-n|^2} + \lim_{|y|\to+\infty} \sum_{|n|\leqslant n_0} \frac{1}{|z-n|^2} \\ &\leqslant \sum_{|n|\geqslant n_0} \frac{1}{\left(|n|-\frac{1}{2}\right)^2 + R^2} + \lim_{|y|\to+\infty} \sum_{|n|\leqslant n_0} \frac{1}{|z-n|^2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{|y|\to+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} = \lim_{|y|\to+\infty} f(x+iy) = 0$, la convergence étant uniforme en x.

5. Pour tout $z \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$. On pose :

$$g(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2.$$

On montre facilement que g est définie et holomorphe sur $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a par 1-périodicité de $\mapsto \sin(\pi z)$:

$$\lim_{z\to k} (z-k)^2 g(z) = \lim_{z\to k} \frac{(\pi(z-k))^2}{\sin(\pi(z-k))^2} = 1.$$

On en déduit que g est méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui possède comme pôles (doubles) les éléments de $\mathbb{Z}$. De plus, comme g est périodique de période 1, $f-g$ est périodique de période 1. Cela nous invite à étudier $f-g$ comme on a fait pour f, c'est-à-dire pour $z \in \tilde{B}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Calculons le résidu de l'unique pôle de g sur cette bande. Avec l'aide d'un développement limité, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(g,0) &= \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big(z^2 g(z)\Big) = \lim_{z\to 0}\Big(2zg(z) + z^2 g'(z)\Big) \\ &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{2z\pi^2}{\sin(\pi z)^2} + (\pi z)^2 \frac{-2\pi\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^3}\right) \\ &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{2z\pi^2 \sin(\pi z) - 2\pi^3 z^2 \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^3}\right) = \lim_{z\to 0} \pi z = 0 = \mathrm{Res}(f,0)\end{aligned}$$

Donc $f-g$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, périodique de période 1. De plus pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$, on a :

$$|\sin(\pi y)| \geqslant \operatorname{sh}(|\pi y|).$$

Ainsi :

$$|g(z)| \leqslant \left(\frac{\pi}{\operatorname{sh}(|y|)}\right)^2 \underset{|y|\to+\infty}{\to} 0.$$

On en déduit que $f-g$ converge uniformément vers 0 lorsque $|\mathcal{I}m(z)|$ tend vers $+\infty$ uniformément en $\mathcal{R}e(z)$. On en déduit que $f-g$ est bornée sur une période et est donc bornée sur $\mathbb{C}$. Comme elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est aussi constante. Comme elle tend vers 0 lorsque $\mathcal{I}m(z)$ tend vers $+\infty$, nécessairement : $f-g=0$ sur $\mathbb{C}$. Donc $f=g$ sur $\mathbb{C}$

□

Exercice IV.3

1. Montrer que la série de fonctions méromorphes

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ vers la somme :

$$\forall z \in \mathbb{C}-\mathbb{Z} \ : \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}.$$

2. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}-\mathbb{Z} \ : \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2z}{z^2-n^2}\right) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}.$$

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on pose $f_n : z \in \mathbb{C}-\{n\} \mapsto \dfrac{1}{z-n}+\dfrac{1}{n}$. Pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, f_n définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, admet pour unique pôle n (qui est simple).
Soient $z\in\mathbb{C}, n \geqslant n_0$ suffisamment grand :$|z-n| \geqslant ||z|-n| \geqslant n-|z|$. Si $|z|\leqslant R$ et $|n| \geqslant n_0 \geqslant R$ alors :
$$\frac{|z|}{|n(z-n)|} \leqslant \frac{|z|}{|n|(|n|-|z|)} \leqslant \frac{R}{|n|(|n|-R)}.$$
On en déduit que :
$$\sum_{|n|\geqslant n_0}\left|\frac{z}{n(z-n)}\right| \leqslant \sum_{k\geqslant n_0}\frac{2R}{k(k-R)}.$$
On en déduit, par le critère de Cauchy uniforme que la série de terme général $f_n, n\in\mathbb{Z}$ est uniformément convergente sur $\{|z|\leqslant R\}\cap(\mathbb{C}-\mathbb{Z})$ pour tout $R>0$, donc converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ vers $f : z \mapsto \dfrac{1}{z}+\displaystyle\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$.
En particulier, d'après le théorème de convergence de Weierstrass, comme les f_n sont holomorphes sur $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$, la série de terme général $f_n', n\in\mathbb{Z}$ converge vers $f'(z)$.

Donc d'après l'exercice précédent, pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} + \sum_{n \neq 0} \frac{-1}{(z-n)^2} = -\Big(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\Big)^2 = g'(z),$$

où on pose $g : z \mapsto \dfrac{\pi}{\tan(\pi z)}$. Ainsi il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$: $f = g + c$.

Pour tout $n \neq 0$: $f_n(z) = \frac{z}{n(z-n)}$ donc $f_n(0) = 0$. Or un développement limité de tan à l'ordre 1 donne :

$$\lim_{z \to 0} (f(z) - g(z)) = \lim_{z \to 0} \Big(\frac{1}{z} - \frac{\pi}{\tan(\pi z)}\Big) = 0.$$

Donc nécessairement $f = g$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$, ce qui donne le résultat demandé.

2. Soit N un entier strictement positif. On a pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\Big) = \sum_{|n| \leqslant N, n \neq 0} f_n(z).$$

On en déduit pour N tendant vers $+\infty$ l'égalité demandée.

□

Exercice IV.4: Ecriture de sinus en produit infini

1. Montrer que f, définie par le produit infini suivant (sous réserve d'existence) :

$$f(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{z^2 - n^2}.$$

Ainsi d'après l'exercice précédent :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}.$$

3. En déduire que sin peut s'écrire comme un produit infini sous la forme :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z} : \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{n^2}\Big).$$

Solution :

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n(z) = 1 - \frac{z^2}{n^2}.$$

On remarque que la série de terme général $z \mapsto f_n(z) - 1, n \geqslant 1$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$. Donc le produit infini considéré est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Ainsi f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ comme produit de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

2. C'est une conséquence directe de IV.19.
3. L'idée ici est de calculer une dérivée logarithmique afin de faire apparaître celle de f :

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\sin(z)\pi^{-1})}{\sin(\pi z)\pi^{-1}} = \pi \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$f(z) = c\frac{\sin(\pi z)}{\pi}$$

Or, par convergence du produit infini :

$$c = \frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)} = \frac{f(z)}{z}\frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \underset{z \to 0}{\to} 1.$$

On en déduit l'égalité demandée.

$\square$

Exercice IV.5: Développement périodique des polynômes de Bernoulli

Attention ! L'énoncé qui suit est légèrement modifié de l'énoncé original (même celui corrigé par Isabelle Gruais).

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}$, l'application $z \in B(0, 2\pi) \mapsto \dfrac{e^{zx}}{e^z - 1}$ se développe sous la forme :

$$\frac{e^{zx}}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi_n(x)}{n!} z^{n-1},$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}^* \varphi_n$ est un polynôme qu'on ne cherchera pas à déterminer.

2. Montrer que pour tout $z, x \in \mathbb{C}$

$$\frac{e^{zx}}{e^z - 1} = \frac{e^{-z(1-x)}}{1 - e^{-z}}.$$

En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\left|\frac{e^{zx}}{e^z - 1}\right| \leqslant \frac{1}{|e^z - 1|} + \frac{1}{|1 - e^{-z}|}.$$

3. On pose pour tout $k \geqslant 1$, $r_k = (2k-1)\pi$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module r_k on a :

$$\left|\frac{1}{e^z - 1}\right| \leqslant C.$$

4. Soit $k \geqslant 1$. Montrer que pour tout des contours $\gamma, \gamma_k \subset \mathbb{C}$ appropriés et pour tout $x \in \mathbb{C}$, on

a les relations suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)} \, \mathrm{d}z.$$

$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} + \sum_{r=1}^{k} \left(\frac{e^{2i\pi rx}}{(2i\pi r)^n} + \frac{e^{2i\pi rx}}{(-2i\pi r)^n} \right) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)} \, \mathrm{d}z.$$

5. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$\varphi_{2k}(x) = (-1)^{k+1} 2(2k)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{(2n\pi)^{2k}},$$

$$\varphi_{2k+1}(x+1) = (-1)^{k+1} 2(2k+1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{(2n\pi)^{2k+1}}.$$

Montrer de plus que les séries définies ci-dessus convergent normalement sur $[0,1]$.

6. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que

$$x - \frac{1}{2} = \varphi_1(x) = -\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi},$$

où la série du membre de droite est uniformément convergente sur les intervalles $[\alpha, 1-\alpha]$ pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et où les sommes partielles sont bornées (pour x et N).

7. Montrer que $\varphi_n(0) = \varphi_n(1)$ pour tout $n \geqslant 2$. Étudier l'existence d'un prolongement holomorphe de $\tilde{\varphi}_n = \varphi_{n|[0,1]}$.

Solution :

1. La fonction $f : z \mapsto \dfrac{e^{zx}}{e^z - 1}$ admet pour pôles les éléments de $2i\pi\mathbb{Z}$. Donc f est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et holomorphe sur $\mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}$. Ainsi 0 est l'unique pôle de f sur $B(0, 2\pi)$. De plus,

$$f(z) \underset{z \to 0}{\sim} \frac{1}{z}.$$

Donc $z = 0$ est un pôle d'ordre 1 et la fonction $g : z \in B(0,2\pi) \mapsto f(z) - \dfrac{1}{z}$ est holomorphe sur $B(0, 2\pi)$. Ainsi g est développable en série entière sous la forme :

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \forall z \in \mathcal{B}(0, 2\pi).$$

Donc pour tout $z \in \mathcal{B}(0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{zx}\Big(\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n x^n}{n!}\Big)\Big(\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n z^{n-1}}{n!} + \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} a_{n-k}\Big) z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \frac{x^k}{k!}\Big) z^n. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\varphi_{n+1}(x)}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \frac{x^k}{k!}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}$:

$$\frac{e^{zx}}{e^z - 1} = \frac{e^{zx}e^{-z}}{(e^z-1)e^{-z}} = \frac{e^{-z(1-x)}}{1-e^{-z}}$$

Soit $x \in [0,1]$, pour $z = s + it \in \mathbb{C}$. Si $s \leqslant 0$

$$\left|\frac{e^{zx}}{e^z-1}\right| = \frac{e^{sx}}{|e^z-1|} \leqslant \frac{1}{|e^z-1|}.$$

De même si $s \geqslant 0$:

$$\left|\frac{e^{zx}}{e^z-1}\right| = \left|\frac{e^{-z(1-x)}}{1-e^{-z}}\right| = \frac{e^{-(-1-x)s}}{|1-e^{-z}|} \leqslant \frac{1}{|1-e^{-z}|}.$$

3. On note

$$R_0 = \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) \in [0,\pi], \mathcal{I}m(z) \in]-2\pi, 2\pi[, |z| \geqslant \frac{\pi}{4}, |z - 2i\pi| \geqslant \frac{\pi}{4} \Big\}.$$

On note $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \dfrac{1}{e^z - 1}$. Comme f est continue sur le compact R_0, il existe $C_0 > 0$ tel que pour tout $z \in R_0$: $|f(z)| \leqslant C_0$. Et comme f est $2i\pi$-périodique, pour tout $z \in R_0$ et pour tout $k \geqslant 1$:

$$|f(z + 2ik\pi)| \leqslant C_0.$$

De plus comme f est bornée sur le demi-plan $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) < 0\}$, on en déduit qu'il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $z \in D$: $|f(z)| \leqslant C_1$. Ainsi, en posant $C = \max(C_0, C_1)$, on obtient, en particulier, que pour tout z de module r_k [6] :

$$|f(z)| \leqslant C.$$

4. Notons $h_n : z \mapsto \frac{f(z)}{z^n}$ pour tout $n \geqslant 1$ Par définition de φ_n :

$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} = \mathrm{Res}(h_n, 0).$$

Les pôles de h sont 0, d'ordre $n+1$ de résidu $\dfrac{\varphi_n(x)}{n!}$ et $2i\pi r, r \in \mathbb{Z}$ qui sont des pôles simples et de résidu :

$$\lim_{z \to 2i\pi r} \frac{(z - 2i\pi r)e^{zx}}{z^n(e^z - 1)} = \lim_{z \to 2i\pi r} \frac{(z-2i\pi r)}{(e^z-1)} \frac{e^{zx}}{z^n} = \frac{1}{e^{2i\pi r}} \frac{e^{2i\pi rx}}{(2i\pi r)^n} = \frac{e^{2i\pi rx}}{(2i\pi r)^n}.$$

Choisissons pour γ un cercle centré en 0 et de rayon $R < 2\pi$. D'après le théorème des résidus :

$$\int_\gamma \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)} \mathrm{d}z = 2i\pi \mathrm{Res}(h_n, 0).$$

D'où la première formule demandée. Choisissons $\gamma_k, k \geqslant 1$ le cercle centré en 0, de rayon $r_k =$

6. Pour ceux qui ne voient pas pourquoi ces z vérifient cette inégalité, je conseille de faire un dessin (ils seront mis un peu plus tard)

$(2k-1)\pi$ (notons qu'il passe entres deux pôles consécutifs de g_n : $2i(k-1)\pi$ et $2ik\pi$). D'après le théorème des résidus, on obtient la seconde égalité demandée.

5. Soit $x \in [0,1]$, on rappelle que pour tout $k \geqslant 1, r_k = (2k-1)\pi$.

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}\,\mathrm{d}z\Big| &= \Big|\int_0^{2\pi} \frac{e^{r_k e^{i\theta}x}}{r_k^n e^{in\theta}(e^{r_k e^{i\theta}}-1)} r_k e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\Big| \\ &= \Big|\int_0^{2\pi} \frac{e^{r_k e^{i\theta}x}}{r_k^{n-1} e^{in-1\theta}(e^{r_k e^{i\theta}}-1)}\,\mathrm{d}\theta\Big| \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_k^{n-1}}\Big|\frac{e^{r_k e^{i\theta}x}}{e^{r_k e^{i\theta}}-1}\Big|\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Donc d'après les questions 2 et 3, il existe une constante C telle que, uniformément en $x \in [0,1]$:

$$\Big|\int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}\,\mathrm{d}z\Big| \leqslant \frac{C}{r_k^{n-1}} 2\pi.$$

Si $n \geqslant 2$, alors :

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\gamma_k} \frac{e^{zx}}{z^n(e^z-1)}\,\mathrm{d}z = 0 \text{ uniformément en } x \in [0,1].$$

Donc :

$$\frac{\varphi_n(x)}{n!} = -\sum_{r=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{2i\pi rx}}{(2i\pi r)^n} + \frac{e^{2i\pi rx}}{(-2i\pi r)^n}\right),$$

et la série converge uniformément sur $[0,1]$.
On retrouve après un petit calcul à partir de ce résultat lorsque $n = 2k$ et $n = 2k+1$, les formules demandées.

6. Pour tous $k \geqslant 1, z \in \mathbb{C}, x \in]0,1[$, on pose $f_k(z,x) = \dfrac{e^{zx}}{z^k(e^z-1)}$. Soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. D'après la question 4, pour montrer la première égalité, il suffit de montrer que :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r_k f_1(r_k e^{i\theta}, x) e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0,\ \forall x \in [\alpha, 1-\alpha].$$

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = \dfrac{\varepsilon\pi}{4C}$ où C est introduit à la question 3. Soient $x \in [\alpha, 1-\alpha[$ et k un entier strictement positif. On a les inégalités suivantes (obtenues à la question précédente) :

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} r_k f_1(r_k e^{i\theta}, x) e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{2\delta C}{r_k^{1-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \text{ et } \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}-\delta}^{\frac{3\pi}{2}+\delta} r_k f_1(r_k e^{i\theta}, x) e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'autre part, pour $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}+\delta, \dfrac{3\pi}{2}-\delta\right]$, on a :

$$|e^{xr_k e^{i\theta}}| = e^{xr_k\cos(\theta)} \leqslant e^{-\alpha r_k \sin(\delta)}.$$

Donc :

$$|r_k f_1(r_k e^{i\theta}, x)| \leqslant \frac{|e^{xr_k e^{i\theta}}|}{|e^{i\theta}||e^{r_k e^{i\theta}}-1|} \leqslant Ce^{-\alpha r_k \sin(\delta)}.$$

De même, en utilisant la relation obtenue à la question 2, on prouve que cette inégalité est obtenue aussi pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} - \delta\right]$ et $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2} + \delta, 2\pi\right]$. On en déduit que :

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r_k f_1(r_k e^{i\theta}, x) e^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C}{2\pi} e^{-\alpha r_k \sin(\delta)} \leqslant \varepsilon \text{ pour } k \text{ assez grand.}$$

D'où le résultat annoncé pour l'égalité. La série du membre de droite est uniformément convergente sur les intervalles $[\alpha, 1-\alpha]$ pour tout $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Enfin, il est clair que les sommes partielles de cette série sont bornées (pour x et N).

7. Supposons que la série de Fourier converge dans $\mathbb{C}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{\varphi_k(z)}{k!} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2i\pi nz}}{(2i\pi n)^k}.$$

Or

— $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{2i\pi nz}}{n^{2z}}$ converge absolument si et seulement si $\mathcal{I}m(z) \geqslant 0$

— $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-2i\pi nz}}{n^{2z}}$ converge absolument si et seulement si $\mathcal{I}m(z) \leqslant 0$.

Donc les développements en séries de Fourier des fonctions $\varphi_n, n \geqslant 1$, n'ont pas de prolongement holomorphe.

□

Exercice IV.6

1. Montrer que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}}$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$ et définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\phi(z) = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}},$$

où γ désigne la constante d'Euler. Montrer que la fonction $\frac{\Phi'}{\Phi}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ s'écrit comme la somme d'une série de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} - (-\mathbb{N})$ normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{C} - (-\mathbb{N})$:

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\Big).$$

3. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} - (-\mathbb{N})$:

$$\phi(z+1) = \frac{\phi(z)}{z}.$$

4. Avec le résultat de l'exercice 3, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$:

$$\phi(z)\phi(1-z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$

Solution :

1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n vérifiant pour tout $z \in \mathbb{C}$: $f_n(z) = (1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}$. Un développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle donne $f_n(z) - 1 = -\frac{z^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. Donc on en déduit par comparaison que la série de terme général $f_n - 1$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.
   De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc le produit infini considéré est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. D'après II.7, on voit que ϕ est non nulle sur $\mathbb{C} - (-\mathbb{N})$. Et, d'après II.8 la série de terme général $\frac{f_n'}{f_n}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C} - (-\mathbb{N})$ vers :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\Big).$$
   Or par définition d'après II.8 :
   $$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n'}{f_n}.$$
   On en déduit l'égalité demandée.
3. Soit $z \in \mathbb{C} - (-\mathbb{N})$:
   $$\begin{aligned}\frac{\phi'(z+1)}{\phi(z+1)} &= \frac{1}{z+1} + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{z+1+n} - \frac{1}{n}\Big),\\ &= \frac{1}{z+1} + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{z+1+n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\Big),\\ &= \frac{1}{z+1} + \gamma + \sum_{n=2}^{+\infty}\Big(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\Big) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big) \text{ (on vérifie que les séries convergent)},\\ &= \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\Big) + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big).\end{aligned}$$
   Or la dernière série considérée converge vers -1. On en déduit que :
   $$\frac{\phi'(z+1)}{\phi(z+1)} = \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} - \frac{1}{z}.$$
   On en intégrant cette dernière relation (, on en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C} - (-\mathbb{N})$:
   $$\phi(z+1) = C\frac{\phi(z)}{z}.$$
   En faisant tendre z vers 0 dans la relation précédente, on obtient :
   $$\phi(1) = C\lim_{z\to 0}\frac{\phi(z)}{z} = C.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= e^{\gamma}\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)e^{-\frac{1}{n}},\\
&= e^{\gamma}\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)e^{-\frac{1}{n}},\\
&= e^{\gamma}\lim_{N\to+\infty}\frac{(N+1)!}{N!}e^{-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}},\\
&= \lim_{N\to+\infty}(N+1)e^{\gamma-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Le dernier terme étant équivalent à $\frac{N+1}{N}$ lorsque $N\to+\infty$, on en déduit que $\phi(1)=1$. Donc pour tout $z\in\mathbb{C}-(-\mathbb{N})$:

$$\phi(z+1)=\frac{\phi(z)}{z}.$$

4. Soit $z\in\mathbb{C}-\mathbb{Z}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\phi(z)\phi(1-z) &= \phi(z)\frac{\phi(-z)}{-z}\\
&= \frac{-1}{z}\phi(z)\phi(-z)\\
&= z\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}}\\
&= z\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+\frac{z}{n})e^{-\frac{z}{n}}(1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}}. \qquad =\\
&= \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.
\end{aligned}$$

□

Exercice IV.7: Autour de la fonction Γ

1. Montrer que l'intégrale
$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
est absolument convergente sur $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathcal{R}e(z)>0\}$.
2. Montrer que $z\mapsto\Gamma(z)$ définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathcal{R}e(z)>0\}$ et que pour tout $z\in\mathbb{C}$ tels que $\mathcal{R}e(z)>0$:
$$\Gamma^{(k)}(z)=\int_0^{+\infty}(\ln(t))^k t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathcal{R}e(z)>0\}$:
$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z).$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour toute $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}.$$

5. Montrer que la fonction Γ se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et holomorphe sur $\mathbb{C} - (-\mathbb{N})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \Gamma$ admet un pôle simple en $-n$ de résidu $\frac{(-1)^n}{n!}$.
6. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$ et que pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$ que :

$$\left|\frac{\Gamma(z+n+1)}{n!n^z}\right| \leqslant \frac{\Gamma(x+n+1)}{n!n^x}.$$

7. En déduire que pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$ que :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z}.$$

Solution :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\mathcal{R}e(z)-1}e^{-t}.$$

— Au voisinage de 0, cette dernière expression est équivalente à $t^{\mathcal{R}e(z)-1}$ qui est le terme général d'une intégrale convergente en 0 si et seulement si $\mathcal{R}e(z) > 0$.

— Au voisinage de $+\infty$, l'expression est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ qui est le terme général d'une intégrale convergente en $+\infty$.

Donc l'intégrale définie par Γ est absolument convergente pour les $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement positive.

2. — Pour tout $t > 0, z \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

— Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x > 0$. On a :

$$|t^{z-1}e^{-t}| = e^{(x-1)\ln(t)}e^{-t}.$$

On va dominer cette fonction en deux parties. Si $t < 1$, alors $e^{(x-1)\ln(t)} = e^{(1-x)\ln(t)}$. Soit $\alpha > 0$. Alors pour tout $x \geqslant \alpha$:

$$t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{\alpha-1}e^{-t},$$

qui est le terme général d'une série convergente au voisinage de 0 (et continue sur $]0,1]$). Si $t > 1$, Soit $R > 0$. Pour tout $x \leqslant R$:

$$|t^{z-1}e^{-t}| \leqslant e^{(R-1)\ln(t)}e^{-t} \leqslant t^{R-1}e^{-t}$$

qui est le terme général d'une série convergente au voisinage de $+\infty$ (et continue sur $[1,+\infty[$). Ainsi l'intégrande est dominée sur tout compact de $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$.

Donc d'après le théorème d'holomorphie sous l'intégrale I.8, Γ est holomorphe sur tout compact de $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$ donc Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$. Ce théorème nous fournit aussi directement l'expression des dérivées k-ièmes demandée.

3. Soit $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$. Par intégration par parties nous donne :

$$\Gamma(z+1) = \Big[- t^z e^{-t} \Big]_0^{+\infty} + z\Gamma(z) = z\Gamma(z).$$

4. Immédiat.
5. **Je n'ai pas encore copié, vous pouvez aller voir la correction sur le moodle.**
6. Soit $n \geqslant 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $x > 0 > -n-1$. Alors $\mathcal{R}e(z+n+1) > 0$, et on peut calculer la valeur de Γ en ce point :

$$\left| \frac{\Gamma(n+z+1)}{n!n^z} \right| = \left| \frac{1}{n!n^z} \int_0^{+\infty} t^{z+n} e^{-t} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{n!n^x} \int_0^{+\infty} |t^{z+n}| e^{-t} \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\Gamma(x+n+1)}{n!n^x}.$$

7. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand tel que $x > -n-1$.

$$\frac{\Gamma(x+n+1)}{(n+1)!n^x} = \frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(n+1)n^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(n+x)}}{\sqrt{2\pi n}} \Big(\frac{x+n}{e}\Big)^{n+x} \Big(\frac{e}{x}\Big)^n \frac{1}{n^x}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x+n+1)}{(n+1)!n^x} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{1+\frac{x}{n}} \Big(\frac{n}{e}\Big)^{n+x} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+x} \Big(\frac{e}{x}\Big)^n \frac{1}{n^x}, \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{1+\frac{x}{n}} \Big(\frac{n}{e}\Big)^{n} \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^{n+x} \frac{1}{n^x}, \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \times \frac{n^x}{n^x} e^{-x} e^x \times \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^x \underset{n\to+\infty}{\sim} 1. \end{aligned}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > -n_0 - 1$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, d'après la question précédente :

$$\left| \frac{\Gamma(z+n+1)}{n!n^z} \right| \leqslant \frac{\Gamma(x+n+1)}{n!n^x}.$$

Donc :

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{\Gamma(z+n+1)}{n!n^z} \right| \leqslant 1.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement positive. D'après la question 4 :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{n!n^z} \times \frac{n!n^z}{\prod_{k=0}^{n-1}(z+k)}.$$

On connaît le comportement lorsque $n \to +\infty$ du premier membre du produit, il nous reste à déterminer celui du second. Pour cela soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z} &= \frac{z}{n^z} \prod_{k=1}^{n} \Big(1+\frac{z}{k}\Big), \\ &= \frac{z}{n^z} \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{z}{k}} \Big(1+\frac{z}{k}\Big) e^{-\frac{z}{k}}, \\ &= z \exp\Big(z\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \Big) \Big) \prod_{k=1}^{n} \Big(1+\frac{z}{k}\Big) e^{-\frac{z}{k}}. \end{aligned}$$

On en déduit avec l'exercice 1 que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z} = ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}.$$

Donc :

$$z \mapsto \Gamma(z)_{n\to+\infty}\frac{(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (par l'égalité précédente et le théorème) et bornée sur $\mathbb{C}$ (par une précédente inégalité), donc il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\Gamma(z)_{n\to+\infty}\frac{(z+1)\dots(z+n)}{n!n^z} = C.$$

Donc en évaluant en $z = 1$, on obtient d'après la question 3 :

$$\lim_{z\to 0} z\Gamma(z) = \Gamma(1) = 1.$$

Donc, le produit infini étant holomorphe sur $\mathbb{C}$, on obtient : $C = 1$. On obtient alors l'égalité demandée.

$\square$

Exercice IV.8

1. Montrer que Γ est bornée sur la bande verticale

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant \mathcal{R}e(z) \leqslant 2\}.$$

2. Soit F une fonction holomorphe sur le demi-plan $\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathcal{R}e(z) > 0\}$. On suppose que pour tout $z \in \mathbf{H}$:

$$F(z+1) = zF(z),$$

et que F est bornée sur B. On pose pour tout $z \in \mathbf{H}$:

$$f(z) = F(z) - F(1)\Gamma(z).$$

Montrer que f se prolonge en une application holomorphe sur $\mathbb{C}$.

3. On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$g(z) = f(z)f(1-z).$$

Montrer que g est bornée sur B.

4. En déduire que $f = 0$. Conclure.

Solution :

1. Soit $z = x + iy \in B$. On a :

$$|\Gamma(z)| \leqslant \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or pour tout $t \in]0,1[$: $t^{x-1} = e^{(1-x)\ln(t)} \leqslant 1$ car $x \in [1,2]$. Donc :

$$\Big|\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant 1 - e^{-1}.$$

Et, si $t > 1$: $t^{x-1} \leqslant t$. Donc :

$$\int_1^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \Gamma(2) = 1.$$

Ainsi

$$|\Gamma(z)| \leqslant 2 - e^{-1}.$$

Finalement, on obtient que Γ est bornée sur B.

2. Soit z de partie réelle strictement positive.

$$f(z+1) = F(z+1) - F(1)\Gamma(z+1) = zF(z) - F(1)z\Gamma(z) = zf(z).$$

Le même raisonnement que pour la question 5 de l'exercice précédent montre que f admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C} - (-\mathbb{N})$ et de pôles simples. Ainsi on a l'expression du résidu de f en ces pôles simples :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mathrm{Res}(f, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}f(1) = \frac{(-1)^n}{n!}(F(1) - F(1)\Gamma(1)) = 0.$$

Donc f admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$.

3. g est bornée sur B si et seulement si g est bornée sur $B - 1 := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \mathcal{R}e(z) \leqslant 1\}$.

$$g(z) = f(z)f(1-z) = \frac{f(z+1)}{z}\frac{f(2-z)}{1-z}.$$

Donc g est bornée sur cette bande privée de 0 et 1 (c'est une fonction holomorphe sur $B - 1$ de pôles simples égaux à 0 et à 1. Or $g(0) = f(0)f(1) = 0$ et $g(1) = f(1)f(0) = 0$ qui sont finis donc g est bornée sur $B - 1$ donc sur B.

4. Pour tout $z \in B$:

$$g(z+1) = f(z+1)f(-z) = zf(z)f(-z) = -g(z).$$

Donc $|g|$ est périodique de période 1 sur B et bornée sur B donc $|g|$ est bornée sur $\mathbb{C}$ et alors g est bornée sur $\mathbb{C}$. Comme g est holomorphe sur $\mathbb{C}$, on en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in \mathbb{C} : g(z) = C$. Or $g(1) = 0$ donc g est nulle. Donc pour $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = 0 \text{ ou } f(1-z) = 0.$$

Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) \neq 0$. D'après le théorème des zéros isolés, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathcal{B}(z_0, r) : f(z) \neq 0.$$

Alors, forcément pour tout $z \in \mathcal{B}(z_0, r) : f(1-z) = 0$ et donc d'après le théorème des zéros isolés : $f(1-z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc f est nulle sur $\mathbb{C}$ [7]. C'est absurde, un tel z_0 ne peut donc exister. On en déduit que f est nécessairement nulle sur $\mathbb{C}$.

7. car $z \in \mathbb{C} \mapsto 1 - z \in \mathbb{C}$ est bijective.

□

Exercice IV.9

1. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n^z}, n \geqslant 1$ est normalement convergente sur tout compact de $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 1\}$. On note $\zeta(z)$ sa somme. En déduire que ζ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 1\}$.
2. On note $\mathcal{P}$, l'ensemble des nombres premiers. Montrer que le produit infini
$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)$$
est normalement convergente sur les compacts de $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 1\}$.
3. On note $(p_n)_{n \geqslant 0}$ la suite des nombres premiers rangées par ordre croissant. En considérant la suite des produits partiels $z \mapsto F_n(z) = \displaystyle\prod_{j=0}^{n} (1 - \frac{1}{p_j^z}), n \geqslant 0$, monter que :
$$\zeta(z) \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p^z}) = 1, \text{si } \mathcal{R}e(z) > 1.$$
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'application $z \mapsto \varphi_n(z) = \int_n^{1+n} (n^{-z} - t^{-z})\, dt$ est holomorphe pour $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$ et que la série de fonctions $\prod_{n \geqslant 1} \varphi_n$ est normalement convergente sur tout compact de H.
5. On pose pour tout $z \in H$: $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(z)$. Montrer que :
$$z \mapsto \frac{1}{z-1} + \varphi(z) \text{ est un prolongement méromorphe de } \zeta \text{ sur } H$$
.
6. Montrer que $f : z \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}$ est holomorphe sur $\tilde{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 1\}$.
7. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $z \in H$:
$$\Gamma(z) n^{-z} = \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-ns}\, ds.$$
8. En déduire un prolongement méromorphe de f à H.

Solution :

1. Soient $a > 1$ et $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $x \geqslant a > 1$. On a pour tout $n \geqslant 1$:
$$\left|\frac{1}{n^z}\right| \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}$$
et la série majorante converge car $a > 1$. Donc par comparaison, la série de terme général $\dfrac{1}{n^z}, n \geqslant 1$ convergente sur le demi-plan des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{R}e(z) \geqslant a$ et cela pour tout $a > 1$. Donc ζ est holomorphe sur ces demi-plans, donc ζ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) > 0\}$.
2. Conséquence immédiate de la réponse précédente.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement plus grande que 1. On a :

$$\zeta(z)F_0(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z}\Big(1 - \frac{1}{p_0^z}\Big) = \sum_{k=1, p_0 \nmid k} \frac{1}{k^z}.$$

On suppose que pour un $n \geqslant 1$ fixé, on a :

$$\zeta(z)F_n(z) = \sum_{k\geqslant 1, p_0,\dots,p_n \nmid k} \frac{1}{k^z}.$$

On obtient alors, au rang $n+1$:

$$\zeta(z)F_{n+1}(z) = (\zeta(z)F_n(z))\Big(1 - \frac{1}{p_{n+1}^z}\Big) = \sum_{k\geqslant 1, p_0,\dots,p_n \nmid k} \frac{1}{k^z} - \sum_{k\geqslant 1, p_0,\dots,p_n \nmid k} \frac{1}{(kp_{n+1})^z}. = \sum_{k\geqslant 1, p_0,\dots,p_{n+1} \nmid k} \frac{1}{k^z}.$$

On obtient ainsi par récurrence sur n :

$$\zeta(z)\prod_{p\in\mathcal{P}}\big(1 - \frac{1}{p^z}\big) = \lim_{n\to+\infty} \zeta(z)F_n(z) = 1.$$

4. Soit $z \in H$. On a :

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{n^z} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^z}.$$

On va appliquer I.8 à l'intégrale qui nous reste. Seule la domination est non triviale. Pour cela, on se place sur un compact de H. Soit $a > 0$. Pour tout $z = x + iy \in= \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) \geqslant a\}$:

$$\Big|\frac{1}{t^z}\Big| \leqslant \frac{1}{t^a}.$$

Et $t \mapsto t^a$ est intégrable sur $[n, n+1]$. Ainsi, $z \mapsto \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^z}$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z) \geqslant a\}$.
Comme l'holomorphie est une notion locale, on en déduit que φ_n est holomorphe sur H.
Pour tout $t \in [n, n+1]$ et pour tout $z = x + iy \in H$:

$$\Big|\frac{1}{n^z} - \frac{1}{t^z}\Big| = \Big|\int_n^t -zs^{-z-1}\,\mathrm{d}s\Big| \leqslant |z|\int_n^t \frac{\mathrm{d}s}{|s|^{z+1}} = |z|\int_n^t \frac{\mathrm{d}s}{s^{x+1}}.$$

On obtient alors :

$$|\varphi_n(z)| \leqslant |z|\int_n^{n+1}\int_n^t \frac{\mathrm{d}s}{s^{x+1}} \leqslant \frac{|z|}{n^{x+1}} \leqslant \frac{|z|}{n^{a+1}}.$$

Ce calcul donne alors que la série de fonctions $\varphi_n, n \geqslant 1$ converge normalement sur les compacts de la forme $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R, \mathcal{R}e(z) \geqslant a, a, R > 0\}$, c'est-à-dire, la série de terme général $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$ converge normalement sur tout compact de $\{\mathcal{R}e(z) > 0\}$.

5. Remarquons d'abord que φ est holomorphe sur H d'après les questions précédentes. De plus, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, de partie réelle $x > 1$:

$$\varphi(z) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N \varphi_n(z) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z} - \int_1^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^z} = \zeta(z) - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1}.$$

Donc $z \mapsto \varphi(z) + \frac{1}{z-1}$ est un prolongement méromorphe[8] de ζ sur H.

6. Pour tout $t > 0$: $z \mapsto \dfrac{t^{z-1}}{e^t - 1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Soit $z = x + iy \in \tilde{H}$, on a les relations suivantes :
$$\frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-2} \text{ et } \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \underset{t \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2}\right)$$
qui justifient que f est bien définie. Pour la domination, on domine aussi par une fonction définie par morceaux, un morceau au voisinage de 0^+ par $t \mapsto t^{x-2}$[9], l'autre au voisinage de $+\infty$ par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. Ainsi par I.8, on en déduit que f est holomorphe sur $\tilde{H}$.

7. Soit $n \geqslant 1$ et $z = x + iy \in H$.
$$\frac{\Gamma(z)}{n^z} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^{z-1} e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{n}.$$
Par le changement de variable licite $s = \dfrac{t}{n}$, on obtient :
$$\frac{\Gamma(z)}{n^z} = \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-ns} \, \mathrm{d}s.$$

8. Soit $z = x + iy \in \tilde{H}$. On a :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(z)}{n^z} = \Gamma(z)\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-nt} \, \mathrm{d}t.$$
Or $|t^{z-1} e^{-nt}| = t^{x-1} e^{-nt}$. Ainsi, par le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |t^{z-1} e^{-nt}| \, \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1} e^{-nt} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}} \, \mathrm{d}t$$
car $0 < e^{-t} < 1, \ \forall t > 0$.On en déduit pour tout $z \in \tilde{H}$:
$$\Gamma(z)\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^{z-1} e^{-nt} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{1 - e^{-t}} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t = f(z).$$
Donc $z \mapsto \Gamma(z)\zeta(z)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur H. On obtient ainsi un prolongement méromorphe de f sur H (holomorphe sur $H - \{1\}$).

□

Exercice IV.10: Fonctions zeta et sigma de Weierstrass

Soit Λ un réseau et soit $\mathcal{P}$ la fonction de Weierstrass associée à ce réseau.

1. Montrer que pour tout $z \in (\mathbb{C} - \Lambda) \cup \{0\}$, l'application :
$$z \mapsto \int_0^z \left(\frac{1}{s^2} - \mathcal{P}(s)\right) \mathrm{d}s.$$
est bien définie sur $(\mathbb{C} - \Lambda) \cup \{0\}$.

8. Ici c'est bien un prolongement classique (on remarque juste que le membre de droite est défini sur un ensemble plus grand que celui de gauche)

9. Par convexité de l'exponentielle

2. En déduit que le problème : trouver ζ solution de

$$\zeta' = -\mathcal{P}, \quad \lim_{z\to 0}\Big(\zeta(z) - \frac{1}{z}\Big)$$

admet une unique solution méromorphe appelée fonction ζ de Weierstrass.

3. Montrer que ζ est impaire, que ses pôles sont les points de Λ, que ces pôles sont simples, de résidu égal à 1.

4. Soit (u, v) une base de Λ. On pose : $\omega_1 = \dfrac{u}{2}$ et $\omega_2 = \dfrac{v}{2}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\zeta(z+u) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_1),\ \zeta(z+v) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_2),\ \omega_2\zeta(\omega_1) - \omega_1\zeta(\omega_2) = i\frac{\pi}{2}.$$

5. Montrer que les conditions suivantes :

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \zeta \text{ et } \lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z} = 1$$

définissent une fonction σ holomorphe sur $\mathbb{C}$.

6. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\sigma(z) = z\prod_{\lambda\in\Lambda-\{0\}}\big(1 - \frac{z}{\lambda}\big)\exp\big(\frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}\big).$$

7. Montrer que σ a un zéro simple en chaque point de Λ.

8. Montrer que σ est impaire. En déduire l'expression de $\sigma(z+u)$ et $\sigma(z+v)$ en fonction de $\sigma(z)$.

Solution :

1. La fonction $z \mapsto \dfrac{1}{z^2} - \mathcal{P}(z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ est ses pôles sont les point de $\Lambda - \{0\}$. Or tout $\lambda \in \Lambda - \{0\}$ est un pôle double de résidu nul. Donc d'après le théorème des résidus, pour tout lacet γ dans $(\mathbb{C} - \Lambda) \cup \{0\}$, on a :

$$\int_\gamma \Big(\frac{1}{z^2} - \mathcal{P}(z)\Big)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Donc, pour tout $z \in (\mathbb{C} - \Lambda) \cup \{0\}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^z \Big(\frac{1}{s^2} - \mathcal{P}(s)\Big)\,\mathrm{d}s$ ne dépend pas du chemin choisi pour aller de 0 à z sans passer par $\Lambda - \{0\}$. Donc $z \mapsto \displaystyle\int_0^z \Big(\frac{1}{s^2} - \mathcal{P}(s)\Big)\,\mathrm{d}s$ est bien définie sur $(\mathbb{C} - \Lambda) \cup \{0\}$.

2. On pose pour tout $z \in (\mathbb{C} - \Lambda) \cup \{0\}$,

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{1}{s^2} - \mathcal{P}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Φ est méromorphe comme primitive d'une fonction holomorphe. On remarque que

$$\phi'(z) - \frac{1}{z^2} = -\mathcal{P}(z).$$

Cela nous invite à poser pour tout $z \in (\mathbb{C} - \Lambda) \cup \{0\}$:

$$\zeta(z) = \phi(z) + \frac{1}{z}.$$

Alors $\zeta' = -\mathcal{P}$. On pose pour $\lambda \in \Lambda - \{0\}$ et pour tout $z \in (\mathbb{C} - \Lambda) \cup \{0\}$:

$$\phi_\lambda(z) = \frac{1}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2}.$$

On remarque que pour tout $z \in (\mathbb{C} - \Lambda) \cup \{0\}$:

$$\phi(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \phi_\lambda(z).$$

Et pour tout $\lambda \in \Lambda - \{0\}$ et pour tout $z \in (\mathbb{C} - \Lambda) \cup \{0\}$:

$$|\phi_\lambda(z)| = \left|\frac{1}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2}\right| = \left|\frac{z^2}{\lambda^2(z-\lambda)}\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $z \in \mathcal{B}(0, \varepsilon)$. Pour ε suffisamment petit : pour tout $\lambda \in \Lambda - \{0\}$, on a $|\lambda| > 2\varepsilon$. Ainsi :

$$|\phi_\lambda(z)| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{|\lambda|^2(|\lambda| - \varepsilon)} \leqslant \frac{2\varepsilon^2}{\lambda^3}.$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{|\lambda|^3}, \lambda \in \Lambda - \{0\}$ converge, on en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $z \in \mathcal{B}(0, \varepsilon)$:

$$\sum |\phi_\lambda(z)| \leqslant C\varepsilon^2.$$

Donc :

$$\lim_{z \to 0} \left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z \to 0} \phi(z) = 0.$$

Démontrons l'unicité : soit φ méromorphe sur $\mathbb{C}$, solution de $\varphi' = 0$ et de limite nulle en 0. Alors φ est constante égale à 0.

3. Pour tout $z \in \mathbb{C} - (\Lambda - \{0\})$:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2}\right),$$
$$\zeta(-z) = -\frac{1}{z} - \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{z+\lambda} - \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2}\right).$$

On pourrait conclure en remarquant que $\lambda \mapsto -\lambda$ est une bijection de $\Lambda - \{0\} \to \Lambda - \{0\}$ et que la série de terme général $\left(\frac{1}{z+\lambda} - \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2}\right)$ converge absolument sauf que cette dernière affirmation ne semble pas triviale. On contourne le problème en montrant que $z \mapsto -\zeta(-z)$ est solution de l'équation différentielle définissant ζ en utilisant la parité de $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ est paire).

4. Pour tout $z \in \mathbb{C} - (\Lambda - \{0\})$:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\lambda \in \Lambda - \{0\}} \left(\frac{1}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2}\right).$$

Donc les pôles de ζ sont les éléments de Λ. Soit $\lambda_0 \in \Lambda$.

— Si $\lambda_0 = 0$:

$$\lim_{z \to 0}(z\zeta(z) - 1) = \lim_{z \to 0} z(\zeta(z) - \frac{1}{z}) = 0 \text{ par hypothèse sur } \zeta.$$

— Sinon :
$$\lim_{z\to\lambda_0}(z-\lambda_0)\zeta(z)=\lim_{z\to\lambda_0}(z-\lambda_0)\Big(\frac{1}{z-\lambda_0}+\frac{1}{\lambda_0}+\frac{z}{\lambda_0^2}\Big)=1.$$

Donc les pôles sont simples de résidus 0 pour le pôle 0 et 1 pour les autres.

5. Soit (u,v) une base de Λ. Considérons :

$$\Phi_u : z\in\mathbb{C}\mapsto \zeta(z+u)-\zeta(z).$$

Pour tout $z\in\mathbb{C}-\Lambda$:

$$\Phi_u'=\zeta'(z+u)-\zeta'(z)=-\mathcal{P}(z+u)+\mathcal{P}(z)=0.$$

Or, on peut montrer par deux méthodes différentes de Φ_u est constante sur $\mathbb{C}-\Lambda$.

— **Méthode 1 :** Φ_u est holomorphe sur $\mathbb{C}-\Lambda$ et par connexité de $\mathbb{C}-\Lambda$, Φ_u est constante sur $\mathbb{C}-\Lambda$.

— **Méthode 2 :** On regarde les résidus de $z\mapsto\zeta(z+u)$ et de ζ.

Or :
$$\Phi_u\big(-\frac{u}{2}\big)=2\zeta\big(\frac{u}{2}\big)=2\zeta(\omega_1).$$

On en déduit la première égalité demandée. Pour la seconde, on fait le même raisonnement en remplaçant u par v.
Pour la dernière relation, le facteur $i\dfrac{\pi}{2}$ nous fait penser à un résidu, donc on pense à l'appliquer sur un bon [10] chemin. On note :

$$L=[-\omega_1-\omega_2,\omega_1-\omega_2]\cup[\omega_1-\omega_2,\omega_1+\omega_2]\cup[\omega_1+\omega_2,-\omega_1+\omega_2]\cup[-\omega_1+\omega_2,-\omega_1-\omega_2].$$

0 est l'unique pôle de ζ entouré par le lacet L, donc d'après le théorème des résidus :

$$\int_L\zeta(z)\,\mathrm{d}z=2i\pi\mathrm{Res}(z,0)=2i\pi.$$

Or :
$$\int_{[-\omega_1+\omega_2,\omega_1+\omega_2]}\zeta(z)\,\mathrm{d}z=\int_{[-\omega_1-\omega_2,\omega_1-\omega_2]}\zeta(z+v)\,\mathrm{d}z.$$

Ainsi :

$$\int_{[-\omega_1-\omega_2,\omega_1-\omega_2]}\zeta(z)\,\mathrm{d}z+\int_{[\omega_1+\omega_2,-\omega_1+\omega_2]}\zeta(z)\,\mathrm{d}z=\int_{[-\omega_1-\omega_2,\omega_1-\omega_2]}(\zeta(z)-\zeta(z+v))\,\mathrm{d}z.$$

Donc d'après la deuxième relation obtenue lors de cette question.

$$\int_{[-\omega_1-\omega_2,\omega_1-\omega_2]}\zeta(z)\,\mathrm{d}z+\int_{[\omega_1+\omega_2,-\omega_1+\omega_2]}\zeta(z)\,\mathrm{d}z=-2\int_{[-\omega_1-\omega_2,\omega_1-\omega_2]}\zeta(\omega_2)\,\mathrm{d}z=4\omega_1\zeta(\omega_2).$$

10. ici, on pense à l'intégrer sur un lacet contenant que 0 comme pôle (car on connaît son résidu) car il permettra de voir le défaut de périodicité de ζ.

Le même raisonnement donne aussi :

$$\int_{[\omega_1-\omega_2,\omega_1+\omega_2]}\zeta(z)\,\mathrm{d}z+\int_{[-\omega_1+\omega_2,-\omega_1-\omega_2]}\zeta(z)\,\mathrm{d}z=\int_{[-\omega_1+\omega_2,-\omega_1-\omega_2]}(\zeta(z)-\zeta(z+u)\,\mathrm{d}z$$
$$=-2\zeta(\omega_1)\times(-2\omega_2)=4\omega_2\zeta(\omega_1).$$

Ainsi en sommant ces deux dernières égalités, et d'après le théorème des résidus :

$$\omega_2\zeta(\omega_1)-\omega_1\zeta(\omega_2)=i\frac{\pi}{2}.$$

6. On cherche Φ solution de $\Phi'(z)=\zeta(z)-\dfrac{1}{z}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$ et $\lim\limits_{z\to 0}\Phi(z)=0$. Alors, Φ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ de pôles les points de Λ^*. Et alors

$$\Phi(z)=\int_0^z\big(\zeta(s)-\frac{1}{s}\big)\,\mathrm{d}s$$

ne dépend pas du chemin reliant 0 à z dans $\mathbb{C}-\Lambda^*$, modulo $2i\pi\mathbb{Z}$ (ce modulo provient des éventuels résidus). Donc $\sigma=ze^{\Phi(z)}$ est uniquement déterminée.

7. On a :

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\int_0^z\sum_{\lambda\in\Lambda^*}\Big(\frac{1}{s-\Lambda}+\frac{1}{\Lambda}+\frac{s}{\Lambda^2}\Big)\,\mathrm{d}s\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda^*}\Bigg(\int_0^z\Big(\frac{\mathrm{d}s}{s-\lambda}\Big)+\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}\Bigg)\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda^*}\Big(\ln\big(\frac{z-\lambda}{-\lambda}\big)+2ik_z\pi+\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}\Big)\text{ où }k_z\in\mathbb{Z}\text{ dépend de }z.\end{aligned}$$

Donc on obtient légalité demandée en se rappelant que $\sigma(z)=e^{\Phi(z)}$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Considérons la fonction :

$$\varphi:u\mapsto(1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}}-1.$$

Un développement limité autour de 0 nous donne que : $\varphi(u)=\underset{u\to 0}{\mathcal{O}}(u^3)$. Donc il existe $\varepsilon>0$ et $C>0$ tels que :

$$\forall u\in\mathcal{B}(0,\varepsilon):|\varphi(u)|\leqslant C|u|^3.$$

Soit $R>0$ et soit $z\in\mathcal{B}(0,R)$. Posons $\rho=\dfrac{R}{\varepsilon}$. Alors pour tout λ de module supérieur ou égal à ρ.

$$\Big|(1-\frac{z}{\lambda})e^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}-1\Big|\leqslant C\Big(\frac{|z|}{|\lambda|}\Big)^3\leqslant C\Big(\frac{R}{|\lambda|}\Big)^3.$$

Donc comme la série de terme général $\dfrac{1}{\lambda^3},\lambda\in\Lambda^*$ converge absolument, la série de terme général $\sum_{\lambda\in\Lambda^*}\varphi\big(\frac{z}{\lambda}\big)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$. Donc σ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. On en déduit que les zéros de σ sont les zéros du produit infini. Ainsi, σ possède un zéro simple en chaque $\lambda\in\Lambda$.

8. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$\sigma(-z)=(-z)\prod_{\lambda\in\Lambda^*}\Big(1-\frac{z}{-\lambda}\Big)e^{-\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}=-z\prod_{-\lambda\in\Lambda^*}\Big(1-\frac{z}{\lambda}\Big)e^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}=-\sigma(z).$$

Donc σ est impaire. On considère $\Psi_u(z) = \dfrac{\sigma(z+u)}{\sigma(z)}$. Un calcul donne :

$$\Psi'_u(z) = (\zeta(z+u) - \zeta(z))\Psi_u(z).$$

On peut alors finir les calculs avec la question 4.

$\square$

Exercice IV.11

1. Montrer que l'application :
$$E : x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}.$$
est inversible sur $]0,1[$, d'inverse $f : I := E(]0,1[) \to]0,1[$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré 3 tel que :
$$\forall y \in I : y = \int_0^{\frac{f(y)}{f(y)+1}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{Q(s)}}.$$
3. En déduire que f se prolonge en une fonction elliptique sur $\mathbb{C}$.

Solution :

1. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ est continue sur $]0,1[$, donc E est de classe C^1 sur $]0,1[$ d'après le théorème fondamental de l'analyse, de dérivée :
$$\forall x \in]0,1[E'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} > 0.$$
On en déduit que E est strictement croissante sur $]0,1[$. Comme elle est aussi continue, elle est inversible d'inverse $f : E(]0,1[) \to]0,1[$. De plus :
$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{1-t}} \text{ qui est d'intégrale convergente au voisinage de } 1^-.$$
Donc :
$$\lim_{x\to 1^-} E(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} =: E(1) < +\infty.$$
Donc $E(]0,1[) =]0, E(1)[=: I$.
2. On fait le changement de variable $t = \dfrac{s}{1+s}$:
$$\forall x \in]0,1[E(x) = \int_0^{\frac{x}{1-x}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{(2s+1)(s^2+(s+1)^2)}}.$$
On en déduit le résultat car $Q(X) + (2X+1)(X^2+(X+1)^2)$ est un polynôme de degré 3.
3. On a :
$$Q(X) = 4P(X+\frac{1}{2}) \text{ où } P(Y) = Y^3 + \frac{1}{4}Y.$$
Et P admet 3 racines distinctes dans $\mathbb{C}$. Donc, d'après les cours, on peut associer à P une fonction

de Weierstrass $\mathcal{P}$ telle que :

$$\mathcal{P}' = 2\sqrt{P \circ \mathcal{P}}.$$

Comme $u = 0$ est l'unique racine réelle de P, on en déduit que $\mathcal{P}$ est inversible sur $]0, +\infty[$ d'inverse solution de :

$$\forall w \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^*) : (\mathcal{P})^{-1}(w)) = \frac{1}{2\sqrt{P(w)}},$$

donc en particulier inversible sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$, d'inverse solution de :

$$\mathcal{P}^{-1}(w) = \mathcal{P}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{w} \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{P(u)}}, \ \forall w > \frac{1}{2}.$$

Donc pour $y = \mathcal{P}^{-1}(w) - \mathcal{P}^{-1}(\frac{1}{2})$, on a :

$$\frac{1}{2} + \frac{f(y)}{1 - f(y)} = \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + y\Big).$$

D'où :

$$f(y) = \frac{\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}^{-1}(\frac{1}{2}) + y\Big) - \frac{1}{2}}{\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}^{-1}(\frac{1}{2}) + y\Big) + \frac{1}{2}}.$$

On en déduit que f est la restriction à I d'une application méromorphe sur $\mathbb{C}$ comme quotient de deux telles fonctions.

$\square$

Exercice IV.12

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un réseau. On note g_2, g_3 les constantes de Weierstrass et $\mathcal{P}$ la fonction de Weierstrass associées à ce réseau. Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et solution de :

$$(f')^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3.$$

1. Montrer qu'il existe un ouvert U non vide de $\mathbb{C}$ tel que f soit inversible sur U. On note $g : f(U) \to U$ son inverse.
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que :

$$g(z) = \pm \int_a^z \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}.$$

3. Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset \mathbb{C} - \Lambda$ tel que $\mathcal{P}(V) \subset U$.
4. On pose $h = g \circ \mathcal{P}$. Montrer que :

$$\forall z \in V : (h'(z))^2 = 1.$$

5. Déterminer h et montrer qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que sur un ensemble à préciser :

$$f(z) = \mathcal{P}(z \pm a).$$

Solution :

1. Soit Ω l'ouvert connexe sur lequel f est définie et méromorphe. Par définition des constantes g_2, g_3 le polynôme $P(X) := 4X^3 - g_2X - g3$ admet 3 racines distinctes a_1, a_2, a_3 dans $\mathbb{C}$.
   — Si $f(\Omega) \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \varnothing$, alors $U = \Omega$ convient.
   — Sinon, on suppose par exemple que $a_1 \in f(\Omega)$. Soit alors $a_1 = f(b_1)$. Comme f est méromorphe, $z = b_1$ est un zéro isolé de $f - a_1$. Donc il existe un ouvert $U_1 \subset \Omega$ tel que $f(z) \neq a_1, \forall z \in U_1$.
      — Si $f(U_1) \cap \{a_2, a_3\} = \varnothing$, alors $U = U_1$ convient.
      — Sinon par le même raisonnement, il existe un ouvert $U_2 \subset U_1$ tel que $f \neq a_2$ dans U_2.
         — Si $a_3 \notin f(U_2)$, $U = U_2$ convient.
         — Sinon, par le même raisonnement, on trouve un ouvert $U_3 \subset U_2$ tel que $f \neq a_3$ sur U_3, c'est-à-dire, on trouve un ouvert $U_3 \subset \Omega$ tel que $f(U) \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \varnothing$ donc $f' \neq 0$ dans U. Et, comme f est méromorphe, ses pôles sont isolés et on peut restreindre U_3 à un ouvert sur lequel f est holomorphe, donc f est inversible. On peut donc supposer que U_3 est une boule ouverte, donc connexe.
2. Pour une détermination de la racine carrée : $f' = \sqrt{P \circ f}$, donc :
$$g' = (f^{-1})' = \frac{1}{\sqrt{P}} \text{ sur } f(U).$$
Soit $a \in f(U)$. Il en résulte, puisque $f(U)$ est connexe (par continuité de $f_{|U}$) :
$$\forall z \in f(U) : g(z) = g(a) = \int_a^z \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{P(s)}}.$$
3. Par construction, la restriction $f_{|U}$ est holomorphe et inversible sur U donc induit une transformation conforme de $U \to f(U)$. Il en résulte que $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. La restriction $\mathcal{P}_{|\mathbb{C}-\Lambda}$ est holomorphe, donc $\mathcal{P}^{-1}_{\mathbb{C}-\Lambda}(f(U))$ est un ouvert de $\mathbb{C} - \Lambda$. Soit $v \in \mathcal{P}^{-1}_{|\mathbb{C}-\Lambda}(f(U))$, il existe une boule ouverte $V \subset \mathbb{C} - \Lambda$ tel que $v \in V \subset \mathcal{P}^{-1}_{\mathbb{C}-\Lambda}(f(U))$ et alors : $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}_{|\mathbb{C}-\Lambda}(V) \subset f(U)$. D'où le résultat car V est connexe.

□

Exercice IV.13

Déterminer l'image par f du demi-plan de Poincaré dans les deux cas suivants :

1. $$f(z) = \int_0^z u^{\alpha-1}(u-1)^{\beta-1}\,\mathrm{d}u$$
   où $\alpha > 0, \beta > 0$ et $\alpha + \beta < 1$.
2. $$f(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-1)(t-\rho)}}$$
   où $\rho > 1$.

Solution :

1. f est holomorphe sur $D := \mathbb{C} - \big(\{\mathcal{R}e = 0, \mathcal{I}m \leqslant 0\} \cup \{\mathcal{R}e = 1, \mathcal{I}m \leqslant 0\}\big)$. Et f est une transformation conforme sur D car :
$$\forall z \in D : f'(z) = z^{\alpha-1}(z-1)^{\beta-1} \neq 0.$$
   — Si $0 < x < 1$, $f(x) = e^{i\pi(\beta-1)} \displaystyle\int_0^x u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,\mathrm{d}u$.
   — Au voisinage de 0 :
$$u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} \sim u^{\alpha-1}$$
   qui est intégrable au voisinage de 0 car $\alpha > 0$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée : $f(0^+) = 0$.
   — Au voisinage de 1 :
$$u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} \sim (1-u)^{\beta-1}$$
   qui est intégrable au voisinage de 1 car $\beta > 0$. Donc d'après le théorème de convergence dominée $f(1)$ est finie.
   — Si $x > 1$:
$$f(x) = f(1^-) + \int_1^x u^{\alpha-1}(u-1)^{\beta-1}\,\mathrm{d}u.$$

□

Exercice IV.14

Résoudre :
$$z(1-z)w'' + 2(1-z)w' + 2w = 0.$$

Solution :

□

Exercice IV.15

Soit $\nu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle dite de Legendre :
$$(1-z^2)w'' - 2zw' + \nu(\nu+1)w = 0 \quad (1).$$

1. Vérifier que les points $z = \pm 1$ et $z = +\infty$ sont des points singuliers fuchsiens dont on précisera le comportement singulier.
2. Montrer que si $\nu \in \mathbb{N}$, alors (1) admet des solutions polynomiales. On note P_ν la solution polynomiale vérifiant $P_\nu(1) = 1$.
3. On suppose que $\in \mathbb{N}$. Montrer que P_ν peut être pris comme le premier vecteur d'un système fondamental de solutions définies dans le domaine $|z| < 1$, *resp.* $|z| > 1$.
4. Décrire un système fondamental de solutions de (1) si $\nu \notin \mathbb{N}$.

Solution :

1. — On met l'équation de Legendre sous forme résolue :
$$w'' - \frac{2zw'}{1-z^2} + \frac{\nu(\nu+1)}{1-z^2}w = 0.$$

On remarque alors que les points $z = +1$ et $z = -1$ sont des points singuliers. En ce concerne le point à l'infini ($z = +\infty$), on pose $\zeta = \frac{1}{z}$. On pose la fonction v vérifiant $v(\zeta) = w\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ On trouve alors l'équation différentielle suivante pour v (sous forme résolue) :

$$v'' + \frac{2\zeta}{\zeta^2 - 1} + \frac{\nu(\nu+1)}{\zeta^2(\zeta^2-1)}v = 0.$$

Donc $\zeta = 0$ est un point singulier. Donc $= +\infty$ est un point singulier pour l'équation différentielle de Legendre.

— On veut maintenant étudier le comportement singulier de ces points. Pour cela on remarque qu'on peut étudier uniquement le comportement de $z = +1$ et $z = +\infty$. En effet, $\tilde{w}(z) = w(-z)$ vérifie aussi (1).

— Pour étudier le comportement $z = +1$, on pose $z = 1 + t$. On pose $u(t) = w(z)$. u vérifie l'équation différentielle :

$$-t(2+t)u'' - 2(1+t)u' + \nu(\nu+1)u = 0.$$

On cherche u sous la forme $u(t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, a_0 \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient sur le terme : $t^{\alpha-1}$:

$$2\alpha(\alpha-1)a_0 + 2\alpha a_0 = 0.$$

Ainsi $\alpha^+ = \alpha^- = 0$. Et alors le système de solutions indépendantes est d'après le théorème de Fuchs :

$$u^+(t) = \phi^+(t) \quad u^-(t) = \ln(t)\phi^+(t) + t\phi^-(t)$$

où ϕ^+, ϕ^- holomorphes pour $|t| < 2$.

— Pour étudier le comportement de $\zeta = 0$ dans l'équation différentielle vérifiée par v. On cherche v sous la fome :

$$v(\zeta) = \zeta^\beta \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \zeta^n, \quad b_0 \neq 0, \beta \in \mathbb{C}.$$

On trouve que :

$$\beta(\beta-1) - \nu(\nu+1) = 0.$$

Les solutions de cette équation de degré 2 en β sont :

$$\beta^+ = \nu + 1 \quad \text{et} \quad \beta^- = \nu - 1.$$

Ainsi les solutions v^+ et v^- vérifient au voisinage de $\zeta = 0$:

$$v^+(\zeta) \sim a_0 \zeta^{\nu+1} \quad \text{et} \quad v^-(\zeta) \sim a_0 \zeta^{-\nu}.$$

Donc les solutions w^+, w^- correspondantes vérifient au voisinage de $+\infty$:

$$w^+(z) \sim a_0 \zeta^{-\nu-1} \quad \text{et} \quad w^-(z) \sim a_0 z^{+\nu}.$$

2. Soit $\nu \in \mathbb{N}$. $z = 0$ est un point régulier donc on cherche w sous la forme :

$$w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad z < 1.$$

En remplaçant dans l'équation (1), on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n(n+1) - \nu(\nu+1))a_n := \varphi(n)a_n.$$

φ admet deux racines qui sont ν et $-\nu - 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n) = 0$ si et seulement si $n = \nu$ (car $\nu \in \mathbb{N}$). On en déduit que $a_{nu+2} = 0$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_{nu+2k} = 0$. (a_n) vérifie une relation récurrente double ainsi elle est dans l'espace engendré par les solutions élémentaires impaires et paires. On obtient alors deux solutions paires et impaires dont une polynomiale P_ν.

   — Si ν est pair, la solution élémentaire paire est polynomiale de degré ν. L'autre solution élémentaire est une série infinie de rayon 1.

   — Si ν est impair, alors la solution impaire est polynomiale de degré ν. L'autre solution élémentaire paire est une série de rayon 1.

   Dans tous les cas, on obtient une solution polynomiale P_ν de degré ν et une solution développable en série entière de rayon 1.

3. C'est une conséquence de la question précédente : on a obtenu deux solutions indépendantes.

4. C'est la même chose (encore), voir poly d'Isabelle Gruais.

$\square$

Exercice IV.16

Soit $\lambda > 0$.On considère l'équation différentielle dite de Bessel :

$$z^2 w'' + z w' + (z^2 - \lambda^2) w = 0 \quad (2).$$

1. Caractériser le point singulier $z = 0$. **J'ai enlevé la point ∞ car le point était signulier non fuschien**
2. Montrer que si $\lambda \notin \mathbb{N}$, alors un système fondamental de solutions de (2) est formé par les séries :

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1+\lambda)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad \text{et} \quad J_{-\lambda}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-\lambda)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

3. On suppose que $\lambda = m \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que :
   $$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-.$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-, \quad \lim_{\lambda \to m} \frac{\cos(\lambda\pi) J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin(\lambda\pi)} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_\lambda}{\partial \lambda}(z)\Big|_{\lambda=m} - (-1)^m \frac{\partial J_{-\lambda}}{\partial \lambda}(z)\Big|_{\lambda=m} \right).$$
   On notera cette dernière quantité $Y_m(z)$.

(c) Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-, \quad Y_m(z) = \frac{2}{\pi} J_m(z) \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \left(\frac{z}{2})^{-m}\right)^{-m} \phi_m(z),$$

où ϕ_m est holomorphe sur un domaine à préciser.

4. Soit w une solution de l'équation différentielle.

(a) Montrer que u définie par :

$$u(z) = \sqrt{z} e^{-iz} w(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$$

est solution d'une équation différentielle admettant $z = +\infty$ comme point singulier fuchsien.

(b) En déduire une développement de w sous la forme :

$$w(z) = \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad \forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-.$$

(c) Montrer que dans le cas particulier de la solution de H^I_λ, on a :

$$H^I_\lambda(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} z^{\frac{1}{2}}} e^{i(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda\pi}{2})} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}\right).$$

On rappele que :

$$H^I_{-\lambda}(it) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{i\pi\lambda}{2}}}{i\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} e^{-t}.$$

Solution :

1. C'est exactement le même raisonnement qu'à la question 1 de l'exercice précédent.

2. Pareil, même raisonnement qu'à l'exercice précédent, on cherche une solution sous la forme $w(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ avec $\alpha \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0$. On insère cette expression dans l'équation (2). On obtient une relation de récurrence entre a_{2n} et a_{2n-2} que l'on résout pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{2n} = a_0 \Gamma(\lambda + 1) \frac{(-1)^n}{f^n n! \Gamma(n + 1 + \lambda)}.$$

Le terme de degré 0 donne que α peut prendre deux valeurs α^+ et α^- qui vérifient : $\alpha^+ - \alpha^- = 2\lambda$. On suppose que $\lambda \notin \mathbb{N}$. On obtient les deux solutions fondamentales demandées.

3. (a) Soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$. On a :

$$J_{-m} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \sum_{k \geqslant m} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + 1 - m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Donc en ré-indiçant on obtient directement :

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z).$$

(b) Γ est méromorphe sur $\mathbb{C} - \mathbb{N}^-$ et sans zéros donc $\frac{1}{\Gamma}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'annule sur $\mathbb{N}^-$.

Ainsi pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}-$, $\lambda \mapsto J_\lambda(z)$ est la somme d'une série de fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on peut écrire J_λ sous la forme :

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\lambda) z^n.$$

On veut étudier J_λ au voisinage de l'entier $\lambda = m$. Soit $r \in]0,1[$, $\frac{1}{\Gamma}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc il existe $M > 0$ tel que si $|\lambda - m| \leqslant r$ alors $\frac{1}{|\Gamma(\lambda)|} \leqslant M$. De plus la série de terme général $\frac{M}{k!}\left(\frac{|z|}{2}\right)^{2k}$ est convergente. Ainsi $\lambda \mapsto_\lambda$ est holomorphe pour $|\lambda - m| \leqslant r$.
On pose $\lambda = m + u$, on va faire tendre u vers 0. On fait directement le DL et ça marche.

(c) On pose $J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \psi_\lambda(z)$ avec ψ_λ holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\lambda \mapsto \psi_\lambda(z)$ holomorphe au voisinage de $\lambda = m$ (pour $|\lambda - m| \leqslant r, 0 < r < 1$). On calcule Y_m avec cette expression et on obtient le résultat voulu avec :

$$\phi_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=m}(z) - \frac{\partial \psi_{-\lambda}}{\partial \lambda}\Big|_{\lambda=m}(z).$$

ϕ_m est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

4. (a) C'est du calcul de dérivées [11]. On trouve :

$$z^2 u'' + 2iz^2 u' \left(\frac{1}{4} - \lambda^2\right) u = 0.$$

Pour montrer que $z = +\infty$ est un point singulier fuchsien de cette équation différentielle, on pose $v(\zeta) = u\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. On obtient l'équation différentielle suivante pour v :

$$\zeta^2 v'' + 2(\zeta - i)v' + \left(\frac{1}{4} - \lambda^2\right) v = 0.$$

Donc $\zeta = 0$ est un point singulier fuchsien de cette équation différentielle. On obtient donc le résultat demandé.

(b) Méthode habituelle.

(c) Le développement de la question précédente est en particulier vrai pour la solution H_λ^I. Et $a_0 \neq 0$ par construction donc :

$$w(z) \underset{|z| \to +\infty}{\sim} \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} a_0.$$

Donc, si $z = it$ avec $t > 0$, en utilisant l'équivalent fourni, on trouve que :

$$a_0 = e^{-\frac{i\pi\lambda}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

On trouve aloes le résultat attendu.

□

11. le calcul est très lourd

Exercice IV.17

1. Montrer que l'application :
$$F : z \mapsto \int_0^z \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$$
transforme la droite $\mathbb{R}$ en un chemin de Hankel. On note L ce chemin.
2. Soit $\lambda > 0$. Montrer qu'il existe une application v méromorphe sur $\mathbb{C}$ telle que :
$$w : z \mapsto \int_L e^{-iz\sin(\zeta)} v(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$
soit solution de l'équation de Bessel :
$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - \lambda^2)w = 0.$$

Solution :

1. Elle a été passée.
2. On suppose v suffisamment régulière pour dériver terme à terme dans l'intégrale définissant w. On pose $K(z,\zeta) = e^{-iz\sin(\zeta)}$. En supposant que w vérifie l'équation de Bessel, on obtient que :
$$\int_L \left(z^2(\cos(\zeta))^2 - iz\sin(\zeta) - \lambda^2\right) K(z,\zeta)v(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$
Donc, on a :
$$\int_L \left(-\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2} - \lambda K(z,\zeta)\right) v(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$
Ainsi par intégration par parties, en choisissant v tel que les termes de bords soient nuls :
$$\int_L \left(-Kv'' - \lambda^2 Kv\right)\mathrm{d}\zeta = 0.$$
Une condition suffisante est alors que v soit solution de l'équation différentielle :
$$v'' + \lambda^2 v = 0.$$
Réciproquement, on suppose que v est solution de cette équation différentielle. On choisit $v(\zeta) = e^{i\lambda\zeta}$. Pour conclure que v est bien l'application cherchée, il suffit de montrer que [12] :
$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\partial K}{\partial \zeta}v + K\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)(-\pi + it) - \lim_{t\to-\infty}\left(-\frac{\partial K}{\partial \zeta}v + K\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right)(it) = 0.$$

□

Exercice IV.18

On pose :
$$G(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} \quad \text{si} \quad \mathcal{R}e(z) > 0.$$

12. ce sont les termes de bords de l'intégration par parties

1. Montrer que G est conforme du quart de plan $\{\mathcal{R}e(z) > 0, \mathcal{I}m(z) > 0\}$ sur une demi-bande.
2. Étudier l'existence d'un prolongement méromorphe périodique de G^{-1} sur $\mathbb{C}$.

Solution :

Selon Isabelle Gruais, ça ne marche pas (j'ai pas compris pourquoi ça ne marche pas) [13]On décide de prendre une autre détermination de la racine carrée ($i.e$ du logarithme) que la principale. On définit $\sqrt{z}$ pour $z \in \mathbb{C} - (i\mathbb{R}_-)$. Ainsi $f = G'$ est définie sur le plan $\mathbb{C}$ fendu le long des demi-droites $\{\mathcal{R}e(z) = 0, \mathcal{I}m(z) \leqslant 0\}$ et $\{\mathcal{R}e(z) = 1, \mathcal{I}m(z) \leqslant 0\}$ [14]. On note Ω le domaine de définition de f. f est holomorphe sur Ω donc G est conforme sur Ω donc en particulier sur $\Omega \cap \{\mathcal{R}e(z) > 0\}$.

1. — Si $z = x \in]0,1[$, $G(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} \in \mathbb{R}_+^*$. En particulier :

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

Donc, comme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} < \infty$, on en déduit que $G(1)$ est fini. Et par le théorème de convergence dominée de Lebesgue : $G(0) = 0$.

— Si $x > 1$. $G(x) = G(1) + \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$. Or pour tout $t > 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{1}{\sqrt{t}i\sqrt{t-1}} = \frac{-i}{\sqrt{t(t-1)}}.$$

Ainsi :

$$G(x) = G(1) - i\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-1)}}.$$

Et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-1)}} = +\infty$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Par le changement de variable $t = \dfrac{1}{2} + is$, on a :

$$G\left(\frac{1}{2} + iy\right) = G\left(\frac{1}{2}\right) + i\int_0^y \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2 + \frac{1}{4}}}.$$

Ainsi, par le principe de symétrie appliqué par rapport à $\{\mathcal{R}e(z) = \frac{1}{2}\}$ ($z \mapsto 1 - \overline{z}$) on prolonge G à $\{\mathcal{I}m(z) > 0\}$ en posant :

$$G(1-\overline{z}) = G\left(\frac{1}{2}\right) - \overline{G(z)} \quad i.e \quad G(z) = G\left(\frac{1}{2}\right) - \overline{G(1-\overline{z})}.$$

Alors $G(\Omega \cap \{\mathcal{I}m(z) > 0\}$ est la demi bande verticale $\{0 \leqslant \mathcal{R}e(z) \leqslant G(1), \mathcal{I}m(z) \leqslant 0\}$.

□

13. En fait, j'ai pas compris pourquoi ça pourrait marcher aussi.
14. c'est là où $t \mapsto \sqrt{(t)}$ et $t \mapsto \sqrt{1-t}$ sont définies

Exercice IV.19

1. Montrer que l'application :
$$F : z \mapsto \int_1^z \frac{\sqrt{1-t^4}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
est conforme sur le disque unité ouvert épointé $D* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.
2. Montrer que F envoie le disque unité sur l'extérieur d'un carré à préciser. (note : si ça tombe en DS, l'énoncé précisera le carré selon Isabelle Gruais)

Solution :

1. On note f l'intégrande. On voit que $t \mapsto \sqrt{1-t^4}$ est holomorphe sur le disque ouvert D. Donc f est holomorphe sur D^*, méromorphe sur D avec 0 pôle double. Deux points à l'intérieur de D^* peuvent toujours être reliées par un chemin fermé dans D^*. Donc F est bien définie sur D^*. De plus F n'est pas définie en 0 (la limite quand $z \to 0$ est égale à $+\infty$).
Par définition, $F' \neq 0$ sur D^* et de plus F' est holomorphe sur D^* donc F est conforme sur D^*.
2. On choisit la même détermination de l'argument qu'à l'exercice précédent. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, par un changement de variable :
$$F(e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^\theta \sqrt{\sin(2u)}.$$
On note $G\left(e^{i\theta}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}} F\left(e^{i\theta}\right)$.
   — On a pour tout $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$:
$$G\left(e^{i\theta}\right) = \sqrt{2}\int_0^\theta \sqrt{\sin(2u)} > 0.$$
   Sur ce domaine, l'image de G est un segment honrizontal orienté vers la droite entre $G(0)$ et $G(i)$.
   — Si $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$, le changement de variable $u = v + \frac{\pi}{2}$ donne [15] :
$$G\left(e^{i\theta}\right) = G(i) + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\theta f(e^{iu})ie^{iu} = G(i) - i\sqrt{2}\int_0^{\theta - \frac{pi}{2}} f(e^{iu})^{eiu}\,\mathrm{d}u.$$
   La dernière intégrale étant positive on remarque sur ce domaine, l'image de G est un segment vertical orienté vers le bas entre $G(i)$ et $G(-1)$.
   — De même pour les deux derniers quarts de cercle, au final on obtient que l'image du cercle unité par G est un carré de sommets $G(0), G(i), G(-1), G(-i)$ (parcourus dans cet ordre).

   Ainsi, par conformité de F, nécessairement $F(D^*)$ est nécessairement contenue dans ce carré ou à l'extérieur du carré. Or $\lim_{x\to 0} F(x) = +\infty$ donc $F(D^*)$ est l'extérieur du carré.

$\square$

15. On rappelle que $f(iz) = -f(z)$

Références