Du test simple aux tests multiples

Journée 4A

Ulysse Gazin

LPSM

12 Mai 2023

Sommaire

Contexte

$$X = (X_1, \cdots, X_m) \sim \mathcal{N}(\mu, I_m)$$
$$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_m) \text{ inconnu, } \mu \geq 0.$$

Contexte

$$X = (X_1, \cdots, X_m) \sim \mathcal{N}(\mu, I_m)$$
$$\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_m) \text{ inconnu, } \mu \geq 0.$$

But : Détecter du signal $\Rightarrow$ $\mu_i = 0$ ou $\mu_i > 0$.

Angle d'attaque

1. $\mu_1 = 0$ ou $\mu_1 > 0 \Rightarrow$ **Test simple**.
2. Trouver les $i \in [\![1, m]\!]$ où $\mu_i > 0 \Rightarrow$ **Test multiple**.

Sommaire

Un test ? De quoi ?

Z v.a de loi P.
H_0 et H_1 ensembles de lois. $H_0 \bigcap H_1 = \emptyset$.

$$(\mathrm{H}_0) : P \in H_0 \text{ contre } (\mathrm{H}_1) : P \in H_1$$

Un test ? De quoi ?

Z v.a de loi P.
H_0 et H_1 ensembles de lois. $H_0 \bigcap H_1 = \emptyset$.

$$(\mathrm{H}_0) : P \in H_0 \text{ contre } (\mathrm{H}_1) : P \in H_1$$

Soit $\alpha \in [0, 1]$. On construit $\varphi_\alpha(Z)$ v.a dans $\{0, 1\}$.

Un test ? De quoi ?

Z v.a de loi P.
H_0 et H_1 ensembles de lois. $H_0 \bigcap H_1 = \emptyset$.

$$(\mathrm{H}_0) : P \in H_0 \text{ contre } (\mathrm{H}_1) : P \in H_1$$

Soit $\alpha \in [0, 1]$. On construit $\varphi_\alpha(Z)$ v.a dans $\{0, 1\}$.

1. $\varphi_\alpha(Z) = 0 \Rightarrow$ Rejette H_1.

Un test ? De quoi ?

Z v.a de loi P.
H_0 et H_1 ensembles de lois. $H_0 \bigcap H_1 = \emptyset$.

$$(\mathrm{H}_0) : P \in H_0 \text{ contre } (\mathrm{H}_1) : P \in H_1$$

Soit $\alpha \in [0,1]$. On construit $\varphi_\alpha(Z)$ v.a dans $\{0,1\}$.

1. $\varphi_\alpha(Z) = 0 \Rightarrow$ Rejette H_1.
2. $\varphi_\alpha(Z) = 1 \Rightarrow$ Rejette H_0.

Un test ? De quoi ?

Z v.a de loi P.
H_0 et H_1 ensembles de lois. $H_0 \bigcap H_1 = \emptyset$.

$$(\mathrm{H}_0) : P \in H_0 \text{ contre } (\mathrm{H}_1) : P \in H_1$$

Soit $\alpha \in [0,1]$. On construit $\varphi_\alpha(Z)$ v.a dans $\{0,1\}$.

1. $\varphi_\alpha(Z) = 0 \Rightarrow$ Rejette H_1.
2. $\varphi_\alpha(Z) = 1 \Rightarrow$ Rejette H_0.

Non suffisant

Erreur de première espèce

Contrôle de l'erreur I.

Erreur de première espèce

Contrôle de l'erreur I.

Dissymétrie de Neymann Pearson :

$$\forall P_0 \in H_0,\ \mathbb{P}_{Z\sim P_0}\left(\varphi_\alpha(Z)=1\right)\leq\alpha$$

Erreur de première espèce

Contrôle de l'erreur I.

Dissymétrie de Neymann Pearson :

$$\forall P_0 \in H_0,\ \mathbb{P}_{Z\sim P_0}\left(\varphi_\alpha(Z) = 1\right) \leq \alpha$$

On ne rejette pas H_0 à tort !

Statistique de test

1. Sous $H_0^{(1)}$, $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$
2. Sous $H_1^{(1)}$, $\mu_1 > 0$ et X_1 proche de μ_1 $\Rightarrow$ "$X_1 >> 0$"

Statistique de test

1. Sous $H_0^{(1)}$, $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$
2. Sous $H_1^{(1)}$, $\mu_1 > 0$ et X_1 proche de $\mu_1 \ \Rightarrow$ "$X_1 >> 0$"

$$p_1 = \mathbb{P}\left[N > X_1 | X_1\right], \ N \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Statistique de test

1. Sous $H_0^{(1)}$, $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$
2. Sous $H_1^{(1)}$, $\mu_1 > 0$ et X_1 proche de $\mu_1 \ \Rightarrow$ "$X_1 >> 0$"

$$p_1 = \mathbb{P}\left[N > X_1 | X_1\right], \ N \sim \mathcal{N}(0,1)$$

1. Sous $H_0^{(1)}$, $p_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$
2. Sous $H_1^{(1)}$, "$p_1 << 0$"

Test : $\mathbb{1}_{p_1 < \alpha}$

Sommaire

Des tests ? De quoi ?

Z v.a de loi P
$H_0^{(1)}, \cdots, H_0^{(m)}$ ensembles de lois.

Des tests ? De quoi ?

Z v.a de loi P
$H_0^{(1)}, \cdots, H_0^{(m)}$ ensembles de lois.

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ i \in [\![1, m]\!],\ P \in H_0^{(i)} \right\} \quad \mathcal{H}_1 = \left\{ i \in [\![1, m]\!],\ P \notin H_0^{(i)} \right\}$$

Des tests ? De quoi ?

Z v.a de loi P
$H_0^{(1)}, \cdots, H_0^{(m)}$ ensembles de lois.

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ i \in [\![1, m]\!],\ P \in H_0^{(i)} \right\} \quad \mathcal{H}_1 = \left\{ i \in [\![1, m]\!],\ P \notin H_0^{(i)} \right\}$$

On construit $R(Z) \subset [\![1; m]\!]$ aléatoire.

1. $i \in R(Z) \Rightarrow$ Rejette $H_0^{(i)}$.

Des tests ? De quoi ?

Z v.a de loi P
$H_0^{(1)}, \cdots, H_0^{(m)}$ ensembles de lois.

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ i \in [\![1, m]\!],\ P \in H_0^{(i)} \right\} \quad \mathcal{H}_1 = \left\{ i \in [\![1, m]\!],\ P \notin H_0^{(i)} \right\}$$

On construit $R(Z) \subset [\![1; m]\!]$ aléatoire.

1. $i \in R(Z) \Rightarrow$ Rejette $H_0^{(i)}$.
2. $i \notin R(Z) \Rightarrow$ Rejette pas $H_0^{(i)}$.

Version naïve

Faire m tests de taille α

Version naïve

Faire m tests de taille α

$$\mathbb{E}\left(|R(Z) \cap \mathcal{H}_0|\right) = \alpha \left|\mathcal{H}_0\right|$$

Non satisfaisant : $\alpha \leftarrow \frac{\alpha}{m}$ Procédure de Bonferroni.

Illustration de l’approche naïve

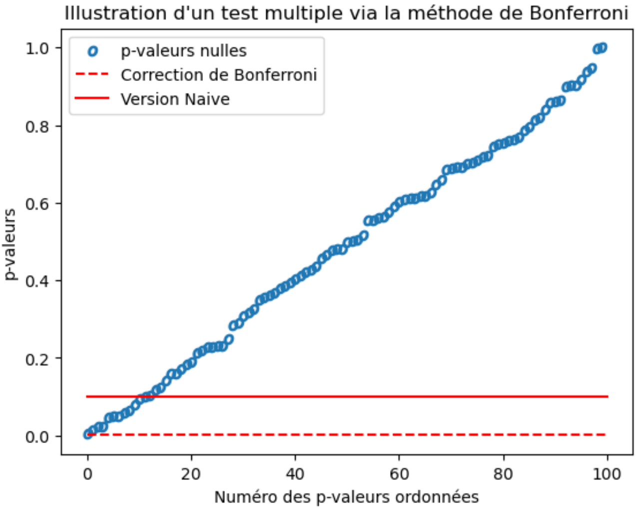
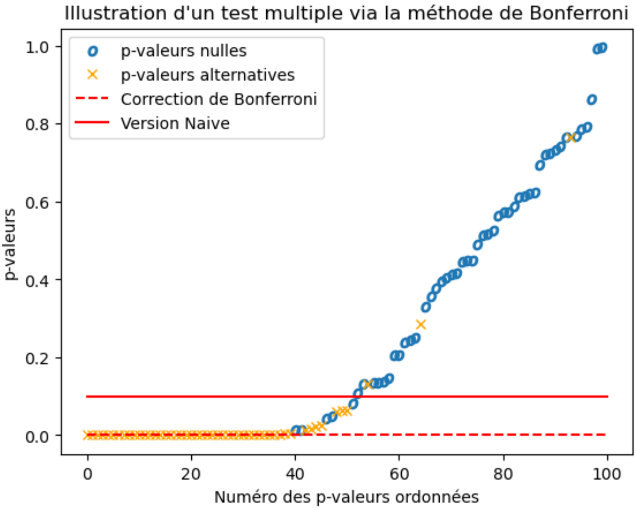


Illustration de l'approche naïve



Que faire ?

Quels sont les blocages ?

Que faire ?

Quels sont les blocages ?

L'erreur de première espèce !

Quelle erreur de première espèce ?

Pas de choix **universel** [Roq11].

Quelle erreur de première espèce ?

Pas de choix **universel** [Roq11].

$$\text{FWER}(R(Z)) = \mathbb{P}\left(|R(Z) \cap \mathcal{H}_0| \geq 1\right) \text{ (Restrictif ?)}$$

Quelle erreur de première espèce ?

Pas de choix **universel** [Roq11].

$$\mathrm{FWER}(R(Z)) = \mathbb{P}\left(|R(Z) \cap \mathcal{H}_0| \geq 1\right) \text{ (Restrictif ?)}$$

$$\mathrm{FDP}(R(Z)) = \frac{|R(Z) \cap \mathcal{H}_0|}{|R(Z)|}$$ (Trop Compliqué ? Procédure Post Hoc ? [BNR20])

Quelle erreur de première espèce ?

Pas de choix **universel** [Roq11].

$$\mathrm{FWER}(R(Z)) = \mathbb{P}\left(|R(Z) \cap \mathcal{H}_0| \geq 1\right) \text{ (Restrictif ?)}$$

$$\mathrm{FDP}(R(Z)) = \frac{|R(Z) \cap \mathcal{H}_0|}{|R(Z)|} \text{ (Trop Compliqué ? \underline{Procédure Post Hoc} ? [BNR20])}$$

$$\mathrm{FDR}(R(Z)) = \mathbb{E}\left[\mathrm{FDP}(R(Z))\right] \text{ (Trop Permissif ?)}$$

Quelle erreur de première espèce ?

Pas de choix **universel** [Roq11].

$$\mathrm{FWER}(R(Z)) = \mathbb{P}\left(|R(Z) \cap \mathcal{H}_0| \geq 1\right) \text{ (Restrictif ?)}$$

$$\mathrm{FDP}(R(Z)) = \frac{|R(Z) \cap \mathcal{H}_0|}{|R(Z)|}$$ (Trop Compliqué ? <u>Procédure Post Hoc</u> ? [BNR20])

$$\mathrm{FDR}(R(Z)) = \mathbb{E}\left[\mathrm{FDP}(R(Z))\right] \text{ (Trop Permissif ?)}$$

$$\mathrm{FDX}(R(Z)) = \mathbb{P}\left[\mathrm{FDP}(R(Z)) > \gamma\right] \text{ (Trop compliqué ?)}$$

Procédure générale ?

Comment passer de m tests simples à m tests multiples ?

Correction de Bonferroni (FWER)

Procédure générale ?

Comment passer de m tests simples à m tests multiples ?

Correction de Bonferroni (FWER)

Procédure de Benjamini-Hochberg (FDR) [BH95].

Uniformisation des tests ?

Difficile de comparer deux tests $\Rightarrow$ Utilisation des p-valeurs

Uniformisation des tests ?

Difficile de comparer deux tests ⇒ Utilisation des p-valeurs

Définition ? Construction ? Calcul ? Quantiles ? Conformal p-values ?

[VGS99]

Hypothèse sur les données ?

X_i et p_i indépendants.

Non indépendance des données ?

Significativité des coefficients en régression, données médicales...

Hypothèse sur les données ?

X_i et p_i indépendants.

Non indépendance des données ?

Significativité des coefficients en régression, données médicales...

p-valeurs PRDS $\Rightarrow$ Benjamini-Hochberg.

Hypothèse sur les données ?

X_i et p_i indépendants.

Non indépendance des données ?

Significativité des coefficients en régression, données médicales...

p-valeurs PRDS $\Rightarrow$ Benjamini-Hochberg.

Données et p-valeurs échangeables ?

Hypothèse sur les données ?

X_i et p_i indépendants.

Non indépendance des données ?

Significativité des coefficients en régression, données médicales...

p-valeurs PRDS $\Rightarrow$ Benjamini-Hochberg.

$$\frac{\text{Données et p-valeurs échangeables}}{\text{Sans hypothèses} \Rightarrow \text{Bonferroni.}}\,?$$

Erreur de seconde espèce ?

$R(Z) = \emptyset$ parfait/inutile ?

Erreur de seconde espèce ?

$R(Z) = \emptyset$ parfait/inutile ?

Erreur de seconde espèce

Erreur de seconde espèce ?

$R(Z) = \emptyset$ parfait/inutile ?

$$\text{FWER} \Rightarrow \overline{\textbf{Erreur de seconde espèce}}\\ \text{FWSR} + \text{théorie minimax [FLRB15]}$$

Erreur de seconde espèce ?

$R(Z) = \emptyset$ parfait/inutile ?

Erreur de seconde espèce

FWER $\Rightarrow$ FWSR + théorie minimax [FLRB15]

FDR $\Rightarrow$??.

On a TDP $= \frac{|R(Z) \cap \mathcal{H}_1|}{|R(Z)|}$.

Conclusion

Domaine encore **vaste** avec un large champ d'application !
Il **manque** des notions et des définitions !
Il existe des généralisations : continuum d'hypothèses [BDR11]
Détection de nouveautés [MLMR22] et de ruptures [FGLG22]

Sommaire

Références I

Gilles Blanchard, Sylvain Delattre et Etienne Roquain :
Testing over a continuum of null hypotheses with false discovery rate control.
Bernoulli, 20, 10 2011.

Yoav Benjamini et Yosef Hochberg :
Controlling the false discovery rate : A practical and powerful approach to multiple testing.
Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 57(1):289–300, 1995.

Gilles Blanchard, Pierre Neuvial et Etienne Roquain :
Post hoc confidence bounds on false positives using reference families.
The Annals of Statistics, 48(3):1281 – 1303, 2020.

Références II

- Magalie Fromont, Fabrice Grela et Ronan Le Guével : Minimax multiple testing procedures for localising an abrupt change in a Poisson process with a known baseline intensity. working paper or preprint, juin 2022.
- Magalie Fromont, Matthieu Lerasle et Patricia Reynaud-Bouret : Family-wise separation rates for multiple testing. *The Annals of Statistics*, 44, 01 2015.
- Ariane Marandon, Lihua Lei, David Mary et Etienne Roquain : Machine learning meets false discovery rate, 2022.

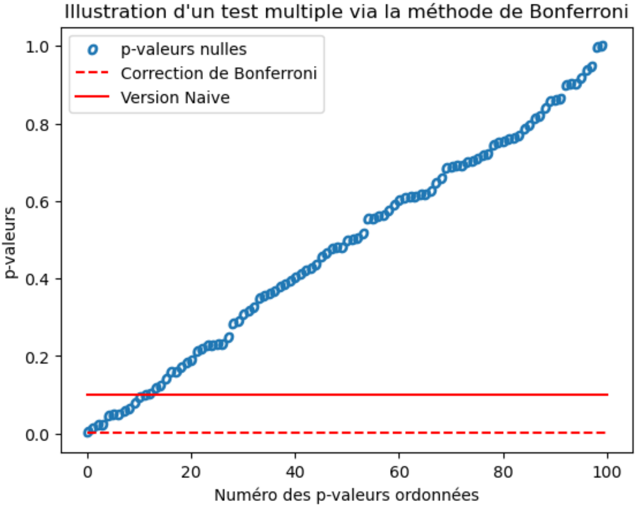
Références III

Etienne ROQUAIN :
Type I error rate control in multiple testing : a survey with proofs.
Journal de la Société Française de Statistique, 152(2), 2011.

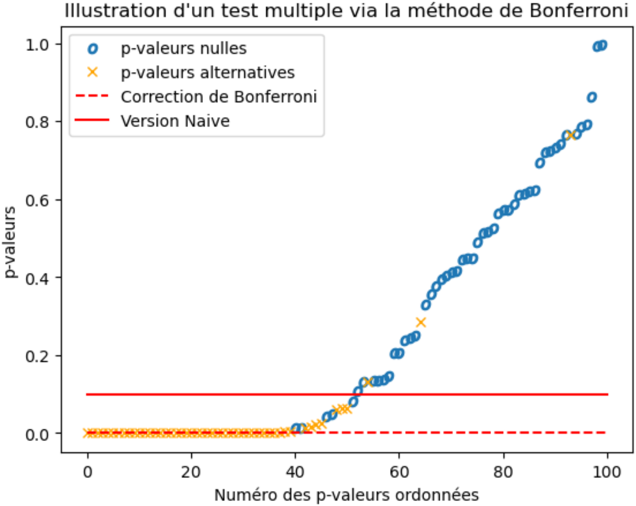
V. VOVK, A. GAMMERMAN et C. SAUNDERS :
Machine-learning applications of algorithmic randomness.
In Sixteenth International Conference on Machine Learning (ICML-1999) (01/01/99), pages 444–453, 1999.

Sommaire

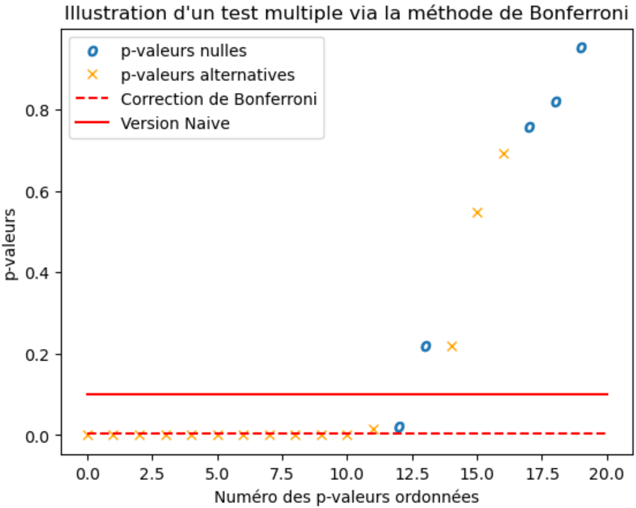
Procédure de Bonferroni



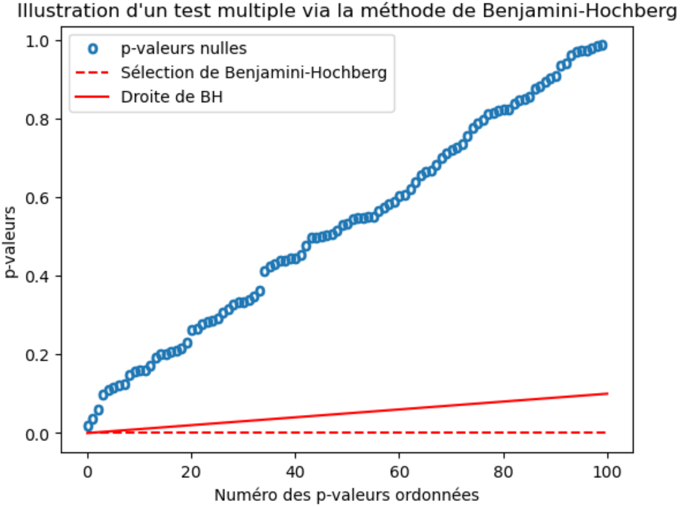
Procédure de Bonferroni



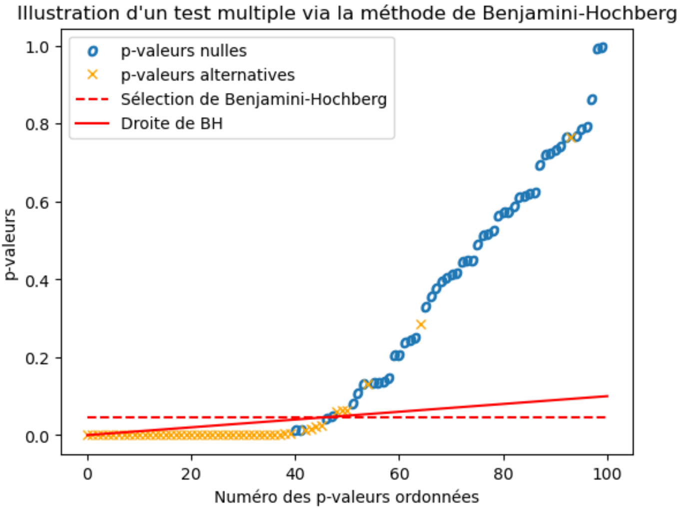
Procédure de Bonferroni



Procédure de Benjamini-Hochberg



Procédure de Benjamini-Hochberg



Procédure de Benjamini-Hochberg