École Normale Supérieure de Rennes

ANAF

ANALYSE FONCTIONNEL

Espaces de Banach, rappels généraux, rappels des principes d'analyse fonctionnelle (théorème de Baire et applications), théorème de Hahn-Banach, opérateurs limites bornés et théorie spectrales, propriétés particulières (rang, prolongement, opérateurs compacts), théorie de Fredholm, spectre d'opérateurs limites bornés ou compacts, méthodes variationnelles, spectre d'opérateur sur un espace de Hilbert, opérateur Hilbert-Schmidt, semi-groupes d'opérateurs et générateur infinitésimal, opérateurs non linéaires (opérateurs monotones), analyse convexe en dimension infinie.

Auteur
Mihai Gradinaru

Notes de cours
Victor Lecerf

2021–2022

Table des matières

Chapitre 1

Espaces de Banach

1.1 Quelques rappels

Soit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. On ne rappelle pas les notions de base (espaces métriques, suites de Cauchy, espaces complets, espaces vectoriels normés). On notera cependant qu'une semi-norme est une application qui possède tous les axiomes d'une norme, à l'exception de celui de séparation. Une semi-norme est toujours positive.

1.1.1 Semi-normes

Remarque. Soit C un sous-ensemble d'un espace vectoriel E

— C est dit équilibré si pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| \leq 1$, $\alpha C \subset C$.

— C est absorbant si pour tout $x \in E$, il existe un $r \geq 0$, tel que $\frac{x}{\alpha} \in C$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| \geq r$.

Exercice. Si p est une semi-norme sur E et si $c > 0$,

$$C = \{x \in E \,|\, p(x) \leq c\}$$

contient 0_E et est convexe, équilibré, et absorbant. De plus, pour tout $x \in E$,

$$p(x) = \inf\left\{\alpha c \,|\, \alpha > 0,\, \frac{x}{\alpha} \in C\right\}.$$

Exemples de familles de semi-normes

— Soit $E = \mathcal{C}(]0,1[, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in]0,1[$, on pose $p_a(f) = |f(a)|$. La famille $\mathcal{P} = (p_a)_{a \in]0,1[}$ est une famille de semi-norme. On dira en particulier que $\mathcal{P}$ est une famille séparante dans le sens suivant : si $p_a(f) = 0$ pour tout $a \in]0,1[$, alors $f = 0$.

Proposition 1.1.1. *Soit E un espace vectoriel, et $\mathcal{P} = (p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une famille de semi-normes sur E telle que pour tout $x \in E\backslash\{0_E\}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p_k(x) > 0$. Alors, l'application sur E*

$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)}$$

est bien définie, et définit une métrique sur E. Cette métrique est telle que pour tout $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$, et $x \in E$, alors

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \forall j \in \mathbb{N},\, p_j(x_n - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration. Notons que l'application $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule en 0. Montrons seulement l'équivalence.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons d'abord que $(x_n)_n$ converge vers x au sens de la métrique d. Soit $j \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \frac{\varepsilon}{2^j}$. Il existe $n_{\varepsilon,j} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_{\varepsilon,j}$,

$$\frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-x_n)}{1+p_j(x-x_n)} \leq d(x, x_n) \leq \eta.$$

On en déduit donc que

$$p_j(x-x_n) \leq \varepsilon(1 + p_j(x-x_n)) < \varepsilon + \frac{1}{2} p_j(x-x_n).$$

Alors, $p_j(x - x_n) \leq 2\varepsilon$, et donc $p_j(x-x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, supposons que $p_j(x-x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Soit donc $\varepsilon > 0$. et $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ un indice tel que $\sum_{j=j_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \varepsilon$ (reste d'une série convergente). On choisit ensuite un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \in [\![1, j_\varepsilon]\!]$ et $n \geq n_\varepsilon$, $p_j(x-x_n) \leq \varepsilon$. Ainsi, $d(x_n, x) \leq 2\varepsilon$.

□

Exemples.

- Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $p_j(f) = \max_{|t|\leq j} |f(t)|$. Chaque p_j est une semi-norme, et la famille est en fait séparante. La métrique associée (comme dans la proposition précédente) donne la convergence uniforme sur tout compact (exercice : montrer que (E, d) est un espace complet).
- $F = \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Notons d_F la restriction de d à F. L'espace (F, d_F) n'est pas complet. En effet, la suite définie pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ par $f_n(t) = |t|$ si $|t| \leq n$ et $f_n(t) = n$ sinon. Alors, f_n tend vers la fonction valeur absolue, qui n'est pas élément de F.
- Soit $S = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On munit cet espace de la métrique définie pour tout $x, y \in S$ par

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}.$$

Cet espace est complet. En particulier, pour tout $x \in S$ et $(v_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$, alors

$$d(v_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff \forall j \in \mathbb{N},\, v_{nj} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_j.$$

1.1.2 Espaces de Banach

Proposition 1.1.2 (caractérisation des espaces de Banach)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *E est de* Banach *;*

(ii) *toute série absolument convergente est convergente ;*

(iii) *toute suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\|x_n\| \leq c^n$ avec $c \in]0,1[$ fixé pour tout $n \in \mathbb{N}$, est telle que $\sum x_n$ est convergente.*

Démonstration. — $(i) \implies (ii)$. Soit $m > n$ deux entiers. Alors,

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} x_i \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

car $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

— $(ii) \implies (iii)$. Trivial.

— $(iii) \implies (i)$. Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On extrait par récurrence une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leq \frac{1}{2^n}$. On pose pour tout $j \in \mathbb{N}$, $y_j = x_{\varphi(j+1)} - x_{\varphi(j)}$. On a

$$x_{\varphi(n+1)} = x_{\varphi(n)} + \sum_{j=1}^{n} y_j, \quad \text{et} \qquad \|y_j\| \leq \frac{1}{2^j} \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Par hypothèse, $\sum y_j$ converge, et donc $(x_{\varphi(n+1)})_n$ tend vers un certain $x \in E$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n - x\| \leq \left\|x_n - x_{\varphi(n+1)}\right\| + \left\|x_{\varphi(n+1)} - x\right\|$$

et on passe à la limite supérieure pour conclure.

□

1.1.3 Théorème de Baire

Soit (M, d) un espace métrique. Rappelons que $E \subset M$ est dit être dense dans M si $\overline{E} = M$. Quelques notations.

— $E \subset M$ est dit *nulle part dense*[1] si l'intérieur de $\mathring{\overline{E}} = \varnothing$.

— $F \subset M$ est dit *maigre* (1ère catégorie) s'il est réunion dénombre d'ensembles nulle part denses.

— $E \subset M$ est dit *générique* si le complément de E est maigre.

1. *Nowhere dense* en anglais.

Remarque. Un singleton est maigre. Ainsi, $\mathbb{Q}$ est maigre dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.1 (de Baire)**.** *Soit (M,d) un espace complet.*

(i) Soit $(F_n)_n$ une famille de fermés nulle part denses de M. Alors,

$$\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}^{\circ} = \varnothing.$$

(ii) Soit $(O_n)_n$ une famille d'ouverts denses dans M. Alors,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$$

est dense dans M. Dans un espace métrique complet, un ensemble générique est dense.

Corollaire 1.1.1 (Baire)**.** *Soit (M,d) un espace complet et $(F_n)_n$ une famille dénombrable de fermés de M. Alors, si $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \varnothing$. Un espace complet n'est pas maigre.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que tous les F_n soient d'intérieurs vides. Alors, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide, mais $\overset{\circ}{M} = M$.

□

1.2 Opérateurs linéaires bornés : trois principes de l'analyse fonctionnelle

On a les conséquences suivantes du théorème de Baire :

— principe de la borne uniforme (Banach-Steinhaus, 1927) ;
— principe de l'application ouverte (Banach-Schauder, 1930) ;
— principe du graphe fermé (Banach, 1927).

1.2.1 Rappels

Soient E et F des espaces vectoriels normés, et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On notera $\mathcal{B}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés. On notera $\|T\|$ la norme subordonnée de T à $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$. On remarquera que T est borné *si et seulement si* T est continu *si et seulement si* T est continu en 0_E *si et seulement si* T est uniformément continu *si et seulement si* $T(\mathcal{B}_E(0_E,1))$ est borné. De plus, pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\|Tx\|_F \leq \|T\| \, \|x_E\| .$$

$\mathcal{B}(E,F)$ est un espace vectoriel, sur lequel $\|\cdot\|$.

Proposition 1.2.1. *Si F est un espace de* Banach*, alors $(\mathcal{B}(E,F), \|\cdot\|)$ l'est aussi.*

Remarque. On note $ST = S \circ T$ lorsque l'on peut composer S et T, par exemple lorsque $E = F$. Dans ce cas, $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$, et donc $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2.2 Principe de la borne uniforme

Théorème 1.2.1 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit E un espace de* Banach*, F un espace vectoriel normé, et soit $(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'éléments de $\mathcal{B}(E,F)$. Si la famille est ponctuellement bornée, i.e que pour tout $x \in E$, il existe $c_x > 0$ tel que*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\| \leq c_x \|x\|_E ,$$

alors la famille est uniformément bornée. C'est-à-dire qu'il existe un $C > 0$ tel que

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\| \leq C.$$

Corollaire 1.2.1 (Banach-Steinhaus)**.** *Soit E un espace de* Banach *et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_n)_n \in \mathcal{B}(E,F)^{\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés. On suppose que pour $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F pour tout $x \in E$. Alors,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

Corollaire 1.2.2. *Soit E un espace de* Banach*, et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_n)_n \in \mathcal{B}(E,F)^{\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs bornés convergeant simplement vers une une fonction T. Alors $T \in \mathcal{B}(E,F)$, et*

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| .$$

Démonstration. T est clairement linéaire. La norme $\|\cdot\|_F$ est continue en tant qu'application de F dans $\mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_F = \lim_{n\to\infty} \|Tx\|_F .$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, $(T_n x)_n$ est bornée. En vertu du théorème de Banach-Steinhaus, il existe un $C > 0$ tel que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \leq C$. Ainsi, pour tout $x \in E$,

$$\|T_n x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \|x\|_E \leq C \|x\|_E .$$

Ainsi,

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\|_F \leq C \|x\| .$$

On en conclut que T est borné, et que $\|Tx\|_F \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \, \|x\|_E$, ce qui donne immédiatement le résultat.

□

Corollaire 1.2.3 (Neumann)**.** *Soit $T \in \mathcal{B}(E)$, où E est un espace de* Banach*. Supposons que $\|I - T\| < 1$ (où $I = \mathrm{id}_E$). Alors, T admet un inverse tel que pour tout $x \in E$,*

$$T^{-1}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (I-T)^k x.$$

1.2.3 Principe de l'application ouverte

Théorème 1.2.2 (Banach-Schauder)**.** *Soient E et F des espaces de* Banach*, et soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$ un opérateur surjectif. Alors, il existe $c > 0$ tel que $T(\mathcal{B}_E(0_E, 1))$ contiennent la boule ouverte $\mathcal{B}_F(0_F, c)$. En particulier, T envoie tout ouvert de E dans un ouvert de F.*

Corollaire 1.2.4 (théorème d'isomorphisme de Banach)**.** *Soient E et F des espaces de* Banach*, et soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$ un opérateur bijectif. Alors, $T^{-1} \in \mathcal{B}(F,E)$.*

Corollaire 1.2.5. *Soit E un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E. On suppose que E est complet pour chacune de ces normes, et qu'il existe un $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$,*

$$\|x\|_2 \leq c\,\|x\|_1 .$$

Alors, les normes sont équivalentes.

Démonstration. Conséquence immédiate du théorème d'isomorphisme.

□

Exemple. Dans le théorème d'isomorphisme, l'hypothèse des espaces de Banach est indispensable.

— Soit E l'ensemble des suites dans $\mathbb{R}$ à support finis, que l'on munit de la norme infini. Alors, $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet (on a même $\overline{E}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0(\mathbb{R})$). Soit $T : E \to E$, $x \mapsto \left(\frac{1}{k}x_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$. T est linéaire, borné, et bijectif. Pour autant, T^{-1} n'est *pas borné*.

— On ne peut se passer de l'hypothèse d'espace de Banach pour ne serait-ce qu'un seul des deux espaces. Si $E = F = \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})$, et que l'on munit E de la norme infinie, et F de la norme 2, alors $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est de Banach, mais pas $(E, \|\cdot\|_2)$. On remarque alors que $I = \mathrm{id}_{E,F}$ est linéaire bornée, mais pas I^{-1}.

Corollaire 1.2.6. *Soit E un espace de* Banach, *et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels fermés tels que $E = E_1 \oplus E_2$. Alors, il existe $c > 0$ tel que pour tout $x = x_1 + x_2 \in E = E_1 \oplus E_2$ (i.e $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$),*

$$\|x_1\| + \|x_2\| \leq c \|x_1 + x_2\| = c \|x\| .$$

Démonstration. On pose $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, et soit $T : E_1 \times E_2 \to E, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$. C'est un opérateur linéaire borné, et bijectif. On peut donc appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach.

□

Corollaire 1.2.7. *Soient M, N deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de* Banach *E tel que $E = M \oplus N$. Alors E/M et E/N sont isomorphes à N et M.*

Définition 1.2.1. *Soit $M \subset E$ un sous-espace fermé de E. M est dit supplémenté dans E s'il existe une sous-espace vectoriel $N \subset E$ tel que $E = M \oplus N$.*

Remarque. Si H est un espace de Hilbert, tout sous-espace M est supplémenté puisque $H = M \oplus M^{\perp}$.

Définition 1.2.2. *Soit E un espace de* Banach. *Un opérateur $P \in \mathcal{B}(E)$ est dit être une* ***projection*** *si $P^2 = P$.*

Théorème 1.2.3. *Si $P \in \mathcal{B}(E)$ est une projection, et E un espace de* Banach, *alors $E = \ker(P) + \mathrm{Im}(P)$. Réciproquement, si $E = M \oplus N$, alors il existe une projection $P \in \mathcal{B}(E)$ telle que $M = \ker(P)$ et $N = \mathrm{Im}(P)$. En conséquence, un sous-espace fermé M dans un* Banach *est supplémenté si et seulement s'il est l'image d'une projection.*

1.2.4 Principe du graphe fermé

Définition 1.2.3. *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire, où E et F sont deux espaces vectoriels normés. On appelle appelle* ***graphe*** *de T l'ensemble $G(T) = \{(x, Tx) \,|\, x \in E\}$ le sous-espace de $E \times F$ (muni de $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$). L'opérateur T est dit* ***fermé*** *si son graphe l'est dans $E \times F$.*

Théorème 1.2.4 (principe du graphe fermé)**.** *Soient E et F deux espaces de* Banach, *et soit $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, $T \in \mathcal{B}(E, F)$ si et seulement si le graphe (ou l'opérateur) est fermé.*

Démonstration. □

Exemple. On ne peut pas assouplir l'hypothèse de E comme espace de BANACH. Soient $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Soit $T : E \to F$, $f \mapsto f'$. Montrons que $G(T)$ est fermé, mais T n'est pas borné. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de E telle que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} f$ et $Tf_n \xrightarrow[n\to\infty]{E} g$. Montrons que $g = f' \in F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on a

$$f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f_n'(s)\,\mathrm{d}s.$$

On a $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{[0,1]} f$ et $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{[0,1]} g$. Alors,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$. On peut montrer que T n'est pas borné en choisissant $f(t) = t^n$, en supposant par l'absurde qu'il l'est.

Remarque. Soient E et F des espaces de BANACH, et $T : E \longrightarrow F$. Le principe du graphe fermé assure que les affirmations suivantes sont équivalentes.

(i) T est séquentiellement continue ;

(ii) T est séquentiellement fermé.

Corollaire 1.2.8 (HELLINGER-TOEPLITZ)**.** *Soit H un espace de* HILBERT *réel, et $T : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire symétrique, i.e $\langle x\,,\,Ty\rangle = \langle Tx\,,\,y\rangle$. Alors, T est borné.*

Démonstration. Montrons que T est fermé. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de H, et $x, y \in H$ tels que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Alors, pour tout $z \in H$,

$$\langle y\,,\,z\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} Tx_n\,,\,z\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n\,,\,z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n\,,\,Tz\rangle = \langle x\,,\,Tz\rangle = \langle Tx\,,\,z\rangle\,.$$

Ainsi, $y = Tx$ car l'égalité tient pour tout $z \in H$ (théorème de représentation).

□

Corollaire 1.2.9 (factorisation de DOUGLAS)**.** *Soient E, F et G des espaces de* BANACH*. Soient $T : E \longrightarrow F$ et $S : G \longrightarrow F$ un opérateur linéaire borné. Supposons T injectif. Alors, on a équivalence entre*

(i) $\mathrm{Im}(S) \subset \mathrm{Im}(T)$ *;*

(ii) il existe un opérateur linéaire borné $U : G \longrightarrow E$ tel que $TU = S$.

Démonstration. Le second point implique clairement le premier puisque $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Im}(TU) \subset \mathrm{Im}(T)$. Réciproquement supposons (i), et posons $U = T^{-1}S$. U est alors un opérateur linéaire, et $TU = S$. Montrons donc que le graphe de U est fermé. Soit $(z_n)_n$ une suite d'éléments de G, convergente de limite $z \in G$. On suppose aussi que $(Uz_n)_n$ converge, de limite x. Alors,

$$Tx = T\lim_{n\to\infty} Uz_n = \lim_{n\to\infty} TUz_n = \lim_{n\to\infty} Sz_n = Sz.$$

Ainsi, $x = T^{-1}Sz = Uz$.

□

1.2.5 Opérateurs fermables

Il est intéressant de considérer des opérateurs sur un sous-espace stricte de l'espace entier.

Définition 1.2.4. *Soient E et F deux espaces de* Banach, *et soit $D(T) \subset E$ un sous-espace vectoriel de E, et $D(T) \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. T est dit* ***fermé*** *si son graphe $G(T) = \{(x, y) \in E \times F \mid x \in D(T),\, y = Tx\}$ dans $E \times F$. Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de $D(T)$ convergeant vers un point x, et est telle que $(Tx_n)_n$ converge vers $y \in F$, alors $y = Tx$.*

Remarques.

— Il faut comprendre $D(T)$ comme le domaine de définition de T.

— La norme graphe est l'application $D(T) \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\|_E + \|Tx\|_F$.

Définition 1.2.5. *Soient E et F des espaces de* Banach, *$D(T)$ un sous espace vectoriel de E, et $T : D(T) \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. T est dit fermable s'il existe un opérateur linéaire $\tilde{T} : D\left(\tilde{T}\right) \longrightarrow F$ fermé sur $D(\tilde{T})$, un sous-espace vectoriel de E tel que $D(T) \subset D(\tilde{T})$, et tel que*

$$\tilde{T}_{|D(T)} = T.$$

Proposition 1.2.2 (caractérisation des opérateurs fermables)**.** *Soient E et F des espaces de* Banach *et soit $D(T) \subset E$ un sous-espace vectoriel. Soit $T : D(T) \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) T est fermable.

(ii) La projection en la première coordonnée, $p_E : \overline{G(T)} \longrightarrow E$, est injective.

(iii) Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de $D(T)$ et $y \in F$ sont tels que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, alors $y = 0$.

Démonstration. — $(i) \implies (iii)$. Se déduit du fait que $y = \tilde{T}0_E = 0_F$ où $\tilde{T}$ est l'extension fermée de T.

— $(iii) \implies (ii)$. $\overline{G(T)}$ est encore un sous-espace vectoriel de $E \times F$. Ainsi, $p_E : \overline{G(T)} \longrightarrow E$ est linéaire. Alors, d'après (iii), $\ker(p_E) = \{0\}$.

— $(ii) \implies (i)$ On pose $D(\tilde{T}) = p_E\left(\overline{G(T)}\right) \subset E$ (c'est un s.e.v). L'application corestreinte $p_E : \overline{G(T)} \longrightarrow D(\tilde{T})$ est bijective. Son inverse $p_E^{-1} : D(\tilde{T}) \longrightarrow \overline{G(T)}$. Notons aussi $p_F : \overline{G(T)} \longrightarrow F$ la projection en la seconde variable. On pose $\tilde{T} = p_F \circ p_E^{-1}$. Ainsi, $\tilde{T} : D(\tilde{T}) \longrightarrow T$ est un opérateur linéaire. Son graphe est le s.e.v $\overline{G(T)}$ fermé de $E \times F$ et est tel que $D(T) \subset D(\tilde{T})$ et $\tilde{T}_{|D(T)} = T$.

□

Exemples.

— Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, et $T : D(T) \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $f \in D(T)$ par

$$Tf = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

où $D(T)$ est l'ensemble des fonctions à support compact. Alors, T n'est pas fermable. On s'en convaincra en choisissant la suite de fonction f_n définie par $f_n(t) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{|t|\leq n}$. Alors, $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, mais $Tf_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si H est un espace de Hilbert, et soit $T : D(T) \longrightarrow H$ un opérateur linéaire définie sur $D(T)$ dense dans H. Supposons T symétrie. Alors, T est fermable. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $D(T)$ tel que $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et. tel que $Tx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in H$. Alors, pour tout $z \in D(T)$,

$$\langle y\,,\, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n\,,\, z\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n\,,\, Tz\rangle = 0.$$

Comme $D(T)$ est dense dans H, il existe une suite $(z_j)_j$ d'éléments de $D(T)$ telle que $y_j \xrightarrow[j\to\infty]{} y$. Ainsi,

$$\|y\|^2 = \langle y\,,\, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y\,,\, z_j\rangle = 0.$$

Ainsi, $y = 0$.

Remarque. On peut montrer que chaque opérateur différentiel définie sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert) vers $L^p(\Omega)$ est fermable.

1.3 Théorèmes de Hahn-Banach

1.3.1 Version algébrique

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. On notera E^* son dual algébrique, *i.e* $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Notre intérêt ici sera d'étendre des objets de G^* à E^* avec préservation de domination (où G est un s.e.v de E). On appelle quasisemi-norme (ou une forme sous-linéaire) toute application $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant l'inégalité triangulaire, et telle que pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

Théorème 1.3.1 (de Hahn-Banach d'extension sur des espaces vectoriels réels)**.** *Soit E un espace vectoriel* ***réel****, et soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une quasisemi-norme. Soit G un sous-espace vectoriel réel de E, et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur G telle que $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in G$. Alors, il existe $f \in E^*$ telle que f est une extension de g (i.e que $f_{|G} = g$) et $f \leq p$ sur tout E.*

Démonstration. — *Première étape.* Supposons $G \neq E$, et soit $x_0 \in E\backslash G$. On pose $\tilde{G} = G \oplus \mathbb{R}x_0$. Montrons qu'il existe $\tilde{g} \in \tilde{G}^*$ une forme linéaire telle que $\tilde{g}_{|G} = g$ et telle que $\tilde{g}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in \tilde{G}$. Une extension $\tilde{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ de $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ est déterminée de façon unique par sa valeur $a = \tilde{g}(x_0) \in \mathbb{R}$ en x_0. On a pour tout $y \in G$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{g}(y + \alpha x_0) = g(y) + \alpha a.$$

L'extension satisfait la condition $\tilde{g}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in \tilde{G}$ *si et seulement si* pour tout $y \in G$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$g(y) + \alpha a \leq p(y + \alpha x_0)$$

Si cette inégalité est vraie, alors on a clairement $g(y) \pm a \leq p(y \pm x_0)$. Inversement, si cela est vrai, alors pour tout $\alpha > 0$,

$$g(y) + \alpha a = \alpha(\alpha^{-1} g(y) + a) = \alpha\left(g\left(\alpha^{-1} y\right) + a\right) \leq \alpha p\left(\alpha^{-1} y + x_0\right) = p(y + \alpha x_0),$$

et

$$g(y) - \alpha a = \alpha\left(g\left(\alpha^{-1} y\right) - a\right) \leq \alpha p\left(\alpha^{-1} y - x_0\right).$$

Les deux inégalités sont donc équivalentes. Reste à trouver $a \in \mathbb{R}$ telle que la seconde inégalité $(g(y) \pm a \leq p(y \pm x_0))$ soit vraie, ou de manière équivalente

$$g(y) - p(y - x_0) \leq a \leq p(y + x_0) - g(y) \tag{1.1}$$

pour tout $y \in G$. Pour déterminer l'existence d'un tel a, on prend deux vecteurs y et $y' \in G$ arbitraires. On a

$$g(y) + g(y') = g(y + y') \leq p(y + y') = p(y + x_0) + p(y' - x_0)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$g(y') - p(y' - x_0) \leq p(y + x_0) - g(y).$$

On en déduit que

$$\sup_{y' \in G} (g(y') - p(y' - x_0)) \leq \inf_{y \in G} (p(y + x_0) - g(y)).$$

On peut donc trouver un $a \in \mathbb{R}$ satisfaisant la condition 1.1. Cela conclut la première étape.

— *Deuxième étape.* Soit

$$\mathcal{E} = \left\{(H, h) \,|\, H \text{ s.e.v de } E,\ h \in H^* \text{ telle que } G \subset H,\ h_{|G} = g, \text{ et } h \leq p \text{ sur } H.\right\}$$

est partiellement ordonnée lorsque que l'on munit de la relation $<$ définie par

$$(H, h) < (H', h') \iff H \subset H' \text{ et } h'_{|H} = h$$

où $(H, h), (H', h') \in \mathcal{E}$. Montrons que $\mathcal{E}$ est inductif : soit $\mathscr{F}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ totalement ordonné : $\mathscr{F} = ((H_i, h_i))_{i \in I}$. $\mathscr{F}$ admet pour majorant (H_0, h_0) où

$$H_0 = \bigcup_{i \in I} H_i$$

et $h_0 : H_0 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in H_0$ par $h_0(x) = h_i(x)$ lorsque $x \in H_i$ (h_0 est bien définie). On applique alors le lemme de Zorn : $\mathcal{E}$ admet un élément maximal $(\hat{H}, f)$. Cet élément est tel que $\hat{H} = E$, et alors f est la forme linéaire recherchée. Supposons par l'absurde que $\hat{H} \neq E$, et soit $x_0 \notin \hat{H}$. On pose $\tilde{\hat{H}} = \hat{H} \oplus \mathbb{R} x_0$. Selon la première étape de la démonstration, il existe une forme linéaire sur $\tilde{\hat{H}}$ telle que $\tilde{f}_{|\hat{H}} = g$, et $\tilde{f} \leq p$. Cela contredit la maximalité de $(\hat{H}, f)$.

□

Corollaire 1.3.1. *Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une quasisemi-norme sur un espace vectoriel réel. Alors, il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que pour tout $x \in E$,*

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in E$. On pose $G = \mathbb{R}x_0$. On introduit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha x_0 \mapsto \alpha p(x_0)$. Alors g est une forme linéaire sur G et on a $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in G$. En effet, si $\alpha > 0$ alors,

$$\alpha p(x_0) = p(\alpha x_0) \iff g(\alpha x_0) = p(\alpha x_0).$$

On voit que $0 = p(0) \leq p(x_0) + p(-x_0)$. Ainsi, si $\alpha > 0$, on a

$$g(-\alpha x_0) \leq p(-\alpha x_0).$$

En effet, $-p(x_0) \leq p(-x_0)$, donc $-\alpha p(x_0) \leq \alpha p(-x_0)$, *i.e* que $g(-\alpha x_0) \leq p(-\alpha x_0)$. Ainsi, d'après le théorème de HAHN-BANACH, il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f_{|G} = g$ et $f \leq p$ sur E. On a donc pour tout $x \in E$,

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x).$$

□

Théorème 1.3.2 (de HAHN-BANACH sur un espace vectoriel complexe (BOHNENBLUST-SOBEZYK))**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application sous-linéaire telle que $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in E$. Soit G un sous-espace vectoriel complexe de E, et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire complexe telle que $|g(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in G$. Alors, il existe $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire complexe telle que $f_{|G} = g$ et $|f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Un espace vectoriel complexe est un espace vectoriel réel si l'on restreint la multiplication par des scalaires aux réels. Si $g(x) = u(x) + iv(x)$, alors u et v sont des formes linéaires réelles sur G, et $|u(x)| \leq |g(x)| \leq p(x)$ et $|v(x)| \leq |g(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in G$. En particulier, en calculant $g(ix)$, on remarque que $v(x) = -u(ix)$. On peut étendre u sur E à une forme linéaire réelle $U : E \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $U_{|G} = u$, et $U(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$. On a $-U(x) = U(-x) \leq p(-x)$. Ainsi, $|U(x)| \leq p(x)$. On pose donc $f(x) = U(x) - iU(ix)$ pour tout $x \in E$. Alors,

$$f(ix) = U(ix) - iU(-x) = U(ix) + iU(x) = if(x).$$

Ainsi, f est une forme linéaire complexe. C'est bien une extension de g car pour tout $x \in G$,

$$f(x) = U(x) - iU(ix) = u(x) - iu(ix) = u(x) + iv(x) = g(x).$$

De plus $|f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in E$, car si l'on note $f(x) = re^{-i\theta}$, on a

$$0 \leq |f(x)| = e^{i\theta} f(x) = f(e^{i\theta} x) \in \mathbb{R}_+.$$

Ainsi,

$$|f(x) = |U(e^{i\theta} x)| \leq p(e^{i\theta x}) = p(x).$$

□

1.3.2 Version analytique

On note $E' = \mathcal{B}(E, \mathbb{K})$ le dual *topologique* de E (c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel).

Théorème 1.3.3. *Soit E un espace vectoriel normé, et G un sous-espace vectoriel de E. Soit $g \in G'$ une forme linéaire continue sur G. Alors, il existe $f \in E'$ telle que $f_{|G} = g$ une application telle que*

$$\sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E}} |f(x)| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in G}} |g(x)|,$$

i.e que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

Démonstration. Cas réel. Posons pour tout $x \in E$, $p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|$. C'est une semi-norme, et pour tout $x \in G$,

$$g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\| = p(x).$$

Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $f_{|G} = g$ et $f \leq p$ sur E. Pour tout $x \in E$, on a

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x).$$

Ainsi, $-p(x) \leq f(x) \leq p(x)$ et donc $|f(x)| \leq p(x)$. On a donc que $|f(x)| \leq \|g\|_{G'} \|x\|$ pour tout $x \in E$, ce qui signifie que f est bornée et $\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}$. Puisque f et g coïncident sur G, on a

$$\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in G}} |g(x)| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in G}} |f(x)| \leq \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in E}} |f(x)| = \|f\|_{E'}.$$

$\square$

Corollaire 1.3.2 (cas unitaire)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. Pour tout $x_0 \in E \backslash \{0_E\}$. Il existe $f_0 \in E'$ telle que $f_0(x_0) = \|x_0\|_E$ et $\|f_0\|_{E'} = 1$. En particulier,*

- *si $x \in E$, $x = 0$ si et seulement si pour tout $f \in E'$, $f(x) = 0$;*
- *le dual topologique E' sépare les points de E, i.e que pour tout $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Démonstration. Soit $G = \mathbb{K}x_0$, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$, et $\alpha \in \mathbb{K}$. On pose $g(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$. Alors, g est une forme linéaire bornée de norme $\|g\|_{G'} = 1$. En effet,

$$|g(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\|_E = \|\alpha x_0\|_E,$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$. Ainsi, $\|g\|_{G'} \leq 1$. Pour obtenir l'égalité, on observe que $g(x_0) = \|x_0\|$. Selon le théorème de Hahn-Banach analytique, il existe $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} = 1$, et $f_{|G} = g$, donc $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|_E$. Les deux autres affirmations sont des conséquences directes.

$\square$

Corollaire 1.3.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$\|x\|_E = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |f(x)|.$$

Ce supremum est atteint.

Démonstration. Si $x = 0_E$, le résultat est trivial. Supposons donc x non nul. Pour tout $f \in E'$ telle que $\|f\|_{E'} \leq 1$, on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E \leq \|x\|_E \,.$$

On en déduit que

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |f(x)| \leq \|x\|_E \,.$$

On conclut avec le résultat précédent.

□

Corollaire 1.3.4. *Soit E un espace vectoriel normé et $x_0 \in E$, tel que $\|x_0\|_E \geq 1$. Alors, il existe $f_0 \in E'$ tel que*

$$f_0(x_0) \geq \sup_{\|x\| \leq 1} |f_0(x)|.$$

Démonstration. Puisque $\|x_0\|_E \geq 1$, x est non nul. Selon le corollaire 1.3.3, il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\|_{E'} = 1$ et

$$f_0(x_0) = \|x_0\| \geq 1 = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)|.$$

□

Corollaire 1.3.5 (ensemble borné, faiblement borné)**.** *Soit E un espace vectoriel normé, et $M \subset E$ un sous-ensemble. L'ensemble M est borné dans E si et seulement si les ensembles $f(M)$ sont bornés dans $\mathbb{K}$ pour chaque $f \in E'$*

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Pour tout $f \in E'$ et $x \in M$,

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E \leq \|f\|_{E'} K.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit pour tout $x \in M$ et $f \in E'$, $T_x(f) = f(x)$. Par hypothèse, T_x est un opérateur linéaire borné, et

$$|T_x(f)| \leq \sup_{x \in M} |f(x)| < \infty.$$

Puisque E' est un espace de Banach, d'après le corollaire 1.3.3,

$$\|T_x\|_{E'} = \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'}\leq 1}} |f(x)| = \|x\|_E < \infty.$$

Ainsi, les normes $\|x\|_E$ sont majorées donc M est borné.

□

Corollaire 1.3.6. *Soit E un espace vectoriel normé, et G un sous-espace vectoriel de E. Soit $x_0 \in E$, alors*

$$x_0 \in \overline{G} \iff \big(\forall f \in E',\, (f_{|G} = 0) \implies (f(x_0) = 0)\big).$$

En particulier, G est dense dans E si et seulement si $f = 0$ pour tout $f \in E'$ qui s'annule sur G.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $x \in \overline{G}$, et soit $f \in E'$ tel que $f_{|G} = 0$. Par définition, il existe $(x_n)_n \in G^{\mathbb{N}^*}$ une suite convergeant vers x_0. Par continuité, $(f(x_n))_n$ tend vers $f(x_0)$. Or, $f(x_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nécessairement $f(x_0) = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Inversement, supposons que x_0 n'est pas dans l'adhérence de G. On cherche à montrer l'existence d'une fonction $f \in E'$ qui s'annule sur G et telle que $f(x_0) \neq 0$. Soit $M = \overline{G} \oplus \mathbb{K}x_0$. On pose sur M, $g(y + \alpha x_0) = \alpha$ pour tout $y + \alpha x_0 \in M = \overline{G} \oplus \mathbb{K}x_0$. Soit $y + \alpha x_0 \in M$ non nul. Alors,

$$\frac{|g(y+\alpha x_0)|}{\|y+\alpha x_0\|_E} = \frac{|\alpha|}{\|y+\alpha x_0\|_E}.$$

Si $\alpha = 0$, alors cette quantité est nulle, sinon,

$$\frac{|\alpha|}{\|y+\alpha x_0\|_E} = \frac{1}{\left\|\frac{y}{\alpha} + x_0\right\|} = \frac{1}{\left\|x_0 - \left(-\frac{y}{\alpha}\right)\right\|} \leq \frac{1}{d(x_0, \overline{G})} < \infty.$$

Ainsi, on en déduit que

$$\sup_{\substack{x\in M \\ x\neq 0}} \frac{|g(x)|}{\|x\|} \leq \frac{1}{d(x_0, \overline{G})} < \infty$$

donc $g \in M'$. Selon le théorème de Hahn-Banach analytique, il existe $f \in E'$ telle que $f_{|M} = g$ et $\|f\|_{E'} = \|g\|_{M'}$. En particulier, $f_{|G} = g_{|G} = 0$ et $f(x_0) = g(x_0) = 1 \neq 0$..

□

Remarques.

- Dans un espace de Hilbert H, un sous-espace vectoriel G est dense dans H *si et seulement si* $G^\perp = \{0_H\}$.
- Dans un espace vectoriel normé, on peut poser pour tout sous-espace vectoriel M de E,

$$M^\perp = \{f \in E' \,|\, \forall x \in M,\, f(x) = 0\}.$$

  Ainsi, $x_0 \in \overline{G}$ *si et seulement si* $f(x_0) = 0$ pour tout $f \in G^\perp$. De plus, G est dense dans E *si et seulement si* $G^\perp = \{0\}$

Définition 1.3.1. *Soit E un espace vectoriel normé, et E' son dual topologique. Soit $E'' = (E')'$ le bidual topologique muni de la norme $\|\cdot\|_{E''}$ définie pour tout $u \in E''$ par*

$$\|u\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} |u(f)|.$$

Corollaire 1.3.7 (prolongement canonique)**.** *Pour tout $x \in E$, la forme linéaire $j(x)$ définie sur E' par $j(x)(f) = f(x)$ pour tout $f \in E'$, est continue (i.e que $j(x) \in E''$). De plus, l'application*

$$\begin{array}{rccl} j: & E & \longrightarrow & E'' \\ & x & \longmapsto & j(x). \end{array}$$

*est une isométrie appelée **prolongement canonique**. Plus particulièrement, pour tout $x \in E$, $\|j(x)\|_{E''} = \|x\|_E$. Enfin, $j(E)$ est fermé dans E'' si et seulement si E est un espace de* Banach.

Démonstration. Pour tout $x \in E$, $j(x)$ est clairement linéaire sur E'. De plus, pour tout $f \in E'$,

$$|j(x)f| = f(x) \leq \|x\|_E \|f\|_{E'},$$

donc $\|j(x)\|_{E''} \leq \|x\|_E$. L'application j est elle aussi linéaire. Enfin,

$$\|j(x)\|_{E''} = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |j(x)f| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\|_{E'} \leq 1}} |f(x)| = \|x\|_E$$

d'après le corollaire 1.3.3. On en conclue que f est une isométrie. Pour le second point, on remarque que E'' est complet car c'est l'espace $\mathcal{B}(E', \mathbb{K})$. Puisque $j(E) \subset E''$, $j(E)$ est fermé dans E'' *si et seulement si* $j(E)$ est complet, ce qui est équivalent à demander que E soit complet car j est une isométrie.

□

Remarque. (Retour sur le corollaire borné, faiblement borné). On suppose $f(M)$ borné dans $\mathbb{K}$ pour tout $f \in E'$. Alors, $f(x) = j(x)f$. Or, on sait que $j(x) \in E''$ (donc est continue), j est une isométrie, et E' est un espace de Banach. Pour tout $f \in E'$,

$$\sup_{x \in M} |j(x)f| \leq K < \infty.$$

Ainsi,

$$\sup_{x \in M} \|j(x)\|_{E''} = \sup_{x \in M} \|x\|_E \leq K < \infty.$$

Proposition 1.3.1. *Soient E et F des espaces vectoriels normés, et $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors, T est borné si et seulement si pour tout $f \in F'$, $f \circ T \in E'$.*

Corollaire 1.3.8. *Soit E un espace de* BANACH*, et $N \subset E'$ un sous-ensemble de E'. Alors, N est borné dans E' si et seulement si pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{f(x) \mid f \in N\}$ est borné dans $\mathbb{K}$.*

Exercice. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et G un sous-espace vectoriel de E.

(i) Montrer que l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} E'/(G^{\perp}) & \longrightarrow & G' \\ [f] & \longmapsto & f_{|G} \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique.

(ii) Supposons que G est fermé, et soit $\pi : E \longrightarrow E/G$ la projection canonique. Montrer que l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} (E/G)' & \longrightarrow & G^{\perp} \\ \Lambda & \longmapsto & \Lambda \circ \pi \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique.

(iii) Supposons encore G fermé. Montrer que pour tout $f \in E'$,

$$\inf_{h \in G^{\perp}} \|f + h\| = \sup_{y \in G \setminus \{0\}} \frac{|f(y)|}{\|y\|} \quad \text{et} \quad \|f\| = \sup_{x \in E \setminus G} \frac{|f(x)|}{\inf_{y \in G} \|x + y\|}.$$

1.3.3 Versions géométriques du théorème de HAHN-BANACH

Dans cette sous-section, on supposera que E est un espace vectoriel normé *réel*.

Définition 1.3.2. *On appelle hyperplan affine tout sous-ensemble H de E de la forme $H = \rho^{-1}(\{\alpha\})$ avec $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Définition 1.3.3. *Soit C et D des sous-ensembles de E.*

— *On dit que l'on peut* ***séparer C et D au sens large*** *s'il existe ρ une forme linéaire non nulle sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\sup_{x\in C} \rho(x) \leq \alpha \leq \inf_{y\in D} \rho(y).$$

En d'autres termes,

$$C \subset \rho^{-1}(]-\infty, \alpha]) \quad et \quad D \subset \rho^{-1}([\alpha, \infty[).$$

— *On dit que l'on peut* ***séparer C et D au sens stricte*** *s'il existe ρ une forme linéaire non nulle sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\sup_{x\in C} \rho(x) < \alpha < \inf_{y\in D} \rho(y).$$

En d'autres termes, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$C \subset \rho^{-1}(]-\infty, \alpha-\varepsilon]) \quad et \quad D \subset \rho^{-1}([\alpha+\varepsilon, \infty[).$$

Exemples.

— Soient $C_1 = \{(0,0)\}$, $C_2 = \{(-1,0)\}$, et $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$. Alors, C_1 et D sont séparés au sens large. C_2 et D eux le sont au sens strict.

— Soit $C = \mathcal{B}(0, \|x_0\|)$ et $D = \{x_0\}$ où $x_0 \neq 0$ est un élément E d'un espace vectoriel normé. Alors, C et D sont séparés au sens large. En effet, d'après le théorème de HAHN-BANACH analytique, il existe $\rho \in E'$ tel que $\|\rho\|_{F'} = 1$ et $\rho(x_0) = \|x_0\|$. Alors, $C \subset \{\rho \leq \|x_0\|_E\}$ car pour tout $x \in C$ tel que $\|x\|_E \leq \|x_0\|_E$, on a

$$|\rho(x)| \leq \|\rho\|_{E'} \|x\|_E = \|x\|_E \leq \|x_0\|_E\,.$$

De même, $D \subset \{\rho \geq \|x_0\|_E\}$.

Définition 1.3.4. *Soit $M \subset E$ un sous-ensemble d'un sous-espace vectoriel E. On appelle* ***fonctionnelle de*** **MINKOWSKI** *de M l'application définie pour tout $x \in E$ par*

$$p_M(x) = \inf\{t > 0 \,|\, x/t \in M\} = \inf\{t > 0 \,|\, x \in tM\}.$$

Remarque.

— Si $0_E \in M$, alors $p_M(0) = 0$.

— Si M est absorbant ($i.e$ que pour tout $x \in E$, il existe $r > 0$ tel que $x \in \alpha M$ dès lors que $|\alpha| \geq r$), alors $p_M(x)$ est une quantité finie pour tout $x \in E$.

Lemme 1.3.1. *Soit E un espace vectoriel normé et soit C un sous-ensemble convexe tel que son intérieur contienne 0_E. Alors, pour tout $x, y \in E$ et $\alpha \geq 0$,*

$$p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y) \quad \text{et} \quad p_C(\alpha x) = \alpha p_C(x).$$

De plus, p_C est continue (et lipchitizienne) et

$$p_C^{-1}(]-\infty, 1[) \subset C \subset p_C^{-1}(]-\infty, 1]).$$

Si de plus C est un ouvert,

$$C = p_C^{-1}(]-\infty, 1[).$$

Démonstration. 0 est dans $\overset{\circ}{C}$, il existe donc $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_E(0, r) \subset C$. Pour tout $x \in E$ non nul, on pose

$$I_x = \{t > 0 \,|\, \frac{x}{t} \in C\} \neq \varnothing.$$

Alors, $I_x = F_x^{-1}(C)$ où $F_x : \mathbb{R}_+^* \to E$, $t \mapsto \frac{x}{t}$. Cette application F_x étant continue, on en déduit que $p_C(x) < \infty$ et que $I_x =]p_C(x), \infty[$. On observe de plus que $p_C(0) = 0$, et que pour tout $\alpha > 0$,

$$p_C(\alpha x) = \alpha p_C(x).$$

Soient maintenant $x, y \in E$, et $s, t > 0$ tels que $x/t \in C$ et $y/s \in C$. Soit $\lambda = \frac{t}{t+s} \in]0, 1[$. Alors,

$$\frac{x+y}{t+s} = \lambda \frac{x}{t} + (1-\lambda) \frac{y}{s} \in C$$

car x/t et y/s sont des éléments de C, qui est convexe. On en déduit que $p_C(x+y) \leq t+s$. Si l'on prend l'infimum sur les t et s tels que $x/t \in C$ et $y/s \in C$, on en déduit que

$$p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y).$$

Soit maintenant x est tel que $p_C(x) < 1$. Alors, il existe un $t \in]0, 1[$ tel que $x/t \in C$. On a donc

$$x = t \cdot \frac{x}{t} + (1-t) 0_E \in C$$

par convexité car $0 \in C$. Réciproquement, si $x \in C$, alors pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{x}{t} = \frac{x}{t} + \left(1 - \frac{1}{t}\right) 0_E \in C.$$

Ainsi, $p_C(x) \leq 1$.

Montrons maintenant que p_C est continue. Puisque 0 est dans l'intérieur de C, il existe un $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_E(0, r) \subset C$. Alors, pour tout $x \in \mathcal{B}_E(0, r)$, $p_C(x) \leq 1$. Soit maintenant $x \in E$ non nul. On a

$$p_C\left(\frac{r}{2\left\|x\right\|_E}\right) \leq 1 \quad \text{donc} \quad p_C(x) \leq \frac{2}{r} \left\|x\right\|_E.$$

Cependant, p_C n'est pas linéaire donc on ne peut pas conclure immédiatement sur sa continuité. On conclut en remarquant que pour tout $x, y \in E$ non nuls,

$$|p_C(x) - p_C(y)| \leq p_C(x-y) \leq \frac{2}{r} \|x-y\|_E .$$

Supposons maintenant C ouvert. On a déjà montré que

$$\{x \in E \,|\, p_C(x) < 1\} \subset C.$$

Soit $x \in E$ tel que $p_C(x) \geq 1$. Alors pour tout $t < 1$, $x/t \notin C$. Mais $E \backslash C$ est un fermé. Cela signifie donc que $x \in E \backslash C$ (en faisant tendre t vers 1).

□

Théorème 1.3.4 (Hahn-Banach géométrique, première forme)**.** *Soit E un espace vectoriel normé réel, et soit $C \subset E$ un convexe d'intérieur non vide. Si $x_0 \in E \backslash C$, alors il existe une forme linéaire $\rho \in E'$ non nulle telle que pour tout $x \in \overset{\circ}{C}$,*

$$\rho(x) < \rho(x_0),$$

et pour tout $x \in C$,

$$\rho(x) \leq \rho(x_0).$$

Démonstration. Pour simplifier, on suppose C être ouvert et non vide. On suppose aussi que $0 \in C$ (ainsi, $x_0 \neq 0_E$). Soit $G = \mathbb{R}x_0$, et $g : G \to \mathbb{R}$, $\alpha x_0 \mapsto \alpha$. Pour tout $\alpha \geq 0$, on a

$$g(\alpha x_0) = \alpha \leq \alpha p_C(x_0) = p_C(\alpha x_0)$$

car $x_0 \notin C$ donc $p_C(x_0) \geq 1$. Soit maintenant $\alpha < 0$. Alors,

$$g(\alpha x_0) = \alpha x_0 \leq p_C(x_0).$$

Ainsi, pour tout $x \in G$, $g(x) \leq p_C(x)$. On applique donc le théorème de Hahn-Banach algébrique. Il existe donc un $\rho \in E^*$ tel que $\rho_{|G} = g$ et $\rho \leq p_C$ sur E. On a donc

$$\rho(x_0) = g(x_0) = 1 \quad \text{et pour tout } x \in C, \quad \rho(x) \leq p_C(x) < 1 = \rho(x_0).$$

Par ailleurs,

$$\rho(x) \leq p_C(x) \leq K \|x\|_E$$

car p_C est lipchitzienne, et

$$-\rho(x) = \rho(-x) \leq p_C(-x) \leq K \|x\|_E .$$

On en déduit que $|\rho(x)| \leq K \|x\|_E$, donc $\rho \in E'$ (et est non nul).

□

Corollaire 1.3.9 (séparation des points dans le cas convexe)**.** *Soit E un espace vectoriel normé réel, et C un convexe non vide. Soit $x_0 \in E \backslash C$.*

(i) Si C est ouvert, on peut séparer C et $\{x_0\}$ au sens large : il existe une forme linéaire non nulle $\rho \in E'$ telle que

$$\sup_{x \in C} \rho(x) \leq \rho(x_0).$$

(ii) Si C est fermé, on peut séparer C et $\{x_0\}$ au sens strict : il existe une forme linéaire non nulle $\rho \in E'$ telle que

$$\sup_{x \in C} \rho(x) < \rho(x_0).$$

Corollaire 1.3.10 (équivalence)**.** *Soit E un espace vectoriel normé réel, et $C \subset E$ un convexe non vide. Soit $x_0 \in E$. Alors,*

$$x_0 \in \overline{C} \iff \forall \rho \in E',\, \rho(x_0) \leq \sup_{x \in C} \rho(x).$$

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $x_0 \in \overline{C}$. Alors, il existe $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de C convergeant vers x_0. Alors, pour tout $\rho \in E'$,

$$\rho(x_0) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n) \leq \sup_{n \geq 1} \rho(x_n) \leq \sup_{x \in C} \rho(x).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, supposons que $x_0 \notin \overline{C}$. Selon le corollaire de séparation des points dans le convexe, il existe $\rho \in E' \backslash \{0_{E'}\}$ telle que $\sup_{x \in \overline{C}} \rho(x) < \rho(x_0)$. Ainsi, $\sup_{x \in C} < \rho(x_0)$.

□

Remarque. Dans le cas où $C = G$ est un sous-espace vectoriel de E, alors si $x_0 \in E$,

$$x_0 \in \overline{G} \iff \rho \in E',\, (\rho_{|G} = 0) \implies (\rho(x_0) = 0).$$

Ainsi, si pour tout $\rho \in E'$, $\rho_{|G} = 0$ implique que $\rho = 0$, alors G est dense dans E.

Théorème 1.3.5 (Hahn-Banach géométrique, seconde forme)**.** *Soit E un espace vectoriel normé réel, et C et D deux convexes non vides disjoints. Alors,*

(i) si C est ouvert, on peut séparer C et D au sens large avec une certaine forme linéaire non nulle ;

(ii) si C est compact et D est fermé, on peut séparer C et D au sens strict avec un certaine forme linéaire non nulle.

Démonstration. Soit $A = C - D = \{c - d \,|\, (c, d) \in C \times D\}$. On voit facilement que A est un convexe non vide. De plus, C et D étant disjoints, A ne contient pas 0_E.

(i) Si C est ouvert, alors est aussi ouvert comme union d'ouverts

$$A = \bigcup_{y \in D} (C - y).$$

On peut donc séparer au sens large A et $\{0_E\}$: il existe une forme linéaire non nulle $\rho \in E'$ telle que pour tout $z \in A$, $\rho(z) \leq \rho(0) = 0$. On conclut car

$$\sup_{(x,y) \in C \times D} \rho(x - y) \leq 0 \iff \sup_{x \in C} \rho(x) \leq \inf_{y \in D} \rho(y) < \infty.$$

(ii) Supposons C compact et D fermé. Alors, on observe en utilisant les caractérisations séquentielles que A est aussi fermé. Par le corollaire de séparation, A et $\{0_E\}$ sont séparés au sens strict : il existe une forme linéaire non nulle $\rho \in E'$ tel que

$$\sup_{(x,y) \in C \times D} \rho(x - y) < 0,$$

donc

$$\sup_{x \in C} \rho(x) < \inf_{y \in D} \rho(y) < \infty.$$

□

Remarque. Les théorèmes de Hahn-Banach géométriques restent vrais dans des espaces vectoriels localement convexes.

Définition 1.3.5 (demi-espace)**.** *Soit E un espace vectoriel normé réel. On appelle demi-espace tout sous-ensemble de E de la forme*

$$\{x \in E \mid \rho(x) \leq \alpha\}$$

où $\rho \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corollaire 1.3.11 ("caractérisation" convexe fermé)**.** *Tout convexe fermé D dans un espace vectoriel normé réel E est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant D.*

Démonstration. D est clairement contenu dans l'intersection de tous les espaces fermés contenant D. Vérifions donc l'inclusion réciproque, et soit $x_0 \notin D$. Selon la seconde forme du théorème de Hahn-Banach géométrique avec $C = \{x_0\}$, il existe une forme linéaire non nulle $\rho \in E'$ telle que

$$\rho(x_0) < \inf_{x \in D} \rho(x).$$

On pose $\alpha = \inf_{x \in D} \rho(x)$. Alors le demi-espace

$$\{x \in E \mid \rho(x) \geq \alpha\} = \{x \in E \mid -\rho(x) \leq -\alpha\}$$

contient D mais pas x_0.

□

Proposition 1.3.2. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\rho \in E^*$. Alors, l'hyperplan affine $H = \rho^{-1}(\{\alpha\})$ est fermé si et seulement si $\rho \in E'$.*

Démonstration. Le sens direct est clair. Montrons le sens réciproque. H étant fermé, H^c est ouvert. Si $x_0 \in H^c$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_E(x_0, r) \subset H^c$. Montrons que pour tout $x \in \mathcal{B}_E(x_0, r)$, $\rho(x) < \alpha$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x_1 \in \mathcal{B}_E(x_0, r)$ tel que $\rho(x_1) > \alpha$ (l'inégalité doit nécessairement être stricte par définition de H). La boule $\mathcal{B}_E(x_0, r)$ est convexe. On note

$$[x_0, x_1] = \{x_\lambda = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_0 \,|\, \lambda \in [0, 1]\}.$$

Alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\rho(x_\lambda) \neq \alpha$. On pose

$$\lambda_0 = \frac{\rho(x_1) - \alpha}{\rho(x_1) - \rho(x_0)} \in]0, 1[.$$

Or, le calcul montre $\rho(x_{\lambda_0}) = \alpha$, ce qui est contradictoire. Soit maintenant $x \in E$ avec $\|x\|_E \leq 1$. Alors, $y := x_0 + rx \in \mathcal{B}_E(x_0, r)$ donc $\rho(y) < \alpha$. On en déduit que

$$\begin{cases} \rho(x) < \frac{1}{r}(\alpha - \rho(x_0)), \\ \rho(-x) = -\rho(x) > -\frac{1}{r}(\alpha - \rho(x_0)). \end{cases}$$

On en conclut que $|\rho(x)| < \frac{1}{r}(\alpha - \rho(x_0))$, donc ρ est bornée sur la boule unité.

□

Remarque. Soit E un espace vectoriel normé *complexe*. On peut définir ici un hyperplan comme un sous-ensemble de E sous la forme

$$H = \{\Re\rho = \alpha\}$$

où $\rho \in E^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la séparation large et stricte en utilisant non plus ρ mais $\Re(\rho)$. On peut alors étendre le théorème de Hahn-Banach géométrique de première forme sur les espaces complexes.

1.3.4 Deux résultats de Helly (problème des moments)

Corollaire 1.3.12 (Helly 1912, Hahn 1927)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de E et $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, il existe une forme linéaire bornée $f \in E'$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$f(x_n) = \alpha_n$$

avec $\|f\|_{E'} \leq M$, si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j \right| \leq M \left\| \sum_{j=1} \beta_j x_j \right\|_E .$$

Remarque. On peut voir que toute forme $f \in (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}))'$ peut être écrite sous la forme

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}m(t)$$

pour tout $x \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ où m est une mesure borélienne sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $t \in [0,1]$. On note $x_n(t) = t^{n-1}$. Le résultat précédent donne en fait une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir résoudre le système (d'inconnu m)

$$\left(\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}m(t)\right)_{n\geq 1} = (\alpha_n)_{n\geq 1}.$$

Démonstration. La nécessité découle de la propriété sur $\|f\|_{E'}$. En effet, pour tout $n \geq 1$ et tout $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\left|\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j\right| = \left|\sum_{j=1}^n \beta_j f(x_j)\right| = \left|f\left(\sum_{j=1}^n \beta_j x_j\right)\right| \leq \|f\|_{E'} \left\|\sum_{j=1} \beta_j x_j\right\|_E \leq M \left\|\sum_{j=1} \beta_j x_j\right\|_E.$$

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Soit

$$G = \left\{ y \in E \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}^*,\, \exists \beta \in \mathbb{K}^n,\, y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j \right\}.$$

Soit $g : G \longrightarrow \mathbb{K}$ l'application défini pour tout $y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j \in G$ par

$$g(y) = \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j.$$

Remarquons que g est bien définie par si $y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j = \sum_{k=1}^n \gamma_k x_k$, alors

$$\left|\sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j - \sum_{k=1}^n \gamma_k \alpha_k\right| \leq M \left|\sum_{j=1}^n \beta_j x_j - \sum_{k=1}^n \gamma_k x_k\right| = 0.$$

L'application g est linéaire, et $\|g\|_{G'} \leq M$. On applique alors le théorème Hahn-Banach analytique. Il existe donc $f \in E'$ une forme telle que $f_{|G} = g$, $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} \leq M$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) = g(x_n) = \alpha_n$.

□

Lemme 1.3.2. *Soit E un espace vectoriel, et $\rho_1, \ldots, \rho_n$ des formes linéaires indépendantes sur E. On a les résultats suivants.*

(i) Il existe des vecteurs $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que pour tout $j, k \in [\![1, n]\!]$, $\rho_j(x_k) = \delta_{j,k}$.

(ii) Si ρ est une forme linéaire sur E telle que

$$\bigcap_{j=1}^n \ker \rho_j \subset \ker \rho,$$

alors ρ est un combinaison linéaire des $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

Lemme 1.3.3. *Soit E un espace vectoriel normé, et $G \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$\sup_{z \in G} \|x+z\| = \sup_{f \in G^\perp \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}}.$$

Corollaire 1.3.13 (Helly, 1921). *Soit E un espace vectoriel normé, et $n \geq 1$. Soit $f_1, \ldots, f_n \in E'$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, et $M \geq 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $x_\varepsilon \in E$ tel que $\|x_\varepsilon\|_E \leq M + \varepsilon$, et $f_j(x_\varepsilon) = \alpha_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, si et seulement si pour tout $\beta \in \mathbb{K}^n$,*

$$\left| \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j \right| \leq M \left\| \sum_{j=1}^n \beta_j f_j \right\|_{E'}.$$

Démonstration. Encore une fois, la nécessité est claire. Vérifions la suffisance de la condition.

(i) Supposons d'abord que les $f_1, \ldots, f_n$ sont linéairement indépendants. D'après le lemme 1.3.2, il exsite $x_1, \ldots, x_n \in E$, des vecteurs tels que $f_j(x_k) = \delta_{j,k}$ pour tout $j, k \in [\![1, n]\!]$. On pose

$$G = {}^\perp\{f_1, \ldots, f_n\} = \{x \in E \,|\, \forall j \in [\![1, n]\!]\,,\, f_j(x) = 0\}.$$

Montrons que $G^\perp = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$. Soit donc $f \in G^\perp$. Pour tout $x \in G$, $f(x) = 0$. Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$x - \sum_{j=1} f_j(x) x_j \in G$$

car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$f_k\left(x - \sum_{j=1} f_j(x) x_j \right) = f_k(x) - \sum_{j=1} f_j(x) f_j(x_j) = 0.$$

On en déduit que

$$f = \sum_{j=1}^n f(x_j) f_j \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n).$$

Ainsi, $G^\perp \subset \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$. L'inclusion réciproque est triviale par définition de G. On a donc bien que $G^\perp = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$. On pose $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \in E$. Alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_k(x_j) = \alpha_k.$$

De plus, si l'on cherche la solution de l'équation. $f_k(y) = \alpha_k$, y sera de la forme $y = x + z$. On a

$$\inf_{z \in G} \|x+z\| = \sup_{f \in G^\perp \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} = \sup_{\beta \in\ \mathbb{K}^n} \frac{\left| \sum_{j=1}^n \beta_j f_j(x) \right|}{\left\| \sum_{j=1}^n \beta_j f_j \right\|_{E'}}.$$

(ii) Démontrons maintenant le cas général. Soit $J \subset [\![1, n]\!]$ un sous-ensemble d'indices tels que les f_j (pour $j \in J$) soient linéairement indépendants et engendrent le même espace que $f_1, \ldots, f_n$. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Puisque nous nous sommes ramenés au cas précédent, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $\|x_\varepsilon\| \leq M + \varepsilon$, et pour tout $j \in J$, $f_j(x_\varepsilon) = \alpha_j$. Soit alors $k \in [\![1, n]\!] \setminus J$, il existe $\beta_k \in \mathbb{K}$ et $j \in J$ tel que

$$f_k = \sum_{j \in J} \beta_j f_j.$$

Alors,

$$\sum_{j \in J} \beta_j \alpha_j = \sum_{j \in J} \beta_j f_j(x_\varepsilon) = f_k(x_\varepsilon).$$

De plus,

$$\left| \sum_{j \in J} \beta_j \alpha_j - \alpha_k \right| \leq M \underbrace{\left\| \sum_{j \in J} \beta_j f_j - f_k \right\|_E}_{=0}.$$

On en déduit que

$$\alpha_k = \sum_{j \in J} \beta_j \alpha_j = f_k(x_\varepsilon).$$

□

1.3.5 Espaces de Banach réflexifs et espaces de Banach séparables

Définition 1.3.6. *Un espace vectoriel normé E est dit **réflexif** si l'isométrie canonique $J_E : E \longrightarrow E''$ est surjective (donc bijective).*

Remarque. Un espace est réflexif signifie que tout élément de E'' est une évaluation.

Proposition 1.3.3 (reflexivité du dual, d'un s.e.v, d'un quotient)**.** *Soit E un espace de* Banach. *On a les résultats suivants.*

(i) E est réflexif si et seulement si E' l'est.

(ii) Si E est réflexif, et G est un sous-espace vectoriel fermé de E, alors G et E/G sont réflexifs.

Démonstration. (i) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que E est réflexif, et soit $\Lambda : E'' \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire bornée, *i.e* que $\Lambda \in E'''$. On pose $f = \Lambda \circ J_E : E \longrightarrow \mathbb{K}$. Puisque J_E est surjective, si u est élément de E'', alors il existe un $x \in E$ tel que $x = J_E^{-1}(u)$. Alors,

$$\Lambda(u) = \Lambda(J_E(x)) = f(x) = J_E(x)(f) = u(f).$$

Ainsi, $\Lambda = J_{E'}(f)$ où $J_{E'} : E' \longrightarrow E'''$ est l'isométrie canonique de E' vers *son* bidual. On a donc montré que pour tout $\Lambda \in E'''$, il existe $f \in E'$ tel $\Lambda = J_{E'}(f)$. Ainsi, $J_{E'}$ est bien surjective, et donc E' est réflexif.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, supposons que E' est réflexif. On a que $J_E(E)$ est un fermé puisque E est de Banach. Montrons donc que $J_E(E)$ est dense dans E''. Soit $\Lambda : E'' \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire bornée sur E'' qui s'annulle sur $J_E(E)$. Alors, $\Lambda \circ J_E = 0$. Comme E' est réflexif, il existe $f \in E'$ tel que pour tout $u \in E''$,

$$\Lambda(u) = u(f).$$

Comme $\Lambda \circ J_E = 0$, on en déduit que pour tout $x \in E$,

$$f(x) = J_E(x)(f) = \Lambda(J_E(x)) = 0.$$

Ainsi, $f = 0_{E'}$, donc $\Lambda = 0_{E''}$. On a donc montré que $J_E(E)^\perp = \{0_{E''}\}$, ce qui implique $J_E(E)$ est dense dans E''.

(ii) On suppose E est réflexif, et soit G un sous-espace vectoriel fermé de E. Montrons que G est réflexif. Soit l'opérateur linéaire

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & G' \\ f & \longmapsto & f_{|G}. \end{array} \right.$$

Soit $v \in G''$, et posons $u = v \circ \pi : E' \longrightarrow \mathbb{K}$. Par réflexivité de E, il existe un unique $y \in E$ tel que $J_E(y) = u$. Chaque élément $f \in G^\perp$ satisfait $\pi(f) = 0$, et alors,

$$f(y) = J_E(y)(f) = u(f) = v(\pi(f)) = 0.$$

Ainsi, $f(y) = 0$ pour tout $f \in G^\perp$. On en déduit que $y \in \overline{G}$ (conséquence du théorème de Hahn-Banach). Mais puisque G est fermé, y est élément de G. Soit maintenant $g \in G'$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ telle que $g = \pi(f)$. Alors,

$$v(g) = v(\pi(f)) = u(f) = J_E(y)(f) = f(y) = g(y).$$

Ainsi, $v(g) = g(y) = J_G(y)(g)$ donc $v = J_G(y)$. On a donc montré que G est réflexif

$\square$

Exercice. Montrer que le quotient est aussi réflexif sous les hypothèses données.

Remarques.

— Tout espace vectoriel de dimension finie est réflexif. En effet, en dimension finie, $\dim E'' = \dim E$.

— Tout espace de Hilbert est réflexif, en vertu du théorème de Riesz. En effet, si H est un espace de Hilbert, ce dernier affirme que pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $x \in H$ tel que pour tout $y \in H$,

$$\varphi(y) = \langle y \, , \, x\rangle \quad \text{et} \quad \|\varphi\|_{H'} = \|x\|_H \,.$$

Soit alors

$$R : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H' \\ x & \longmapsto & \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ y & \longmapsto & \langle y\,,\,x\rangle\,. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

R est une bijection antilinéaire. Montrons que $J_H : H \longrightarrow H''$ est surjective. Soit $\psi \in H''$, on pose

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \overline{\psi(R(x))}. \end{array} \right.$$

Φ est linéaire, et pour tout $x \in H$,

$$|\Phi(x)| = \left|\overline{\psi(R(x))}\right| = |\overline{\psi(R(x))}| \leq \|\psi\|_{H''} \|R(x)\|_{H'} = \|\psi\|_{H''} \|x\|_H \,.$$

Ainsi, Φ est une forme linéaire bornée, donc $\Phi \in H'$. Il existe donc $a \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $\Phi(x) = \langle x\,,\,a\rangle$. Donc pour tout $x \in H$,

$$\langle x\,,\,a\rangle = \Psi(R(x)) = (\psi \circ R)(x).$$

Ainsi, pour $f \in H'$,

$$\psi(f) = (\psi \circ R)(R^{-1}(f)) = \left\langle R^{-1}\,,\,f\right\rangle.$$

Or, $f = (R \circ R^{-1})(f)$. Ainsi, pour tout $y \in H$,

$$f(y) = \left\langle R^{-1}(f)\,,\,y\right\rangle.$$

On en déduit que pour tout $f \in H'$,

$$\psi(f) = f(a) = J_H(a)(f).$$

On en déduit que J_H est bien surjective.

— Si $p \in]1, \infty[$, et q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $(l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}))'$ est isomorphe à $l^q(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On en déduit que $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \cong (l^q(\mathbb{N}, \mathbb{R}))' \cong (l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}))''$, et que $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est réflexif.

Rappel. Un espace métrique est dit *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.

Proposition 1.3.4. *Soit E un espace vectoriel normé.*

(i) Si E' est séparable, alors E l'est aussi.

(ii) Si E est réflexif et séparable, alors E' est séparable.

Démonstration. (*i*) Supposons E' séparable, et soit $(j_n)_n$ une suite dense dans E'. On sait que

$$\|f_n\|_{E'} = \sup_{x \in E \|x\|_E = 1} |f_n(x)|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons $x_n \in E$ tel que $\|x_n\|_E = 1$ et tel quee

$$f_n(x_n) \geq \frac{1}{2} \|f_n\|_{E'}\,.$$

Notons $G = \mathrm{Vect}((x_n)_n)_{\mathbb{K}}$. Montrons que G est dense dans E. Soit donc $g \in G^{\perp}$. Il existe φ une extractrice telle que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|g - f_{\varphi(n)}\right\|_{E'} = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} \left\|f_{\varphi(n)}\right\|_{E'} & \leq & 2|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})| \\ & = & 2|(f_{\varphi(n)} - g)(x_{\varphi(n)})| \\ & \leq & 2\left\|f_{\varphi(n)} - g\right\|_{E'} \underbrace{\left\|x_{\varphi(n)}\right\|}_{=1} \\ & = & 2\left\|f_{\varphi(n)} - g\right\|_{E'} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{array}$$

On en déduit que $g = 0$, donc que $G^{\perp} = \{0\}$. Ainsi, G est dense E. Cependant, rien n'indique G est dense. Pour cela, on considère la même démonstration avec $G_0 = \mathrm{Vect}((x_n)_n)_{\mathbb{Q}}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $G_0 = \mathrm{Vect}((x_n)_n)_{\mathbb{Q}[i]}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(ii) Si E est réflexif et séparable, alors E'' est séparable. On en déduit que E' est séparable car J_E est une isométrie bijective.

□

Remarques.

— Tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.

— Pour tout $p \in [1, \infty[$, l'espace $l^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est séparable. Plus généralement, $L^p(\mu)$ est séparable pour toute mesure μ. En revanche, $l^{\infty}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ n'est pas pas séparable. En effet, $\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\| = 1$ si $A \neq B$.

1.4 Topologies faibles et applications

1.4.1 Rappels de topologie

Soit X un ensemble, $(Y_i, \tau_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, et $(\varphi_i : X \longrightarrow Y_i)_{i\in I}$ une famille d'applications. On chercher à construire sur X une topologie τ la plus pauvre en nombre d'ouverts[2]. On se donne une telle topologie τ. Si $o_i \subset Y_i$ est un ouvert, puisque tous les φ_i sont continues, alors $\varphi_i^{-1}(o_i)$ est nécessairement ouvert dans τ. Si l'on varie o_i dans les ouverts de Y_i et selon $i \in I$, on obtient une famille d'ouverts sur X, notée $(\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, avec

$$\Lambda = \{\lambda = (i, o_i) \,|\, i \in I, o_i \in \tau_i\}$$

et $\mathcal{O}_\lambda = \varphi_i^{-1}(o_i)$. Cette famille n'est pas nécessairement une topologie.

Lemme 1.4.1. *La topologie engendré par la famille $(\mathcal{O}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est la plus petite topologie associée à la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$, i.e rendant toutes les φ_i continues.*

Remarque. On décrit cette topologie comme *faible*.

2. Si X est muni de la topologie discrète, tous les parties de X sont des ouverts, et les φ_i seraient avec cette topologie toutes continues.

Rappel. Si (X,τ) est un espace topologique, on appelle base de voisinage d'un point $x \in X$ toute famille d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ telle que pour tout ouvert $\mathcal{O} \in \tau$, si $x \in \mathcal{O}$, alors il existe $i_x \in I$ tel que $\mathcal{O}_{i_x} \subset \mathcal{O}$. Dans notre cas, si $x \in X$, si V_i est un voisinage de $\varphi_i(x)$ dans Y_i, alors les ensembles

$$\bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(V_j)$$

où J décrit les parties finies de I, définissent une base de voisinages de x dans X.

On munira désormais X de la topologie faible par rapport à la famille $(\varphi_i)_{i\in I}$.

Proposition 1.4.1. *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X, et $x \in X$. Alors, $(x_n)_n$ converge vers x dans (X,τ) si et seulement si , pour tout $i \in I$,*

$$\varphi_i(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_i(x).$$

Démonstration. Le sens direct est trivial car les φ_i sont continues. Montrons donc le sens réciproque et soit O un voisinage de x. D'après les considérations précédentes, on peut supposer O de la forme

$$O = \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(V_j)$$

où $J \subset I$ est un ensemble fini, et V_i un voisinage de $\varphi_i(x)$. Alors $\varphi_i(x) \in V_i$, qui contient un ouvert de τ_i. Puisque pour tout $i \in I$, $\varphi_i(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_i(x)$, alors pour tout $i \in J$, il existe un $N_i \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N_i$, $\varphi_i(x_n) \in V_i$. On choisit $N = \max_{i\in J} N_i$, et alors $x_n \in O$ pour tout $n \geq N$.

□

Proposition 1.4.2. *Soit Z un espace topologique et soit $\psi : Z \longrightarrow X$. Alors, ψ est continue si et seulement si $\varphi \circ \psi : Z \longrightarrow Y_i$ est continue pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Encore une fois, le sens direct est clair. Supposons que pour tout $i \in I$, $\varphi \circ \psi : Z \longrightarrow Y_i$ est continue. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de X. Alors, $\mathcal{O}$ est de la forme

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\substack{J\subset I \\ \text{fini}}} \bigcap_{j\in J} \varphi_j^{-1}(V_j)$$

où V_i un voisinage de $\varphi_i(x)$, et l'union est prise sur certains $J \subset I$. Alors,

$$\psi^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{\substack{J\subset I \\ \text{fini}}} \bigcap_{j\in J} \psi^{-1}(\varphi_j^{-1}(V_j))$$

est une union quelconque d'ouverts en tant qu'intersections finis d'ouverts.

□

1.4.2 Topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique. Pour tout $f \in E'$, on choisit

$$\varphi_f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array} \right.$$

On a maintenant $I = E'$, $Y_i = \mathbb{K}$ pour tout $i \in I = E'$, et $X = E$.

Définition 1.4.1. *On appelle topologie faible de $\sigma(E, E')$ est la topologie la plus petite associée à la famille $(\varphi_f)_{f \in E'}$, i.e la plus petite topologie rendant continues les éléments de E'.*

Remarque. Puisque chaque application $\varphi_f = f$ est une forme linéaire continue, la $\sigma(E, E')$ est la plus petite que la topologie usuelle sur E donnée par sa norme (topologie forte).

Proposition 1.4.3 (séparation)**.** *La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Démonstration. Soient $x_1, x_2 \in E$, avec $x_1 \neq x_2$. Le singleton $\{x_1\}$ est compact, et $\{x_2\}$ est fermé (pour la topologie forte). Il existe donc un hyperplan fermé séparant strictement ces deux singletons : il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Re f(x_1) < \alpha < \Re f(x_2).$$

On pose

$$\mathcal{O}_1 = \{x \in E \,|\, \Re f(x) < \alpha\} = \varphi_f^{-1}(]-\infty, \alpha[+i\mathbb{R}) \in \sigma(E, E'),$$

et

$$\mathcal{O}_2 = \{x \in E \,|\, \Re f(x) > \alpha\} = \varphi_f^{-1}(]\alpha, \infty[+i\mathbb{R}) \in \sigma(E, E').$$

Il est clair que $x_1 \in \mathcal{O}_1$, $x_2 \in \mathcal{O}_2$, et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$.

$\square$

Proposition 1.4.4 (bases de voisinages pour $\sigma(E, E')$)**.** *Soit $x_0 \in E$. Étant donné $\varepsilon > 0$ et $f_1, \dots f_k \in E'$, on note*

$$V(x_0, f_1, \dots, f_k, \varepsilon) = \{x \in E \,|\, \forall i \in [\![1, k]\!] \,,\, |f(x - x_0)| < \varepsilon\}.$$

Cet ensemble est un voisinage de x_0 dans $\sigma(E, E')$. De plus, la famille des

$$(V(x_0, f_1, \dots, f_k, \varepsilon))_{\varepsilon > 0, k \geq 1, f_1, \dots, f_k \in E'}$$

forme un base de voisinage de x_0 dans $\sigma(E, E')$.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ On note $V = V(x_0, f_1, \dots, f_k, \varepsilon)$. Il est clair. que $x_0 \in V$. De plus,

$$V = \cap_{i=1}^{k} \varphi_{f_i}^{-1}(\{z \in \mathbb{K} \,|\, |z - f_i(x_0)| < \varepsilon\}) \in \sigma(E, E')$$

est une intersection finie d'images réciproques d'ouverts de $\sigma(E,E')$, donc est un ouvert dans $\sigma(E,E')$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $x_0 \in U$, où U est un voisinage de x_0, *i.e* que U contient un ouvert $W \in \sigma(E,E')$ tel que $x_0 \in W$. Cet ouvert est de la forme

$$\bigcap_{j\in J} \varphi_{f_j}^{-1}(V_j)$$

où J est un ensemble fini, et V_j un voisinage dans $\mathbb{K}$ de $\alpha_j = f_j(x_0)$. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $j \in J$. On a donc $x_9 \in V \subset W \subset U$.

$$\{z \in \mathbb{K} \,|\, |z - \alpha_i| < \varepsilon\} \subset V_i$$

$\square$

Notation. Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de E convergeant *faiblement* vers un point $x \in E$, on note

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{W} x \quad \text{ou} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x.$$

On dira maintenant que $(x_n)_n$ converge *fortement* vers x si

$$\|x_n - x\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Puisque nous avons montré que la topologie $\sigma(E,E')$ est séparée, on sait que la limite faible, si elle existe, est unique.

Proposition 1.4.5. *Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite, et $x \in E$. On a les propriétés suivantes sur la convergence faible.*

(i) *$(x_n)_n$ converge faiblement vers x si et seulement si $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$ pour tout $f \in E'$.*

(ii) *Si $(x_n)_n$ converge fortement vers x, alors $(x_n)_n$ converge faiblement vers x. La réciproque est fausse en général.*

(iii) *Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, alors $(\|x_n\|_E)_n$ est bornée et*

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_E\,.$$

(iv) *Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, et $(f_n)_n$ converge fortement vers f dans E', alors, $(f_n(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration. (i) Conséquence directe de la proposition 1.4.1.

(ii) D'après le point précédent, pour tout $f \in E'$,

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\|_{E'} \|x_n - x\|_E \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

La réciproque est fausse en général car dans $l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$, si $x_n = (\xi_m^{(n)})_m$ avec $\xi_m^{(n)} = \delta_{n,m}$, alors $\|x_n\|_2 = 1$ donc $(x_n)_n$ ne peut converger simplement vers 0. Pourtant, pour tout $f \in (l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}))'$, on peut écrire

$$f(y) = \sum_{m=1}^{\infty} y_m \overline{\eta_m}$$

où $(\eta_m)_m \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Alors,

$$f(x_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^{(n)} \overline{\eta_m} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui selon le premier point signifie que $(x_n)_n$ converge faiblement vers 0.

(iii) Remarquons que pour tout $f \in E'$, $(f(x_n))_n$ est bornée dans $\mathbb{K}$ (qui est un Banach), car par le principe de ma borne uniforme,

$$\infty > \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'}\leq 1}} |f(x_n)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E$$

où l'égalité est une conséquence du corollaire du théorème de Hahn-Banach sur la norme d'un vecteur.

(iv) D'après *(i)* et *(iii)*,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{E'} \|x_n\|_E + |f(x_n) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Corollaire 1.4.1. *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E, un espace vectoriel normé. Alors, $(x_n)_n$ converge faiblement dans $\sigma(E, E')$ vers $x_\infty \in E$ si et seulement si*

(i) $\sup_{n\geq 0} \|x_n\| < \infty$, *et*

(ii) il existe $D' \subset E'$ un sous-ensemble dense tel que pour tout $f \in D'$,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty).$$

Démonstration. $\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $g \in E'$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in D'$ tel que $\|g - f\|_{E'} < \varepsilon$ par densité de D' dans E'.

Ainsi,

$$\begin{aligned} |g(x_n) - g(x_\infty)| &\leq |g(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_\infty)| \\ &\leq \|g - f\| \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)| + \|g - f\| \|x_\infty\| \\ &\leq \varepsilon \|x_n\| + |f(x_n) - f(x_\infty)| + \varepsilon \|x_\infty\| . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty} |g(x_n) - g(x_\infty)| \leq 2\varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{0\leq n\leq\infty} \|x_n\| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

□

Proposition 1.4.6 (topologie faible en dimension finie). *La topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie forte (issue de la norme) sur une espace vectoriel normé coïncident si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons E de dimension finie. Puisque $\sigma(E, E')$ contient moins d'ouverts que la topologie forte, il suffit de montrer que tout ouvert fort est un ouvert pour $\sigma(E, E')$. Soit $x_0 \in E$, et $\mathcal{O}$ un ouvert de E fort, avec $x_0 \in$. On veut trouver $f_1, \ldots, f_k \in E'$, $\varepsilon > 0$, tels que

$$V = V(x_0, f_1, \ldots, f_k, \varepsilon) \subset \mathcal{O}.$$

Soit $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_E(x_0, r) \subset$. Choisissons $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de E de vecteurs unitaires. Puisque c'est une base, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, l'application $f : x \longmapsto x_j$ qui à tout élément $x \in E$ associe son coefficient devant e_j. C'est une forme linéaire continue, et pour tout $x \in E$,

$$\|x - x_0\|_E = \left\| \sum_{j=1}^{k} f_j(x - x_0) e_j \right\|_E \leq \sum_{j=1}^{k} |f_j(x - x_0)| \, \|e_j\|_E = \sum_{j=1}^{k} |f_j(x - x_0)|.$$

On en déduit que si $x \in V$, $\|x - x_0\|_E \leq k\varepsilon$. Soit donc $x \in V$, on peut choisir en particulier $\varepsilon = r/k$ et en déduire que $x \in \mathcal{B}_E(x_0, r) \subset \mathcal{O}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons E de dimension infinie et montrons que les deux topologies ne coïncident pas. Soit S la sphère unité de E, *i.e*,

$$S = \{x \in E \mid \; \|x\|_E = 1\}.$$

C'est un fermé fort. Pour atteindre le résultat, nous allons montrer que $0_E \in \overline{S}^{\sigma(E,E')}$. Soit U un voisinage faible de 0 : il existe $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $f_1, \ldots, f_k \in E'$ tels que

$$V(0, f_1, \ldots, f_k, \varepsilon) \subset U,$$

i.e que

$$\{x \in E \,|\, \forall i \in [\![1, k]\!]\,, \, |f(x)| < \varepsilon\}.$$

L'application $\Phi : E \to \mathbb{K}^k$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_k(x))$ est linéaire et

$$\ker \Phi = \bigcap_{i=1}^{k} \ker f_i.$$

Par ailleurs, $\dim(\ker \Phi) + \dim(\operatorname{Im} \Phi) = \dim E = \infty$. Or, $\operatorname{Im} \Phi$ est dimension finie, donc $\ker \Phi$ est dimension infinie. En particulier, il n'est pas réduit à $\{0_E\}$ donc il existe $x \in E \backslash \{0_E\}$ tel que $f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$,

$$|f_i(\lambda x)| = 0 < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in V(0, f_1, \ldots, f_k, \varepsilon) \subset U$. En particulier, choisir $\lambda = 1/\|x\|_E$ montre que V intersecte S. Ainsi, tout voisinage faible de 0 intersecte S, donc $0_E \in \overline{S}^{\sigma(E,E')}$. On déduit que les fermetures forte et faible de S ne coïncident pas.

□

Remarques.

— Dans cette démonstration, on montre aussi que les ouverts pour la topologie faible contiennent des droites quand $\dim E = \infty$.

— $\sigma(E, E')$ est strictement plus petite que la topologie forte lorsque $\dim E = \infty$.

En fait, on peut être plus précis quant à la fermeture faible de la sphère unité en dimension infinie.

Proposition 1.4.7 (fermeture faible de la sphère)**.** *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Soit $\mathcal{B}_E = \{x \in E \,|\, \|x\|_E \leq 1\}$ la boule unité fermée de E. Alors, $\mathcal{B}_E$ est l'adhérence faible de la sphère unité de E, i.e que*

$$\mathcal{B}_E = \overline{S}^{\sigma(E,E')}.$$

Démonstration. Montrons que $\mathcal{B}_E \subset \overline{S}^{\sigma(E,E')}$. Soit $x_0 \in V$, avec V un voisinage faible de x_0. Supposons que V est de la forme

$$V = V(x_0, f_1, \ldots, f_k, \varepsilon) = \{x \in E \ |\forall i \in [\![1, k]\!]\,, |f_i(x - x_0)| < \varepsilon\}$$

avec $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $f_1, \ldots, f_k \in E'$. On ma montrer qu'il existe un $y_0 \in E$ non nul tel que $f_1(y_0) = \cdots = f_k(y_0)$. Soit l'application $\Phi : E \to \mathbb{K}^k, x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_k(x))$, son noyau est l'intersection des noyaux des f_i et son image est dimension finie. Puisque E est dimension infinie, $\ker \Phi$ l'est aussi et n'est donc pas réduit à $\{0_E\}$. Ainsi, cet élément $y_0 \in E$ non nul existe, mais on a nécessairement $x_0 \in V$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \|x_0 + ty_0\|_E$. Cette application est continue sur $\mathbb{R}_+$, et

$$g(0) = \|x_0\|_E < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} g(t) = \infty.$$

Il existe donc $t_0 > 0$ tel que $\|x_0 + t_0y_0\|_E = 1$, donc $x_0 + t_0y_0 \in S \cap V$. Ainsi, $S \subset \mathcal{B}_E \subset \overline{S}^{\sigma(E,E')}$.

Remarquons maintenant que $\mathcal{B}_E$ est un fermé faible. En effet,

$$\mathcal{B}_E = \bigcap_{\substack{f\in E' \\ \|f\|_{E'}\leq 1}} \{x \in E \,|\, |f(x)| \leq 1\}$$

ce qui montre que c'est une intersection quelconque de fermés faibles. Cette affirmation appliquée à la chaîne d'inclusion $S \subset \mathcal{B}_E \subset \overline{S}^{\sigma(E,E')}$ nous permet de conclure.

□

Remarque. La boule ouverte $\mathcal{B}_E(0_E, 1)$ n'est pas faible ouverte lorsque E est dimension infinie. En effet, si elle l'était, $\mathcal{B}_E(0_E, 1)^c = \{x \in E \,|\, \|x\|_E \geq 1\}$ serait un fermé faible , donc $S = \mathcal{B}_E \cap \mathcal{B}_E(0, 1)^c$ le serait aussi, ce que nous avons montré être faux.

Rappel. Chaque fermé faible est un fermé. L'inverse est faux en dimension infinie. On a cependant le théorème suivant.

Théorème 1.4.1 (Mazur)**.** *Soit $C \subset E$ un convexe non vide. Alors C est fermé pour la topologie usuelle si et seulement si C est faiblement fermé.*

Démonstration. La sens réciproque est clair en vertu du rappel précédent. Pour le sens direct, nous allons montrer que C^c est faible ouvert. Soit $x_0 \in E \backslash C$. D'après la seconde forme du théorème de HAHN-BANACH géométrique, il existe un hyperplan fermé séparant strictement le convexe fortement fermé C et $\{x_0\}$ qui est un convexe fortement compact. En d'autres termes, il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $y \in C$,

$$\Re f(x_0) < \alpha < \Re f(y).$$

Soit $V = \{x \in E \mid \ \Re f(x) < \alpha\} = (\Re f)^{-1}(]-\infty, \alpha[)$. Ainsi, $x_0 \in V$, et $V \cap C \neq \varnothing$. Ainsi, $V \subset C^c$, et V est un élément de la base de voisinages autour de x_0 dans $(E, \sigma(E, E'))$.

$\square$

Corollaire 1.4.2 (MAZUR). *Soit E un espace vectoriel normé, $C \subset E$ un convexe fermé, $(x_n)_n$ une suite d'éléments de C convergeant faiblement vers un élément $x \in E$. Alors $x \in C$, et il existe une suite $(y_N)_N$ convergeant fortement vers x telle que y_N soit combinaison linéaire convexe d'éléments de la suite $(x_n)_{n \geq N}$.*

Démonstration. Supposons que $x \in C$. Selon la seconde forme du théorème de HAHN-BANACH avec C convexe fermé et $\{x\}$, il existe $f \in E'$ telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \Re f(x_n) < \Re f(x).$$

Or, $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x)$. On a donc une contradiction, et $x \in C$. Soit $N \in \mathbb{N}$, et soit

$$C_N = \left\{ \sum_{j=N}^{m} t_j x_j \,\middle|\, m \geq N,\, t_N, \ldots, t_m \geq 0,\, t_N + \cdots + t_m = 1 \right\}.$$

Alors, $\overline{C_N}$ est fermé en norme, est convexe, et pour tout $n \geq N$, $x_n \in C_N$. On en déduit que $x \in \overline{C_N}$. Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on peut choisir $y_N \in C_N$ tel que $\|x - y_N\|_E \leq 1/N$.

$\square$

Remarque. Une forme équivalente de ce corollaire est la suivante : si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers un $x \in E$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \ldots, t_N \geq 0$ vérifiant $t_1 + \cdots + t_N = 1$, et tels que

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{N} t_j x_j \right\| < \varepsilon.$$

Corollaire 1.4.3 (inférieurement semi-continue)**.** *Soit $\varphi : E \longrightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction convexe est inférieurement semi-continue pour la topologie forte, i.e que pour toute suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant fortement vers x, on a*

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

*Alors, φ est inférieurement semi-continue pour la topologie **faible**, i.e que pour toute suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers x, on a aussi*

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Lemme 1.4.2. *Une application $\varphi : E \longrightarrow]-\infty, \infty]$ est fortement (resp. faiblement) inférieurement semi-continue si et seulement si , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles de niveaux*

$$A_\lambda = \{x \in E \,|\, \varphi(x) \leq \lambda\}$$

sont fortement (resp. faiblement) fermés.

Démonstration. Supposons φ est fortement inférieurement continue. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de E telle que $x_n \in A_\lambda$ pour tout $n \geq 0$, convergeant fortement vers x. Alors,

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) \leq \lambda,$$

donc $x \in A_\lambda$ et A_λ est fortement fermé. Inversement, supposons que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, A_λ n'est pas fermé, et on suppose que φ n'est pas inférieurement semi-continue en point $x \in E$. Alors, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E convergeant fortement vers x et telle que

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) < \varphi(x).$$

Quitte à prendre une sous-suite de $(x_n)_n$, on peut supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(x_n) < \lambda < \varphi(x).$$

Donc $x_n \in A_\lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $(x_n)_n$ converge fortement vers x et A_λ est fermé, donc $x \in A_\lambda$, ce qui signifie que $\varphi(x) \leq \lambda$. C'est contradictoire.

□

On montre désormais le corollaire précédent.

Démonstration. Puisque φ est convexe, A_λ est fermé. De plus, φ étant inférieurement semi-continue, alors A_λ est fermé. On en déduit que A_λ est fermé faiblement.

□

Exemple. Soit l'application $\varphi : x \longmapsto \|x\|$ est convexe, continue fortement. Ainsi, φ est faiblement inférieurement semi-continue, $i.e$ que pour toute suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant faiblement vers un $x \in E$, alors

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| .$$

Proposition 1.4.8 (continuité faible-forte)**.** *Soient E et F deux espaces de* BANACH*, et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors, T est continu fort-fort si et seulement si T est continu faible-faible.*

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Montrons que pour tout $f \in F'$, la composée $f \circ T : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue. Puisque $f \circ T$ est élément de E', elle est automatiquement faiblement continue.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $T : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (F, \sigma(F, F'))$ continue. Montrons que $T : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (F, \sigma(F, F'))$ est continue. On utilise le principe du graphe fermé : soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E telle que

$$(x_n, Tx_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{E\times F}} (x, y),$$

et montrons que $y = Tx$. Puisque $(x_n)_n$ converge fortement vers x, donc converge faiblement vers x. Par continuité faible-faible de T, $(Tx_n)_n$ converge faiblement vers Tx. De plus, $(Tx_n)_n$ converge fortement vers y, donc $(Tx_n)_n$ converge faiblement vers y. Puisque la topologie faible est séparée, on a unicité de la limite et donc $y = Tx$.

□

Corollaire 1.4.4. *Soit E un espace de* BANACH*, et $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. Alors, f est continue pour la topologie de la norme de E si et seulement si elle est continue pour la topologie faible de E.*

1.4.3 Topologie faible-* $\sigma(E', E)$

On note encore E' le dual topologique d'un espace vectoriel normé. Nous avons vu deux topologies sur E' : la topologie induite par la norme de E, et la topologie faible $\sigma(E', E'')$, où E'' est le bidual topologique de E. Dans cette section, nous introduirons une troisième topologie et ce en partant de la suivante : E peut être plongé *via* l'application canonique dans son bidual E'', car $J_E : E \longrightarrow E''$ est une injection. Ainsi, E peut-être vu comme un sous-espace vectoriel de E''.

Pour tout $x \in E$, notons $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{K}$ le morphisme d'évaluation, $i.e$ que pour tout $f \in E'$, $\varphi_x(f) = f(x)$.

Définition 1.4.2. *On appelle topologie faible-* $\sigma(E', E)$ sur E' la plus petite topologie sur E' rendant continues les applications de la famille $(\varphi_x)_{x\in E}$.*

Remarques.

- Pour revenir à la forme évoquée en sous-section 1.4.1, on a $I = E$, $Y_i = \mathbb{K}$, et $X = E'$.
- Puisque $E \hookrightarrow E''$, il est clair que $\sigma(E', E)$ contient moins d'ouvert que $\sigma(E', E'')$, qui à son tour a moins d'ouverts que la topologie usuelle sur E'.

Proposition 1.4.9 (séparation de la topologie faible-*). *La topologie faible-* est séparée.*

Démonstration. Soient $f_1, f_2 \in E'$ tels que $f_1 \neq f_2$. Alors, il existe $x \in E$ tel que $f_1(x) \neq f_2(x)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\Re f_1(x) \neq \Re f_2(x)$. En effet, c'est toujours le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que ce n'est pas le cas alors $\Im f_1(x) \neq \Im f_2(x)$, et l'on considère $-ix$ plutôt que x. Par symétrie des rôles, on peut supposer que $\Re f_1(x) < \Re f_2(x)$. Soit $\alpha \in]\Re f_1(x), \Re f_2(x)[$ et

$$\mathcal{O}_1 = \{f \in E' \,|\, \Re f(x) < \alpha\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_2 = \{f \in E' \,|\, \Re f(x) > \alpha\}.$$

On a donc $\mathcal{O}_1 = \varphi_x^{-1}(]-\infty, \alpha[+i\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_2 = \varphi_x^{-1}(]\alpha, \infty[+i\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont éléments de $\sigma(E', E)$, tels que $(f_1, f_2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \varnothing$.

□

Proposition 1.4.10 (bases de voisinages pour $\sigma(E', E)$). *Soit $f_0 \in E'$. Étant donné $\varepsilon > 0$ et $x_1, \dots x_k \in E'$, on note*

$$W(f_0, x_1, \dots, x_k, \varepsilon) = \{f \in E' \,|\, \forall i \in [\![1, k]\!],\, |(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon\}.$$

Cet ensemble est un voisinage de f_0 dans $\sigma(E', E)$. De plus, la famille des

$$(W(f_0, x_1, \dots, x_k, \varepsilon))_{\varepsilon > 0, k \geq 1, x_1, \dots, x_k \in E'}$$

forme un base de voisinage de f_0 dans la topologie $\sigma(E', E)$.

Démonstration. La démonstration est une transcription de la démonstration de la proposition 1.4.4.

□

Exercice. Montrer qu'un voisinage W de cette forme est convexe.

Notation. Note $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{W-*} f$ si une suite $(f_n)_n$ d'éléments de E' converge pour la topologie faible-* $\sigma(E, E')$ vers un élément $f \in E'$.

Proposition 1.4.11 (convergence W-*). *Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de E'. On a les propriétés suivantes.*

(i) *$(f_n)_n$ converge faiblement-* vers x si et seulement si $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in E$.*

(ii) *Si $(f_n)_n$ converge en norme de E' vers f, alors $(f_n)_n$ converge faiblement-* vers f. Si $(f_n)_n$ converge faiblement (dans $\sigma(E', E'')$) vers f, alors $(f_n)_n$ converge faiblement-* vers f.*

(iii) *Si $(f_n)_n$ converge faiblement-* vers f, alors $(\|f_n\|_{E'})_n$ est bornée et*

$$\|f\|_{E'} \leq \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|_{E'}.$$

(iv) *Si $(f_n)_n$ converge faiblement-* vers f, et $(x_n)_n$ converge fortement vers x, alors, $(f_n(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.*

Démonstration. C'est une transcription de la proposition 1.4.5.

□

Remarque. Si E est de dimension finie, alors les trois topologies sur E' coincïdent car $J_E : E \longrightarrow E''$ est surjective (puisque les dimensions de E et E'' sont égales). Alors, $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$ est la topologie usuelle de E'.

Proposition 1.4.12 (continuité faible-*)**.** *Soit E un espace vectoriel normé, et soit $U : E' \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire sur E'. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) U est continue pour la topologie faible- $\sigma(E', E)$.*

(ii) $U \in \mathrm{Im}(J_E)$: il existe $x \in E$ tel que $U(f) = f(x)$ pour tout $f \in E'$.

Démonstration. L'implication $(ii) \implies (i)$ est clair car les formes linéaires $f \longmapsto f(x)$ sont faiblement-* continues par construction de la topologie faible-*. Montrons maintenant $(i) \implies (ii)$. Supposons que u est faiblement-* continue. Alors,

$$V := \{f \in E' \mid \ |u(f)| < 1\}$$

est un ouvert faible-*, et contient $0_{E'}$. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$, et $x_1, \dots, x_k \in E$ tels que

$$W := W(0, x_1, \dots, x_k, \varepsilon) = \{f \in E' \,|\, \forall j \in [\![1, k]\!] \,, |f(x_j)| < \varepsilon\} \subset V.$$

En particulier, si $(f(x_1), \dots, f(x_k)) = (0, \dots, 0)$ alors $U(f) = 0$. En effet, si $(f(x_1), \dots, f(x_k)) = 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f(x_1), \dots, \lambda f(x_k)) = 0$. Ainsi, $\lambda W \subset V$, donc $|u(\lambda f)| < 1$. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda |u(f)| < 1$ ce qui signifie que $|u(f)| = 0$. Ainsi, on peut définir correctement une forme linéaire sur $\mathbb{K}^k$ en posant pour tout $f \in E'$,

$$(f(x_1), \dots, f(x_k)) = u(f).$$

On a défini l sur un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^k$, mais on peut l'étendre sur tout $\mathbb{K}^k$. Ainsi, si $l(y)$ s'écrit pour tout $y \in \mathbb{K}^k$ sous la forme

$$l(y) = \sum_{j=1}^{k} c_j y_j.$$

Ainsi,

$$u(f) = \sum_{j=1}^{k} c_j f(x_j) = f(x)$$

où $x = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k$.

□

Aparté. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. Pour la topologie de la norme de E, f est continue *si et seulement si* $\ker f$ est fermé. Cela donne lieu à une troisième condition équivalente à (i) et (ii) dans le théorème précédent.

(iii) $\ker U$ est faiblement-* fermé en tant que sous-espace vectoriel de E'.

Cette propriété ne servira pas dans ce cours [3]

Proposition 1.4.13. *Soit H un hyperplan affine de E'* ***fermé pour la topologie faible-**** *$\sigma(E', E)$. Alors, il existe $x_0 \in E$ non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$H = \{f \in E' \mid \Re f(x_0) = \alpha\}.$$

Démonstration. Soit H un hyperplan affine de E'. Il existe $u : E' \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$H = \{f \in E' \,|\, \Re u(f) = \alpha\}.$$

Supposons dans cette démonstration que E est un espace vectoriel réel [4]. Puisque H est faiblement-* fermé, H^c est faiblement-* ouvert. Soit donc $f_0 \in H^c$: il existe $\varepsilon > 0$ et $x_1, \ldots, x_k \in E$ tels que

$$W := W(f_0, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon) = \{f \in E' \,|\, \forall j \in [\![1, k]\!]\,,\, |(f - f_0)(x_j)| < \varepsilon\}$$

est contenu dans H^c. Alors, $W \cap H = \varnothing$. Puisque $f_0 \notin H$, $u(f_0) \neq \alpha$. Supposons par exemple que $u(f_0) < \alpha$, et montrons que pour tout $f \in W$, $u(f) < \alpha$. Supposons le contraire : il existe $f_1 \in W$ tel que $U(f_1) \geq \alpha$. L'application $t \longmapsto u(tf_1 + (1-t)f_0)$ est continue sur $[0, 1]$ avec une valeur en 0 strictement plus petite que α, et une valeur en 1 supérieure à α. Il existe donc $g \in [f_0, f_1]$ (segment de E') tel que $g \in H$. Puisque W est convexe (exercice), $[f_0, f_1] \subset W$ donc $g \in W$ ce qui est absurde. Ainsi, $u(f) < \alpha$ pour tout $f \in W$. Remarquons que

$$W - f_0 = \{f - f_0 \,|\, f \in W\} = \{g \in E' \,|\, \forall j \in [\![1, k]\!]\,,\, |g(x_j)| < \varepsilon\}$$

(en vertu de la définition du voisinage W), donc $W - f_0$ est un voisinage faible-* de $0_{E'}$. Alors, pour tout $g \in W - f_0$, $u(g) = u(g + f_0) - u(f_0) < \alpha - u(f_0)$. On en déduit que $|u(g)| < \alpha - u(f_0)$ (remarquons que la démonstration dans le cas où $u(f_0) > \alpha$ aboutirait à $|u(g)| < u(f_0) - \alpha$). Ainsi, pour tout $f_0 \in H^c$, il existe un voisinage faible-* de $0_{E'}$ contenu dans l'image réciproque par u de l'intervalle ouvert $]-(\alpha - u(f_0)), \alpha - u(f_0)[$. Ainsi, u est faible-* continue en $0_{E'}$ et est une forme linéaire, donc u est faible-* continue. On peut donc conclure grâce à la proposition 1.4.12.

□

Remarques.

— Supposons que E n'est pas réflexif. Soit alors $u \in E'' \backslash J_E(E)$. On a que

$$H = \ker u = \{f \in E' \,|\, u(f) = 0\}$$

est un fermé pour la topologie forte, donc est fermé dans la topologie $\sigma(E', E'')$, mais pas fermé dans $\sigma(E', E)$

— Il y a deux types de convexes fermés : les convexes fortement fermés (de manière équivalente $\sigma(E', E'')$ fermé), et les convexes faible-* de $\sigma(E', E)$.

3. Probablement, selon les dires de M. Gradinaru.
4. Le cas complexe s'écrit de la même manière.

Proposition 1.4.14 (fermeture faible-* de la sphère). *Soit E un espace vectoriel de dimension infinie, soit $S' = \{f \in E' \mid \|f\|_{E'} = 1\}$, et $\mathcal{B}_{E'} = \{f \in E \mid \|f\|_{E'} \leq 1\}$. Alors, $\mathcal{B}_{E'} = \overline{S'}^{\sigma(E',E)}$.*

Théorème 1.4.2 (Goldstine). *Soit E un espace vectoriel normé. Alors $J_E(\mathcal{B}_E)$ est dense dans $\mathcal{B}_{E''}$ pour la topologie faible-* $\sigma(E'', E')$ de E''. Autrement dit,*

$$\overline{J(\mathcal{B}_E)}^{\sigma(E'',E)} = \mathcal{B}_{E''}.$$

Démonstration. Soit $u_0 \in \mathcal{B}_{E''}$, et soit V un voisinage de u_0 pour la topologie $\sigma(E'', E)$. Montrons que $V \cap J(\mathcal{B}_E) \neq \varnothing$. On suppose en particulier que V est sous la forme

$$V = V(u_0, \varepsilon, f_1, \ldots, f_k) = \{u \in E'' \mid |(u - u_0)(f_j)| < \varepsilon, \forall i \in [\![1, k]\!]\}.$$

Soit $x_\varepsilon \in \mathcal{B}_E$. Alors, $J(x_\varepsilon) \in V$ *si et seulement si* pour tout $j \in [\![1, k]\!]$.

$$|(J(x_\varepsilon) - u_0)(f_j)| < \varepsilon.$$

Or, $|(J(x_\varepsilon) - u_0)(f_j)| = |J(x_\varepsilon)f_j - u_0(f_j)| = |f(x_\varepsilon) - u_0(f_j)|$. Soit $\alpha_j = u_0(f_j)$. Alors, pour tout $(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \mathbb{K}^k$, on a

$$\left|\sum_{j=1}^k \beta_j \alpha_j\right| = \left|\sum_{j=1}^k \beta_j u_0(f_j)\right| = \left|u_0\left(\sum_{j=1}^k \beta_j f_j\right)\right|.$$

Or,

$$\left|u_0\left(\sum_{j=1}^k \beta_j f_j\right)\right| \leq \|u_0\|_{E''} \left\|\sum_{j=1}^k \beta_j f_j\right\|_{E'} \leq \left\|\sum_{j=1}^k \beta_j f_j\right\|_{E'}.$$

Selon le théorème de Helly, il existe $x_\delta \in E$ avec $\|x_\delta\| < 1 + \delta$. On peut donc choisir x_ε dans $\mathcal{B}_E$ tel que $f_j(x_\varepsilon) = \alpha_j$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$.

□

Remarque. Supposons E de Banach. Alors $J(\mathcal{B}_E)$ est fermé dans $\mathcal{B}_{E''}$ pour la topologie forte. Si $(u_n)_n = (J(x_n))_n \in J(E)^{\mathbb{N}}$ converge vers $u \in E''$ alors $(x_n)_n$ est de Cauchy (car J est une isométrie) et donc $(x_n)_n$ converge vers un certain $x \in E$. Alors, $u = J(x)$. Ainsi, $J(\mathcal{B}_E)$ n'est jamais dans dense $\mathcal{B}_{E''}$ pour la topologie forte, sauf si $J(\mathcal{B}_E) = \mathcal{B}_{E''}$, *i.e* si E est réflexif.

Théorème 1.4.3 (Banach-Alaoglu). *Soit E un espace vectoriel normé. Alors, la boule unité $\mathcal{B}_{E'}$ de l'espace dual E' est faiblement-* compacte.*

Rappel (théorème de Tykhonov). Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques compacts. Alors, le produit

$$K = \prod_{i\in I} K_i$$

est un compact lorsqu'il est muni de la topologie produit (c'est-à-dire la plus petite topologie rendant continues les projections en les coordonnées).

Démonstration. Dans notre cas, $I = E$ et $K_x = [-\|x\|_E, \|x\|_E] \subset \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$. On a

$$K = \prod_{x\in E} K_x = \{f \in E^{\mathbb{R}} \,|\, |f(x)| \leq \|x\|_E, \forall x \in E\}.$$

Soit $\pi_x : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$ où $x \in E$. La topologie produit est la plus petite rendant continues toutes les applications π_x. On peut voir que $\mathbb{R}^E$ avec cette topologie est un espace séparé. Soit $L = E^*$. L'intersection de L et K est exactement $\mathcal{B}_{E'}$. La topologie faible-* sur $\mathcal{B}_{E'} = L \cap K$ est la topologie induite par la topologie produit sur $\mathbb{R}^E$. De plus, L est fermé par rapport à la topologie produit. En effet, soit $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et $\varphi_{x,y} : \mathbb{R}^E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x) - f(y)$ et $\psi_{x,\lambda} : \mathbb{R}^E \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \lambda f(x)$. Par définition de la topologie produit, ces applications sont continues donc

$$L = \left(\bigcap_{x,y\in E} \varphi_{x,y}^{-1}(\{0\})\right) \cap \left(\bigcap_{(x,\lambda)\in E\times\mathbb{R}} \psi_{x,\lambda}^{-1}(\{0\})\right)$$

est fermé. Puisque K est un compact de $\mathbb{R}^E$ (par le théorème de Tykhonov) muni de la topologie séparée du produit, donc $\mathcal{B}_{E'} = L \cap K$ est un compact pour la topologie produit.

□

Remarque. Le théorème de Banach-Alaoglu donne des compacts pour la topologie faible-*. Peut-on utiliser des suites ? On a besoin de séparabilité pour trouver une métrique adaptée.

Proposition 1.4.15 (métrisabilité de la topologie faible-*)**.** *E est un espace vectoriel normé séparable si et seulement si la topologie faible-* $\sigma(E', E)$ sur $\mathcal{B}_{E'}$ est métrisable.*

Démonstration. Supposons E séparable. Il existe A une partie dénombrable dense dans E et notons $D = A \cap \mathcal{B}_E$. Puisque D est dénombrable, notons $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Soient $f, g \in \mathcal{B}_{E'}$. On pose

$$d(f,g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|(f-g)(x_n)|}{2^n}.$$

— D'abord, D est dense dans $\mathcal{B}_E$.

— Montrons que d est métrique sur $\mathcal{B}_{E'}$. L'application est bien définie cette métrique est majorée par 4. La symétrie est clair et l'inégalité triangulaire aussi facile. Pour la séparation, soit $f, g \in \mathcal{B}_{E'}$ tels que $d(f,g) = 0$. Soit $y \in E$, si $\|y\|_E \leq 1$, il existe $(y_n)_n$ une suite d'éléments de D tels que $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Alors,

$$(f-g)(y) = (f-g)\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} (f-g)(y_n) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in E$ de norme inférieure ou égale à 1, on a que $\|f-g\|_{E'} = 0$ donc $f = g$.

— Soit τ la topologie induite par d et montrons que $\tau \subset \sigma(E', E)$. Soit $f_0 \in \mathcal{B}_{E'}$ et $\mathcal{O} \in \tau$ un ouvert contenant f_0. Il existe alors $\mathcal{B}_d(f_0, r) \subset \mathcal{O}$ une boule ouverte. Soit $f \in V$, alors,

$$d(f, f_0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|(f - f_0)(x_n)|}{2^n} = \sum_{n=0}^{k} \frac{|(f - f_0)(x_n)|}{2^n} + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|(f - f_0)(x_n)|}{2^n}}_{\leq 1/2^k}.$$

Soit $\varepsilon = r/4$, on a alors

$$d(f, f_0) < 2\varepsilon + \frac{1}{2^k} < r.$$

Si de plus k est un entier tel que $1/2^k < r/2$ alors avec ce choix, $V(f_0, \varepsilon, x_0, \dots, x_k) \subset \mathcal{B}_d(f_0, r) \subset \mathcal{O}$.

— Montrons que $\sigma(E', E) \subset \tau$. Soit $f_0 \in \mathcal{B}_{E'}$, et $\mathcal{O}$ un ouvert faible-* de $\mathcal{B}_{E'}$ contenant f_0. Il existe $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, et $y_1, \dots, y_k \in E$ tels que $V = V(f_0, \varepsilon, y_1, \dots, y_k) \subset \mathcal{O}$. On cherche $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_d(f_0, r) \subset V$. Soit $m = \max_{j=1}^k \|y_j\|$. Alors, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, on a que $y_j/m \in \mathcal{B}_E$. Puisque D est dense dans $\mathcal{B}_E$, pour tout $\eta > 0$ et $j \in [\![1, k]\!]$, il existe $n_j \in \mathbb{N}$ tel que $\left\|x_{n_j} - \frac{y_j}{m}\right\| < \varepsilon$. Soit. $r > 0$ tel que pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $2^{n_j} r < \eta$. Alors, si $f \in \mathcal{B}_d(f_0, r)$, on a

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|(f - f_0)(x_n)|}{2^n} < r$$

donc pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, on a $\frac{|(f - f_0)(x_n)|}{2^n} < r$. Donc

$$|(f - f_0)(y_j)| = m|(f - f_0)(y_j/m)| \leq \underbrace{m|(f - f_0)(x_{n_j})|}_{\leq m 2^{n_j} r < \eta} + \underbrace{m|(f - f_0)(x_{n_j} - y_j/m)|}_{2m\eta}.$$

Ainsi, $|(f - f_0)(y_j)| < (2m+1)\eta$. Le réel η étant arbitraire, on peut choisir η tel que $(2m+1)\eta < \varepsilon$ et alors $f \in V$. Autrement dit, $\mathcal{B}_d(f_0, r) \subset V \subset \mathcal{O}$.

— Inversement, supposons que la topologie $\sigma(E', E)$ sur $\mathcal{B}_{E'}$ est métrisable. Soit d une métrique correspondante. Montrons que E est séparable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{B}_d(0, 1/n) = \{f \in \mathcal{B}_{E'} \mid d(0, f) < 1/n\}$. Soit V_n un voisinage de 0 dans $\sigma(E', E)$ tel que $V_n \subset \mathcal{B}_d(0, 1/n)$. Il existe $\varepsilon_n > 0$ et F_n un ensemble fini de E tel que

$$V_n = \{f \in E' \mid \forall x \in F_n,\ |f(x)| < \varepsilon_n\}.$$

Soit alors $F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$. C'est ensemble est dénombrable. Montrons que F engendre un sous-espace dense de E. Soit $f \in E'$ tel que $f_{|F} = 0$. Pour tout $x \in F$, $f(x) = 0$ donc $f \in V_n \subset \mathcal{B}_d(0, 1/n)$ pour tout $n \geq 1$. Alors, $f \in \bigcap_{n \geq 1} V_n \subset \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{B}_d(0, 1/n) = \{0\}$. Ainsi, $f = 0$. On en déduit que $\mathrm{Vect}(F)$ est dense dans E. On le rend dénombrable en prenant les combinaisons linéaires à coefficients rationnels.

$\square$

1.4.4 Banach-Alaoglu, Kakutani et Al

Corollaire 1.4.5 (compacité faible-*). *Soit E un espace de* Banach *séparable, et soit $K \subset E'$. Sont équivalents.*

(i) K est faiblement- compact.*

(ii) K est borné et faiblement- fermé.*

(iii) K est séquentiellement faiblement- compact (chaque suite d'éléments de K a une sous-suite faiblement-* convergente de limite dans K).*

(iv) K est borné et séquentiellement faiblement- borné (si $f \in E'$ est limite faible-* d'une suite d'éléments de K alors $f \in K$).*

Remarque. Même sans hypothèse de séparabilité, on a toujours $(i) \iff (ii)$, $(ii) \iff (iv)$, et $(iii) \implies (iv)$.

Aparté autour de Banach-Steinhaus. Soient E et F des espaces de Banach, et soit $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(E, F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $x \in E$, $(T_n x)_n$ converge.

(ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ et il existe $T \in \mathcal{B}(E, F)$ tel que $(T_n)_n$ converge simplement vers T avec

$$\|T\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|T_n\|.$$

(iii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ et il existe $D \subset E$ un sous-ensemble dense tel que $(T_n x)_n$ est de Cauchy dans F pour tout $x \in D$.

Aparté autour de Helly. Soit E un espace vectoriel normé, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \ldots, f_n \in E'$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in \mathcal{B}_E$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$|f_j(x_\varepsilon) - \alpha_j| < \varepsilon,$$

si et seulement si pour tout $(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \mathbb{K}^n$,

$$\left| \sum_{j=1}^n \beta_j \alpha_j \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^n \beta_j f_j \right\|.$$

Théorème 1.4.4 (Kakutani). *Soit E un espace de* Banach. *Alors, E est réflexif si et seulement si $\mathcal{B}_E$ est faiblement compact.*

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons E réflexif, on a alors $E'' = J(E)$ et $\mathcal{B}_{E''} = J(\mathcal{B}_E)$ (par la propriété d'isométrie). D'après Banach-Alaoglu, on sait que $\mathcal{B}_{E''}$ est faiblement-* compacte. Si l'on montre que

$$J^{-1}(E'', \sigma(E'', E')) \longrightarrow (E, \sigma(E', E))$$

est continue, on pourra conclure. Pour tout $f \in E'$, l'application $E'' \to \mathbb{K}$, $u \mapsto (\varphi_f \circ J^{-1})(u) = f(J^{-1})(u)$ est $\sigma(E'', E)$ continue. En effet, $f(J^{-1})(u) = u(f)$ donc l'application en question est bien continué pour $\sigma(E'', E')$ en vertu de la proposition 1.4.2. Ainsi, $\mathcal{B}_E = J^{-1}(\mathcal{B}_{E''})$ est faiblement compacte.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\mathcal{B}_E$ faiblement compacte. Encore une fois, on peut voir que

$$J : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (E'', \sigma(E'', E'))$$

est continue car pour tout $f \in E'$, l'application $\varphi_j \circ J : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto J(x)(f) = f(x)$ est continue par rapport à $\sigma(E, E')$. Ainsi, $J(\mathcal{B}_E)$ est compact dans $\sigma(E'', E')$. D'après le théorème de Goldstine, $\overline{J(\mathcal{B}_E)}^{\sigma(E'',E')} = \mathcal{B}_E$. Or, $J(\mathcal{B}_E)$ est un fermé pour $\sigma(E'', E')$ car compact. On conclut que $J(\mathcal{B}_E) = \mathcal{B}_{E''}$ et alors $J(E) = E''$.

□

Corollaire 1.4.6 (sous-espace vectoriel réflexif)**.** *Soit E un espace de* Banach *réflexif, et soit $G \subset E$ une sous-espace vectoriel fermé de E. Alors, G est est réflexif.*

Démonstration. Sur G, on dispose de deux topologies : celle induite par $\sigma(E, E')$ et sa propre topologie faible $\sigma(G, G')$ Ces deux topologies sont les mêmes d'après Hahn-Banach car chaque forme linéaire bornée (continue) sur G est la restriction d'une forme linéaire bornée sur E. Nous allons montrer que la boule $\mathcal{B}_G$ est compacte pour $\sigma(G, G')$ ($i.e$ qu'elle est compact pour la topologie trace de $\sigma(E, E')$ sur G). E est réflexif donc $\mathcal{B}_E$ est faiblement compact et puisque G est un convexe fermé fort, on en déduit d'après Mazur que G est un convexe fermé faible. Ainsi, $\mathcal{B}_G = \mathcal{B}_E \cap G$ et un bien un compact faible de $\sigma(G, G')$.

□

On rappelle ici un résultat que nous avons déjà démontré. Nous en proposons une nouvelle démonstration utilisant les notions de topologie faible.

Corollaire 1.4.7. *Soit E un espace de* Banach*. E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ D'après Banach-Alaoglu, puisque E est réflexif, $\sigma(E', E)$ et $\sigma(E', E'')$ coïncident. Ainsi, $\mathcal{B}_{E'}$ est compact pour $\sigma(E', E'')$ alors d'après Kakutani, E' est réflexif.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons E' réflexif, alors E'' est réflexif et $J(E) \subset E''$ est un fermé. Ainsi, $J(E)$ est réflexif donc E est réflexif car J^{-1} est un isomorphisme isométrique de $J(E)$ vers E.

□

Corollaire 1.4.8 (convexe fermé borné)**.** *Soit E un espace* Banach *réflexif et soit $K \subset E$ un convexe fermé borné. Alors, K est faiblement compact.*

Démonstration. Soit K un convexe fermé dans E. Puisque E est de Banach réflexif, K est aussi un convexe faiblement fermé. Puisque K est borné, il exist $R > 0$ tel que $K \subset \mathcal{B}_E(0, R)$. D'après Kakutani, $\mathcal{B}_E(0, R)$ est faiblement compacte. On conclut alors.

□

Proposition 1.4.16. *Soit E un espace vectoriel normé. Alors, E' est séparable si et seulement si la topologie faible $\sigma(E, E')$ sur $\mathcal{B}_E$ est métrisable.*

Démonstration. Le sens direct est exactement la même que pour la topologie faible. Pour le sens réciproque, on pourra trouver une démonstration dans le *Linear operators* de DUNFORD-SCHWARZ. $\square$

Théorème 1.4.5 (compacité faible)**.** *Soit E un espace de* BANACH *réel. Sont équivalents.*

(i) E est réflexif.

(ii) $\mathcal{B}_E$ est faiblement compact.

(iii) $\mathcal{B}_E$ est séquentiellement faiblement compact.

*(iv) (*EBERLEIN-ŠMULIAN*). Chaque suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente.*

Remarques.

— On a aussi un résultat (difficile) de Robert C. JAMES, qui affirme que si $K \subset E$ est un ensemble non vide borné faiblement fermé dans un espace de BANACH réel E, alors K est faiblement compact *si et seulement si* toute forme linéaire $f \in E'$ atteint son maximum sur K.

— Si l'on combine le théorème de KAKUTANI avec ce résultat, alors si E est un espace de BANACH réflexif *si et seulement si* pour tout $f \in E'$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$ et $f(x) = \|f\|_{E'}$.

Démonstration. — $(i) \iff (ii)$. Conséquence de KAKUTANI.

— $(i) \implies (iii)$. Supposons E séparable et réflexif. Alors, E' est séparable et réflexif. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}_E$. Alors $(J(x_n))_n$ est bornée dans E''. Il existe donc une sous-suite faiblement-* convergente $J(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ d'après la version séparable de BANACH-ALAOGLU. Mais alors, $(x_{n_i})_i$ converge faiblement vers un élément $x \in E$ (puisque $J : (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (E'', \sigma(E'', E'))$ est continue). Or, $x_{n_i} \in \mathcal{B}_E$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. D'après MAZUR, puisque $\mathcal{B}_E$ est un convexe et x_{n_i} converge vers x faiblement, alors $x \in \mathcal{B}_E$.

  Supposons maintenant E' réflexif, et soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathcal{B}_E$. Soit $G = \overline{\text{Vect}\,(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}$. C'est un sous-espace vectoriel fermé de E contenant les x_n. D'après le corollaire 1.4.6, l'espace G est réflexif. De plus, G est séparable, et on se retrouve dans le cas de figure évoqué en premier. Ainsi, de $(x_n)_n$ on peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers une limite située dans $\mathcal{B}_E$.

— $(iii) \implies (iv)$. Si $(x_n)_n$ est une suite bornée de E, alors il existe $c > 0$ tel que $\|x_n\|_E \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, $\left(\frac{1}{c} x_n\right)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}_E$ et alors d'après (iii), elle admet une sous-suite faiblement convergente. Ainsi, $(x_n)_n$ admet une sous-suite faiblement convergente. $\square$

Corollaire 1.4.9. *Soit E un espace de* BANACH *réflexif, et $C \subset E$ un convexe fermé non vide, et $\varphi : C \longrightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction convexe inférieurement semi-continue tel que $\varphi \not\equiv \infty$ et*

$$\lim_{\substack{x \in C \\ \|x\| \to \infty}} \varphi(x) = \infty.$$

Alors, φ atteint son minimum sur C.

Démonstration. Soit $a \in C$ tel que $\varphi(a) < \infty$ et $\widetilde{C} = \{x \in C \,|\, \varphi(x) \leq \varphi(a)\}$. Selon les hypothèses, $\widetilde{C}$ est un convexe fermé et borné. Alors, c'est un compact faible de E. De plus, φ est faiblement inférieurement semi-continue. On en déduit qu'il existe $(x_n)_n$ une suite minimisante d'éléments de $\widetilde{C}$, $i.e$ telle que

$$\varphi(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \inf_{x \in \widetilde{C}} \varphi(x).$$

De plus, il existe $(x_{n_i})_i$ une sous-suite de $(x_n)_n$ convergeant faiblement vers un certain x_0 (par compacité faible). Cette limite x_0 est élément de $\widetilde{C}$ car $\widetilde{C}$ est un fermé faible. Ainsi,

$$\inf_{x \in \widetilde{C}} \varphi(x) \leq \varphi(x_0) \leq \liminf_{i \to \infty} \varphi(x_{n_i}) = \inf_{x \in \widetilde{C}} \varphi(x).$$

On en déduit le résultat.

□

1.4.5 Uniforme convexité

Définition 1.4.3. *Soit E un espace vectoriel normé est dit uniformément convexe si pour pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathcal{B}_E$ tel que $\|x - y\| \geq \varepsilon$, alors $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta_\varepsilon$.*

Remarque. C'est une propriété géométrie : étant donnés deux points à distance au moins ε, leur milieu se situe nécessairement dans une boule de taille $1 - \delta_\varepsilon$.

Exemples.

— $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ est uniformément convexe mais pas $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

— Les espaces l^p, L^p, et les espaces pré-hilbertiens sont uniformément convexes quand $1 < p < \infty$.

Théorème 1.4.6 (MILMAN-PETTIS)**.** *Un espace de* BANACH *uniformément convexe est réflexif.*

Démonstration. Soit $u_0 \ni E''$ tel que $\|u_0\| = 1$. Montrons que $u_0 \in J(\mathcal{B}_E)$. L'ensemble $J(\mathcal{B}_E)$ est un fermé fort de E''. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in \mathcal{B}_E$ tel que $\|u_0 - J(x_0)\| \leq \varepsilon$. Soit alors $\varepsilon > 0$ et $\delta = \delta_epsilon > 0$ donné par la propriété d'uniforme convexité. Soit de plus $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = 1$ et $u_0(f) > 1 - \frac{\delta}{2}$ (car $\|u_0\| = 1$). On note

$$V = \{u \in E'' \mid |(u - u_0)(f)| < \delta/2\}.$$

C'est une voisinage dans $\sigma(E'', E')$. Or, $J(\mathcal{B}_E)$ est dense dans $\mathcal{B}_{E''}$ pour $\sigma(E'', E')$ donc $V \cap J(\mathcal{B}_E) \neq 0$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{B}_E$ tel que $J(x_0) \in V$. Montrons que x_0 est celui que nous cherchons. Supposons le contraire, *i.e* que $\|u_0 - J(x_0)\| > \varepsilon$. Alors, $u_0 \in W := (J(x_0) + \varepsilon \mathcal{B}_{E''})^c$ qui est un voisinage pour $\sigma(E'', E)$. Selon Goldstine, on a $V \cap W \cap J(\mathcal{B}_E) \notin \varnothing$. Il existe donc $y \in \mathcal{B}_E$ tel que $J(y) \in V \cap W \subset V$. Puisque $J(y) \in W$, on a $\|J(y) - J(x_0)\| > \varepsilon$ donc par la propriété d'isométrie de J, $\|y - x_0\| > \varepsilon$. Puisque $J(y) \in V$,

$$\frac{\delta}{2} > |(J(y) - u_0)(f)| = |f(y) - u_0(f)| \geq u_0(f) - f(y),$$

et $J(x_0) \in V$ donc

$$\frac{\delta}{2} > |(J(x_0) - u_0)(f)| = |f(y) - u_0(f)| \geq u_0(f) - f(x_0).$$

En combinant ces inégalités, on trouve que

$$2u_0(f) \leq f(x_0 + y) + \delta \leq \|x_0 + y\| + \delta.$$

Alors, $\left\|\frac{x_0+y}{2}\right\| > u_0(f) - \frac{\delta}{2} > 1 - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2}$. Par uniforme convexité, on en déduit que $\|x_0 - y\| \leq \varepsilon$, ce qui est contradictoire.

$\square$

Proposition 1.4.17 (condition suffisante de convergence forte)**.** *Soit E un espace de* Banach *uniformément convexe. Soit $(x_n)_n$ un suite d'éléments de E convergeant faiblement vers $x_\infty \in E$ et tel que* $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x_\infty\|$. *Alors,*

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x_\infty.$$

Démonstration. Si $x_\infty = 0$, c'est clair. Sinon, on renormalise en posant $a_n = \max \|x_\infty\|, \|x_n\|$, $y_n = x_n/a_n$ et $y_\infty = x_\infty / \|x_\infty\|$. Alors, $\|y_n\| \leq 1$ pour tout $n \geq 0$ et $\|y_\infty\| = 1$. Ainsi, il suffit de montrer que $(y_n)_n$ converge en norme vers y_∞ et on aura le résultat (exercice). $(a_n)_n$ converge vers $\|x_\infty\|$ et $(y_n)_n$ converge faiblement vers y_∞ par continuité forte-forte de l'application de division (donc faible-faible continue). De plus,

$$\frac{y_n + y_\infty}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{W} y_\infty$$

par le même argument. Ainsi,

$$1 = \|y_\infty\| \leq \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\left\|\frac{y_n + y_\infty}{2}\right\|}_{\leq \frac{1}{2}(\|y_n\| + \|y_\infty\|)} \leq 1.$$

Par un même argument avec la limite supérieure, on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{y_n + y_\infty}{2}\right\| = 1.$$

Par uniforme convexité, on en déduit que $\|y_n - y_\infty\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $(y_n)_n$ converge fortement vers y_∞.

$\square$

Chapitre 2

Théorie des opérateurs

Dans ce chapitre, E et F désigneront sauf mention contraire des espaces de Banach.

2.1 Généralités

2.1.1 Rappels

On supposera dans cette sous-section que E et F sont des espaces vectoriels normée. Ainsi, $\mathcal{B}(E,F)$ est de Banach *si et seulement si* F l'est. Muni de la composition, on suppose que l'espace $\mathcal{B}(E,F)$ est une algèbre normée, *i.e* our tout $S,T\in\mathcal{B}(E,F)$, alors $\|ST\|\leq\|S\|\,\|T\|$. On note $D(T)$ le domaine de T, et $\mathscr{G}(T)$ son graphe.

2.1.2 Dual d'un opérateur

Soient E et F des espaces de Banach, et $T : E\longrightarrow F$ un opérateur linéaire borné. Si $g\in F'$, alors $g\circ T : E\longrightarrow\mathbb{K}$ est une forme linéaire bornée donc élément de E'. La transposée de T est l'application

$$T' : \left|\begin{array}{ccc} F' & \longrightarrow & E' \\ g & \longmapsto & g\circ T. \end{array}\right.$$

Proposition 2.1.1. *Si $T\in\mathcal{B}(E,F)$, alors $T'\in\mathcal{B}(F',E')$ et $\|T'\|=\|T\|$.*

Démonstration. Soit $g\in F'$. On a

$$\left\|T'g\right\|_{E'}=\sup_{\|x\|\leq 1}\left\|T'g(x)\right\|=\sup_{\|x\|\leq 1}\|g(Tx)\|\leq\sup_{\|x\|\leq 1}\|g\|_{F'}\|Tx\|=\|g\|_{F'}\|T\|.$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $x\in E$ tel que $\|x\|\leq 1$ et $\|Tx\|>\|T\|-\varepsilon$ (par définition de $\|T\|$). Selon Hahn-Banach, il existe $g\in F'$ tel que $\|g\|_{F'}=1$ et $g(Tx)=\|Tx\|_F$. Alors,

$$\|Tx\|_F=g(Tx)=(T'g)(x)\leq\left\|T'g\right\|\|x\|\leq\left\|T'g\right\|\left\|T'\right\|.$$

On a donc que $\|T\|-\ \varepsilon<\|Tx\|\leq\|T'\|$. On en déduit que $\|T\|\leq\|T'\|+\varepsilon$. On a donc l'égalité. $\square$

Corollaire 2.1.1. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{B}(F',E') \\ T & \longmapsto & T' \end{array}$$

est un isométrie.

Proposition 2.1.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$. Alors,*

$$T'' \circ J_E = J_F \circ T.$$

Autrement dit, $T'' : E'' \longrightarrow F''$ est une extension de T sur E'' à valeurs dans F''.

Remarques.

— On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook, "J_E"] \arrow[d, "T"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E'' \arrow[d, "T''"] \\ F \arrow[r, hook, "J_F"'] & F'' \end{tikzcd}$$

— Si E est réflexif, on a $T = J_F^{-1} \circ T'' \circ J_E$.

Démonstration. Soit $x \in E$ et $g \in F'$. On a

$$T''(J_E(x))(g) = J_E(x)(T'g) = (T'g)(x) = g(Tx) = J_F(Tx)(g).$$

□

Proposition 2.1.3. *Si S et $T \in \mathcal{B}(E,F)$ sont des opérateurs bornés, alors $(ST)' = T'S'$.*

Proposition 2.1.4 (image-noyau dual)**.** *Soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$. Alors,*

(i) $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = \ker(T')$ *;*

(ii) $\overline{\mathrm{Im}(T)} = {}^{\perp}\ker(T')$ *: $\mathrm{Im}(T)$ est sense si et seulement si T' est injective ;*

(iii) $\ker(T) = \perp \mathrm{Im}(T')$ *;*

(iv) $\overline{\mathrm{Im}(T')} \subset \ker(T)^{\perp}$ *;*

(v) si E est réflexif, $\overline{\mathrm{Im}(T')} = \ker(T)^{\perp}$ *: $\mathrm{Im}(T')$ est dense si et seulement si T est injective.*

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$.

(i) Soit $g \in F'$. Alors,

$$g \in \mathrm{Im}(T)^{\perp} \iff \forall x \in E,\, 0 = g(Tx) = T'g(x) \iff g \in \ker(T').$$

(ii) Voir TD.

(iii) Soit $x \in E$. Alors,

$$x \in \ker(T) \iff \forall g \in F', g(Tx) = 0 = T'g(x) \iff x \in {}^{\perp}\operatorname{Im}(T').$$

(iv) On a montré en TD que

$$\overline{\operatorname{Im}(T')} = {}^{\perp}\left(\operatorname{Im}(T')^{\perp}\right) = {}^{\perp}\ker(T'').$$

Montrons que ${}^{\perp}\ker(T'') \subset \ker(T)^{\perp}$. Soit donc $g \in {}^{\perp}\ker(T'')$ et $x \in \ker(T)$. On a que

$$T''J_E(x) = J_F(Tx) = J_F(0) = 0.$$

Ainsi, $J_E(x) \in \ker(T'')$ donc $g(x) = J_E(x)(g) = 0$.

(v) Il reste à montrer que si E est réflexif, alors $\ker(T)^{\perp} \subset {}^{\perp}\ker(T'')$. Soit donc $g \in \ker(T)^{\perp}$ et $u \in \ker(T'')$. Puisque E est réflexif, il existe $x \in E$ tel que $u = J_E(x)$. On a que

$$J_F(Tx) = T''J_E(x) = T''u = 0.$$

Puisque J_F est injective, on en déduit que $x \in \ker(T)$ et alors,

$$u(g) = J_E(x)(g) = g(x) = 0$$

car $x \in \ker(T)$ et $g \in \ker(T)^{\perp}$.

□

Corollaire 2.1.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$ un opérateur d'image fermée et soit $y \in F$. Alors, l'équation $Tx = y$ d'inconnue $x \in E$ admet une solution si et seulement si $g(y) = 0$ pour tout $g \in \ker(T')$. Dans ce cas et si $x_0 \in E$ désigne une telle solution, alors toute autre solution $x \in E$ est de la forme $x = x_0 + z$ où $z \in \ker T$.*

Conséquence. T est surjective *si et seulement si* $\operatorname{Im} T$ est fermé et T' est injective.

Proposition 2.1.5. *Soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$. Sont équivalents.*

(i) f est élément de $\operatorname{Im}(T')$.

(ii) Il existe $c > 0$ tel que $|f(x)| \leq c\,\|Tx\|_F$ pour tout $x \in E$.

Démonstration. Exercice.

□

2.1.3 Opérateurs inversibles

Un opérateur $T \in \mathcal{B}(E,F)$ est dit inversible s'il est bijectif d'inverse T^{-1} borné (*i.e* $T^{-1} \in \mathcal{B}(F,E)$).

Proposition 2.1.6. *Soit E un espace de* Banach *et $T \in \mathcal{B}(E,F)$ un opérateur bijectif. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $T^{-1} \in \mathcal{B}(F,E)$.

(ii) Il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\|_F \geq c\,\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

(iii) F est de Banach.

Démonstration.
— $(i) \implies (ii)$. Soit $k > 0$ tel que pour tout $y \in F$, on a $\left\|T^{-1}y\right\| \leq k\,\|y\|$. Alors, pour tout $x \in E$, $\|x\| \leq k\,\|Tx\|$. On pose $y = Tx$ et on conclut avec $c = 1/k$.

— $(ii) \implies (iii)$. Soit $(y_n)_n$ une suite de Cauchy dans F. Puisque T est une bijection, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un x_n tel que $y = Tx_n$. Alors, pour tout $n, m \ \in \mathbb{N}$,

$$\|y_n - y_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| \geq c\,\|x_n - x_m\|$$

car T est un isométrie. Ainsi, $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E donc converge vers un certain $x \in E$, et alors $(y_n)_n$ converge vers Tx dans F par continuité de T.

— $(iii) \implies (i)$. Les espaces sont complets et T est surjective, alors par principe de l'application ouverte : pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de E, $T(\mathcal{O})$ est un ouvert, donc $(T^{-1})^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert donc T^{-1} est continue.

□

Proposition 2.1.7. *Soient E et F des espaces de* Banach *et soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$. Sont équivalents.*

(i) Il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\,\|x\|$ pour tout $x \in E$.

(ii) T est injective et $\mathrm{Im}(T)$ est fermé dans F.

Démonstration.

$(i) \implies (ii)$. L'assertion (i) implique que T est un injection. Soit maintenant $(y_n)_n \in \Im(T)^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $y \in F$. On note $y_n = Tx_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme précédemment, on a que $y = Tx \in \mathrm{Im}\,T$.

$(ii) \implies (i)$. On remarque $T : E \longrightarrow \mathrm{Im}\,T$ est une bijection, et $\mathrm{Im}(T)$ est un espace complet car fermé dans un Banach. On conclut avec la proposition précédente.

□

Corollaire 2.1.3. *Soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$ un opérateur. T est inversible si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\,\|x\|$ pour tout $x \in E$, et $\overline{\mathrm{Im}\,T} = F$.*

Démonstration. $\boxed{\Longleftarrow}$ L'inégalité donne l'injectivité, et $\mathrm{Im}\,T$ est fermé. Ainsi, $\mathrm{Im}\,T = \overline{\mathrm{Im}\,T} = F$. On conclut avec 2.1.6 car F est de Banach.

□

Notation. Si $E = F$, on note $\mathrm{G}\mathcal{B}(E)$ le groupe des opérateurs bornés inversibles de E.

Proposition 2.1.8 (Neumann). *Soit E un espace de* Banach.

(i) Soit $T \in \mathcal{B}(E)$ tel que $\|T\| < 1$. Alors, $\mathrm{id}_E - T$ est inversible, et

$$(\mathrm{id}_E - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

(ii) $\mathrm{G}\mathcal{B}(E)$ est un ouvert de $(\mathcal{B}(E), \|\cdot\|)$, et l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{G}\mathcal{B}(E) & \longrightarrow & \mathrm{G}\mathcal{B}(E) \\ T & \longmapsto & T^{-1} \end{array}$$

est un homémorphisme de $\mathrm{G}\mathcal{B}(E)$.

Démonstration. (i) Déjà vu.

(ii) Soit $T_0 \in \mathrm{G}\mathcal{B}(E)$ et $T \in \mathcal{B}(E)$. On a $T = T_0 + T - T_0$ donc

$$T = T_0(\mathrm{id}_E + T_0^{-1}(T - T_0)).$$

Or, si $\left\|T_0^{-1}(T - T_0)\right\| < 1$ alors $\mathrm{id}_E + T_0^{-1}(T - T_0) \in \mathrm{G}\mathcal{B}(E)$. On en déduit que $\mathcal{B}(T_0, 1/\left\|T_0^{-1}\right\|) \subset \mathrm{G}\mathcal{B}(E)$. En effet, pour tout $T \in E$ dans cette boule, on a $\|T - T_0\| < 1/\left\|T_0^{-1}\right\|$ donc par sous-multiplicativé de la norme, on a que $\left\|T_0^{-1}(T - T_0)\right\| < 1$. Ainsi, $\mathrm{id}_E + T_0^{-1}(T - T_0)$ est inversible et donc T aussi. De plus,

$$T^{-1} = (\mathrm{id}_E + T_0^{-1}(T - T_0))^{-1} T_0^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T_0^{-1}(T - T_0))^n \right) T_0^{-1}.$$

On en déduit que

$$T^{-1} - T_0^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (T_0^{-1}(T - T_0))^n T_0^{-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left\|T^{-1} - T_0^{-1}\right\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\|T_0^{-1}\right\|^{n+1} \|T - T_0\|^n \\ &\leq \frac{\left\|T_0^{-1}\right\|^2 \|T - T_0\|}{1 - \left\|T_0^{-1}\right\| \|T - T_0\|}. \end{aligned}$$

On en déduit que si $T \xrightarrow{\|\cdot\|} T_0$, alors $T^{-1} \xrightarrow{\|\cdot\|} T_0^{-1}$.

□

Corollaire 2.1.4. *Soient E et F des espaces de* Banach *et soit $T \in \mathcal{B}(E, F)$ si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geq c\,\|x\|$ pour tout $x \in E$ et T' est injective.*

Démonstration. Exercice. $\square$

Proposition 2.1.9 (inversibilité de T')**.** *Soient E et F des espaces de* BANACH *et $T \in \mathcal{B}(E,F)$. Alors, T est inversible si et seulement si $T' \in \mathcal{B}(F',E')$ est inversible. Dans ce cas,*

$$(T^{-1})' = (T')^{-1}.$$

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$ qu'on suppose inversible. On a que $\mathrm{id}_E = T^{-1}T$ donc

$$\mathrm{id}_{E'} = (\mathrm{id}_E)' = (T^{-1}T)' = T'(T^{-1})'.$$

De la même façon en décomposant id_F, on a que $(T^{-1})'T'$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons T' inversible. Alors, T' est injectif, et T'' est inversible. Soit $x \in E$, on a que

$$\|x\| = \|J_E(x)\| = \left\|(T'')^{-1}T''J_E(x)\right\| \leq \left\|(T'')^{-1}\right\| \underbrace{\left\|T''J_E(x)\right\|}_{\|Tx\|}.$$

Ainsi, $\|x\| \leq \left\|(T'')^{-1}\right\| \|Tx\|$. On conclut avec le corollaire précédent. $\square$

Corollaire 2.1.5. *Soit E et F des espaces de* BANACH*, et soit $\Phi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme linéaire. Si E est réflexif, alors F aussi.*

Démonstration. Soit $v \in F''$ et on pose

$$y = \Phi J_E^{-1}(\Phi'')^{-1}v \in F.$$

Soit $g \in F'$ et montrons que $J_F(y) = v$. On a que

$$\begin{aligned} g(y) &= \langle y\,,\, g\rangle_F \\ &= \left\langle \Phi J_E^{-1}(\Phi'')^{-1}v\,,\, g\right\rangle_F \\ &= \left\langle J_E^{-1}(\Phi'')^{-1}v\,,\, \Phi' g\right\rangle_E \\ &= \left\langle \Phi' g\,,\, (\Phi'')^{-1}v\right\rangle_E \\ &= \left\langle g\,,\, \Phi''(\Phi'')^{-1}v\right\rangle_{F'} \\ &= \langle g\,,\, v\rangle_{F'}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $v = J_F(y)$. $\square$

Remarque. T est une isométrie *si et seulement si* T' est une isométrie. En effet,

$$(T')^{-1} = (T^{-1})$$

et

???

2.2 Théorie de Fredholm

2.2.1 Opérateurs compacts

Définition 2.2.1. *Soit $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés. L'opérateur T est dit* **compact** *s'il vérifie l'une de des deux conditions (équivalentes).*

- *Pour tout suite $(x_n)_n$ d'éléments de E bornée, $(T(x_n))_n$ admet une sous-suite convergente.*
- *T envoie des ensembles bornés sur ensembles relativement compacts (pour tout $A \subset E$ borné, $\overline{T(A)}$ est compact).*

Remarques.

- Si T est compact, alors T est borné. En effet, $\overline{T(\mathcal{B}_E)}$ est compact donc borné. Ainsi,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty.$$

  On en déduit que T est borné.
- Si $\dim E = \infty$ et $F = E$, alors l'identité n'est pas compact. En effet, la boule unité est fermée et bornée mais pas compacte en vertu du théorème de Riesz.

Lemme 2.2.1. *Soient E et F des espaces de* Banach *et T un opérateur linéaire. Sont équivalents.*

(i) *Toute $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de E bornée est telle que $(Tx_n)_n$ admet une sous-suite de* Cauchy.

(ii) *Si $A \subset E$ est borné, alors $\overline{T(A)}$ est compact.*

(iii) *$\overline{T(\mathcal{B}_E)}$ est un compact, où $\mathcal{B}_E = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$.*

Démonstration.
- *(i)* $\implies$ *(ii)*. Si $A \subset E$ est un sous-ensemble borné, alors toute suite d'éléments de $T(A)$ admet un sous-suite de Cauchy, donc $\overline{T(A)}$ est un sous-ensemble compact car F est complet.
- *(ii)* $\implies$ *(iii)*. Évident
- *(iii)* $\implies$ *(i)*. Soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans E et soit $c > 0$ un majorant des normes des x_n. Alors, $(x_n/c)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}_E$. Ainsi, $\left(\frac{1}{c}Tx_n\right)_n$ admet une sous-suite convergente, qui est donc de Cauchy.

□

Notation. On note $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs $T \in \mathcal{B}(E, F)$ bornés. On note $K(E)$ si $E = F$.

Proposition 2.2.1. *Soient E et F des espaces de* BANACH*. On a les propriétés suivantes.*

(i) $K(E,F)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{B}(E,F)$.

(ii) Soient W et Z des espaces vectoriels normés, et $A \in \mathcal{B}(W,E)$ et $B \in \mathcal{B}(F,Z)$ des opérateurs bornés. Alors, pour tout $T \in K(E,F)$, $B \circ T \circ A \in K(W,Z)$.

(iii) Si E et F sont des espaces vectoriels normés quelconques, alors $K(E,F)$ est séquentiellement fermé.

Démonstration. (i) Clair.

(ii) On a $A(\mathcal{B}_W) \subset \|A\| \mathcal{B}_E$ donc $TA(\mathcal{B}_W) \subset \|A\| \overline{T(\mathcal{B}_E)}$, et $\overline{T(\mathcal{B}_E)}$ est un compact. Ainsi, $BTA(\mathcal{B}_W) \subset \|A\|\, B\left(\overline{T(\mathcal{B}_E)}\right)$, mais on sait que $B\left(\overline{T(\mathcal{B}_E)}\right)$ est un compact. Ainsi, $\overline{BTA(\mathcal{B}_W)}$ est fermé dans un compact donc est compact.

(iii) Soit $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $K(E,F)$ convergeant vers $T \in \mathcal{B}(E,F)$. $(x_n^0)_n$ une suite bornée d'éléments de E. On choisit $(x_n^1)_n$ une sous-suite de $(x_n^0)_n$ telle que $(T_1 x_n^1)_n$ converge. De $(x_n^1)_n$ on extrait une sous-suite $(x_n^2)_n$ tel que $(T_2 x_n^2)_n$ converge. On réitère le processus et on considère la suite diagonale notée $x_n := x_n^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est une sous-suite de $(x_n^k)_{n \geq k}$ et donc $(T_k x_n)_n$ est de CAUCHY pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|(T - T_k)(x_n - x_m) + T_k(x_n - x_m)\| \leq \|T - T_k\| \|x_n - x_m\| + \|T_k(x_n - x_m)\| .$$

□

Remarques.

— $K(E,F)$ est donc un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(E,F)$.

— On ne peut pas remplacer la convergence en norme par la convergence simple dans le troisième point. En effet, si $E = F = l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$, et on définit $T_n : E \to E$, $x \mapsto (x_0, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, alors $T_n \in \mathcal{B}(E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et est rang fini donc compact. Pourtant, $(T_n)_n$ converge simplement vers l'identité sur $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$, qui n'est pas compact car E est de dimension infinie.

Définition 2.2.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(E,F)$ un opérateur est dit être de rang fini si* $\dim \operatorname{Im} T < \infty$. *De plus, T est dit* ***complètement continu*** *si pour tout suite faiblement convergente $(x_n)_n$ d'éléments de E, $(Tx_n)_n$ est convergente.*

Remarque. Tout opérateur de rang fini est compact (HEINE-Borel).

Corollaire 2.2.1. *Supposons que $T \in \mathcal{B}(E,F)$ peut être approché par des opérateurs de rang fini (i.e que T est limite en norme d'opérateurs d'une suite d'opérateurs de rang fini). Alors, T est compact. Autrement dit, $K(E,F)$ contient l'adhérence de l'ensemble des opérateurs de rang fini.*

Remarque. En général, il n'est pas vrai qu'un opérateur compact est limite d'opérateurs de rang fini.

Proposition 2.2.2. *Si F est un espace de* HILBERT*, alors tout opérateur compact $T \in K(E, F)$ est limite d'opérateurs de rang fini.*

Démonstration. Soit $T \in K(E, F)$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\overline{T(\mathcal{B}_E)}$ est compact, il existe I un ensemble et $(y_i)_i \in F^I$ une famille telle que

$$\overline{T(\mathcal{B}_E)} \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}(y_i, \varepsilon).$$

Soit $G = \mathrm{Vect}((y_i)_{i\in I})$ soit p_G la projection orthogonale sur G. C'est un opérateur de rang fini donc compact. Pour tout $x \in \mathcal{B}_E$, il existe $i_0 \in I$ tel que $\|T - y_{i_0}\| < \varepsilon$. Ainsi, $\|p_G T x - p_G y_{i_0}\| < \varepsilon$ mais $p_G y_{i_0} = y_{i_0}$. On en déduit que $\|p_G T x - T x\| < 2\varepsilon$ pour tout $x \in E$. Ainsi, $\|p_G T - T\| < 2\varepsilon$.

□

Démonstration. Si $T \in K(E, F)$, T est complètement continu.

□

Démonstration. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E convergeant faiblement vers un certain $x \in E$. Montrons d'abord que $(Tx_n)_n$ converge faiblement vers Tx. Soit $g \in F'$ et soit $f = g \circ T$. f est linéaire et par continuité de g et T, $f \in E'$. Puisque $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$. Donc $(g(Tx_n))_n$ converge vers $g(Tx)$. Ainsi, $(Tx_n)_n$ converge faiblement vers Tx. Montrons maintenant la convergence forte en supposons le contraire : il existe $\varepsilon > 0$ et $(x_{n_k})_k$ une sous-suite de $(x_n)_n$ telle que

$$\|Tx - T_{n_k}\| \geq \varepsilon$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque T est compact, il existe $(x_{\varphi(n_k)})_k$ une sous-suite de $(x_{n_k})_n$ telle que $(y_k)_k := (T(x_{\varphi(n_k)}))_k$ converge fortement vers un certain y. D'une part, $(y_k)_k$ converge faiblement vers y, et d'une autre $(y_k)_k$ converge fortement vers y. Ainsi, $y = Tx$ et

$$\left\|Tx_{\varphi(n_k)} - Tx\right\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

ce qui est en contradiction avec nos hypothèses.

□

Proposition 2.2.3. *Supposons E réflexif, et soit $T \in \mathcal{B}(E, F)$. Alors T est élément de $K(E, F)$ si et seulement si T est complètement continu.*

Démonstration. $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons T complètement continu sur E. Soit $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Par réflexivité de E, ol existe $(x_{n_k})_k$ une sous-suite de $(x_n)_n$ convergeant faiblement vers un certain $x \in E$. Puisque T est complètement continue,

$$Tx_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\|\cdot\|_E} Tx.$$

On en déduit que T est compact.

□

Remarques.

— Cette équivalence est fausse sans hypothèse de réflexivité.

— Si E est réflexif et $T \in \mathcal{B}(E,F)$, alors T est continu faible-faible. Selon le théorème de KAKUTANI la réflexivité de E impose que $\mathcal{B}_E$ est faiblement compact, donc $T(\mathcal{B}_E)$ est faiblement compact aussi. Ainsi, $T(\mathcal{B}_E)$ est un fermé faible de F. Par MAZUR, on en déduit que $T(\mathcal{B}_E)$ est un fermé fort de F. Si de plus T est compact, alors $T(\mathcal{B}_E)$ est compact dans F.

Si E n'est pas réflexif, $T(\mathcal{B}_E)$ peut ne pas être fermé même si $\overline{T(\mathcal{B}_E)}$ est compact.

Exemple. Soit $\lambda \in l^1(\mathbb{N},\mathbb{R})$ tel que $\lambda_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit $T : c_0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$$

pour tout $x \in c_0(\mathbb{R})$, et $|Tx| \leq \|x\|_\infty \|\lambda\|_1$. Ainsi, $\|T\| \leq \|\lambda\|_1$. Ainsi,

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathcal{B}_{c_0(\mathbb{R})}} |Tx| \geq |T(e_0 + \cdots + e_N)| = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n$$

où $e_i = (\delta_{i,n})_n$. Ainsi, $\|T\| = \|\lambda\|_1$. T est de rang 1 donc est compact. Mais $T(\mathcal{B}_{c_0(\mathbb{R})}) =]-\|\lambda\|_1, \|\lambda\|_1[$ (le supremum $\sup_{x \in \mathcal{B}_{c_0(\mathbb{R})}} |Tx|$ n'et pas atteint dans $c_0(\mathbb{R})$).

Théorème 2.2.1 (SCHAUDER)**.** *Soient E et F des espaces de* BANACH *et $T \in \mathcal{B}(E,F)$. Alors, $T \in K(E,F)$ si et seulement si $T' \in K(F',E')$.*

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Notons $M = \overline{T(\mathcal{B}_E)} \subset F$. C'est un espace métrique compact pour la métrique de la norme sur F. Soit $g \in F'$, et notons $f_g = g_{|M} : E \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit. de plus

$$\mathscr{F} = \{f_g \,|\, g \in F,\, \|g\|_{F'} \leq 1\} \subset \mathcal{C}(M,\mathbb{K}).$$

Pour tout $g \in F'$, on a

$$\|f_g\| = \sup_{y \in M} |g(y)| = \sup_{x \in \mathcal{B}_E} |g(Tx)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |T'g(x)| = \left\|T'g\right\|_{E'}.$$

Ainsi, on a montré que $\|f\| \leq \|T'\| = \|T\|$ pour tout $f \in \mathscr{F}$. Ainsi, $\mathscr{F}$ est bornée. De plus, $\mathscr{F}$ est équicontinue. En effet,

$$|f_g(y) - f_g(y')| \leq |g(y-y')| \leq \|g\| \left\|y-y'\right\| \left\|y-y'\right\|$$

pour tout $g \in F'$ et $y, y' \in M$. Selon le théorème d'ARZELÀ-ASCOLI, $\mathscr{F}$ a une fermture compacte. Si $(g_n)_n$ est une suite d'éléments de F' telle que $\|g_n\| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(f_{g_n})_n$ admet une sous-suite uniformément convergente $(f_{g_{n_k}})_k$, donc $(T'g_{n_k})_k$ est de CAUCHY dans E' donc convergente.

□

Proposition 2.2.4 (séparabilité de l'image)**.** *Soit $T \in K(E,F)$, alors* $\operatorname{Im} T$ *est séparable.*

Démonstration. Admis (pas compliqué pour autant).

□

Exemple (Fredholm, 1903). On cherche à résoudre l'équation

$$g(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) \,\mathrm{d}t$$

pour tout $s \in [0,1]$, d'inconnue f. Soit $k \in \mathcal{C}([0,1]^2, \mathbb{R})$, et soit

$$T_k f(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) \,\mathrm{d}t$$

pour tout $s \in [0,1]$. L'application

$$T_k \left| \begin{array}{rcl} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & T_k f \end{array} \right.$$

est bien définie, et T_k est linéaire bornée. En effet,

$$|T_k f(s)| \leq \|f\|_\infty \|k\|_\infty$$

pour tout $s \in [0,1]$. Ainsi,

$$\sup_{s\in[0,1]} |T_k f(s)| = \|T_k f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|k\|_\infty .$$

Ainsi, $\|T_k\| \leq \|k\|_\infty$. Par le théorème d'Arzelà-Ascoli, T_k est un opérateur compact. De plus, k est continu sur un compact de $\mathbb{R}^2$ donc équicontinu : soit $\varepsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ tel que pour tout $s, s', t, t' \in [0,1]$ vérifiant $|s - s'| + |t - t'| < \delta$, alors

$$|k(s',t') - k(s,t)| < \varepsilon.$$

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$, et soit $s, s' \in [0,1]$ tels que $|s - s'| < \delta$. Alors,

$$|T_k f(s) - T_k f(s')| \leq \int_0^1 |k(s,t) - k(s',t)||f(t)| \,\mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty \varepsilon.$$

De plus, pour tout $s \in [0,1]$,

$$T_k f(s)| \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty \leq \|k\|_\infty .$$

Ainsi, $\{T_k f(s) \,|\, f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|f\|_\infty \leq 1\}$ est borné dans $\mathbb{K}$, et est donc relativement compact. D'après Arzelà-Ascoli, $T_k(\mathcal{B}_{\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})})$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Remarquons que nous pouvons nous placer dans un autre cadre avec

$$T_k \left| \begin{array}{rcl} L^p(0,1) & \longrightarrow & L^p(0,1) \\ f & \longmapsto & T_k f. \end{array} \right.$$

Exercice. Si $k \in L^\infty([0,1]^2, \mathbb{R})$, alors $T_k \in K(L^p(0,1))$.

2.2.2 Alternative de FREDHOLM

Le but ici est d'étudier l'équation $(\mathrm{id}_E - T)x = y$ où y est donné. On va pour cela étudier la théorie de RIESZ-SCHAUDER.

Théorème 2.2.2 (RIESZ)**.** *Soit E un espace vectoriel normé. Alors, $\mathcal{B}_E$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Lemme 2.2.2 (RIESZ)**.** *Soit E un espace vectoriel normé et $G \subsetneq E$ un sous-espace vectoriel strict fermé. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $\|x_\varepsilon\| = 1$ et $d(x_\varepsilon, G) \geq 1 - \varepsilon$.*

Démonstration. Soit $y \in E \backslash G$, et notons $\delta = d(y, G) > 0$. Il existe $z_\varepsilon \in E$ tel que $\delta \leq \|y - z_\varepsilon\| \leq \frac{\delta}{1-\varepsilon}$. Soit

$$x_\varepsilon = \frac{y - z_\varepsilon}{\|y - z_\varepsilon\|}$$

(c'est bien un vecteur unitaire). Si $z \in G$, alors

$$\begin{aligned} x_\varepsilon - z &= \tfrac{y-z_\varepsilon}{\|y-z_\varepsilon\|} - z \\ &= \tfrac{1}{\|y-z_\varepsilon\|}(y - z_\varepsilon - z\,\|y - z_\varepsilon\|) \\ &= \tfrac{1}{\|y-z_\varepsilon\|}(y - \underbrace{(z\,\|y - z_\varepsilon\| - z_\varepsilon)}_{\in G}). \end{aligned}$$

Ainsi, $\|x_\varepsilon - z\| \geq \frac{d(y,G)}{\|y-z_\varepsilon\|} \geq 1 - \varepsilon$.

□

Lemme 2.2.3. *Soit $T \in \mathcal{B}(E, F)$. Alors, $\operatorname{Im} T$ est fermé si et seulement si $\operatorname{Im} T = {}^\perp \ker T'$.*

Démonstration. On a déjà vu que $\overline{\operatorname{Im} T} = {}^\perp \ker T'$.

□

Démonstration (théorème de RIESZ*).* Le sens direct est le théorème de HEINE-BOREL. On vérifie l'autre par contraposée : supposons E de dimension infinie et soit $x_0 \in E$ de norme 1. $E_0 = \overline{\mathbb{K}x_0}$ et $x_1 \in E \backslash E_0$ un vecteur unitaire tel que $d(x_1, E_0) \geq 1/2$. Soit ensuite $E_1 = \overline{\mathrm{Vect}(x_0, x_1)}$ et $x_2 \in E \backslash E_2$ avec $d(x_2, E_1) \geq 1/2$. Par récurrence, on construit une suite $(x_n)_n$ de vecteurs unitaires de E tels que $d(x_{n+1}, E_n) \geq 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $E_n = \overline{\mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_n)}$ (cette construction est possible puisque E est de dimension infinie). Or, pour tout $m < n$, on a $\|x_m - x_n\| \geq 1/2$ donc cette suite n'a pas de sous-suite ocnvergente : $\mathcal{B}_E$ n'est pas compact.

□

Corollaire 2.2.2. *Soit E un espace de* BANACH *et soit $T \in K(E)$. Alors, $\ker(\mathrm{id}_E - T)$ est dimension finie.*

Démonstration. Soit $G = \ker(\mathrm{id}_E - T)$ et montrons que $\mathcal{B}_G$ est compact dans G. Si $x \in G$, on a $(\mathrm{id}_E - T)x = 0$ *si et seulement si* $Tx = x$. Ainsi, $\mathcal{B}_G = T(\mathcal{B}_G) \subset T(\mathcal{B}_E)$, mais $T(\mathcal{B}_E)$ est relativement compact car T est compact. On en déduit que le fermé $\mathcal{B}_G$ est compact.

□

Corollaire 2.2.3. *Soit E un espace de* Banach *et $T \in K(E)$. Alors,* $\dim \ker((\mathrm{id}_E - T)^n) < \infty$ *pour tout $n \geq 1$. De plus, la suite $(\ker((\mathrm{id}_E - T)^n))_n$ est croissante pour l'inclusion.*

Démonstration. Il est clair que $(\mathrm{id}_E - T)^n x = 0$ implique que $(\mathrm{id}_E - T)^{n+1} x = 0$ ce qui donne le second résultat. Pour le premier, on écrit que

$$(\mathrm{id}_E - T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k T^k = \mathrm{id}_E - S$$

où

$$S = \underbrace{\underbrace{T}_{\text{compact}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} T^{k-1}}_{\text{borné}}}_{\text{compact}}.$$

On peut donc appliquer le corollaire 2.2.2.

□

Lemme 2.2.4 (image fermée)**.** *Soit E un espace de* Banach *et soit $T \in K(E)$. Alors,* $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T)$ *est un fermé de E, et alors* $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T) = {}^{\perp}\ker((\mathrm{id}_E - T)')$.

Démonstration. Soit $Y \in \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T)}$ et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E telle que $(y_n)_n := ((\mathrm{id}_E - T)x_n)_n$ converge vers y, et montrons que $y \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T)$. Soit

$$d_n = d(x_n, \ker(\mathrm{id}_E - T)) = \inf\{\|x_n - z\| \mid z \in G\}$$

où $G = \ker(\mathrm{id}_E - T)$. Puisque G est de dimension finie, il existe $z_n \in G$ tel que $d_n = d(x_n, G) = \|x_n - z\|$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) par continuité et compacité. Puisque $z_n \in G$, $z_n = Tz_n$. Supposons maintenant que $(d_n)_n$ n'est pas bornée et que $d_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $d_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et posons

$$w_n = \frac{x_n - z_n}{d_n}.$$

Ce vecteur est clairement unitaire. On a que

$$d(w_n, G) = \frac{1}{d_n} d(x_n - z_n, G) = \frac{1}{d_n} d(x_n, G) = 1$$

et

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_E - T)(w_n) &= w_n - Tw_n = \frac{1}{d_n}(x_n - z_n - T(x_n - z_n)) \\ &= \frac{1}{d_n}(x_n - Tx_n) \\ &= \frac{y_n}{d_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \end{aligned}$$

car $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ et $d_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Or, $(w_n)_n$ est bornée et T est compact donc une suite certaine suite extraite $(Tw_{\varphi(n)})_n$ converge vers une certaine limite w donc $(w_{\varphi(n)})_n$ converge aussi vers w. on a

$$(\mathrm{id}_E - T)w = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{id}_E - T)w_n = \lim_{n\to\infty}(w_n - Tw_n) = 0.$$

Ainsi, $w \in \ker(\mathrm{id}_E - T) = G$ donc $d(w, G) = 0$. C'est contradictoire avec le fait que $1 = d(w, G) = \lim_{n\to\infty} d(w_n, G)$. Ainsi, $(d_n)_n$ ne tend pas vers l'infini. Par un argument similaire, on peut montrer qu'aucune des sous-suites de $(d_n)_n$ ne peut tendre vers l'infini, donc cette suite est bornée. Ainsi, $(x_n - z_n)_n$ est bornée. Puisque T est compacte, il existe une suite extraite (toujours notée $(T(x_n - z_n))_n$) convergente de limite notée v. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$y_n = x_n - Tx_n = x_n - z_n - T(x_n - z_n)$$

car $z_n \in G$, donc

$$x_n - z_n = y_n + T(x_n - z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y + v.$$

Ainsi,

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{id}_E - T)(x_n) = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{id}_E\, T)(x_n - z_n) = (\mathrm{id}_E - T)(y + v)$$

par continuité.

□

Corollaire 2.2.4. *Sous les mêmes hypothèses,* $\mathrm{Im}((\mathrm{id}_E - T)^n)$ *est fermé pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *De plus, la suite* $(\mathrm{Im}((\mathrm{id}_E - T))^n)_n$ *est décroissante pour l'inclusion.*

Démonstration. On a déjà vu que $(\mathrm{id}_E - T)^n = \mathrm{id}_E - S$ avec $S \in K(E)$, ce qui montre la première affirmation.

□

Théorème 2.2.3 (alternative de FREDLHOM, première version)**.** *Soit E un espace de* BANACH *et soit $T \in K(E)$. Alors,* $\mathrm{id}_E - T$ *est injectif si et seulement si* $\mathrm{id}_E - T$ *est surjectif (donc inversible dans* $\mathcal{B}(E)$*).*

Remarque. Justifions le terme d'alternative. Soit l'équation $x - Tx$ d'inconnue x avec $y \in E$ et $T \in K(E)$.

— Ou bien l'équation homogène $x - Tx = 0$ a une solution non triviale,

— ou bien l'équation non homogène $x - Tx = y$ admet une solution pour chaque y et automatiquement la solution est unique.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\mathrm{id}_E - T$ injective mais pas surjective. Ainsi, $\ker(\mathrm{id}_E - T) = \{0_E\}$ mais $E_1 := \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T) \neq E$. Il est clair que $T(E_1) \subset E_1$ car T commute avec $\mathrm{id}_E - T$. Puisque E_1 est fermé, $T_{|E_1}$ est compact sur l'espace de BANACH E_1. Soit $E_2 = (\mathrm{id}_E - T)^2(E) = (\mathrm{id}_E - T)(E_1)$. C'est un sous-espace vectoriel strict de E_1 et est fermé. On définit de la même manière $E_n = (\mathrm{id}_E - T)^n(E)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et alors E_{n+1} est un sous-espace vectoriel strict de E fermé. Ainsi, $T_{|E_n}$ est compact et $\mathrm{Im}((\mathrm{id}_E - T)_{|E_n}) = E_{n+1}$ est fermé. La suite $(E_n)_n$ est une suite strictement décroissante de sous-espace vectoriels fermés. D'après le lemme de Riesz, on peut construire une suite $(x_n)_n$ d'éléments de E tel que $x_n \in E$, $\|x_n\| = 1$, et $d(x_n, E_{n+1}) \geq 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $m < n$, on a que

$$T(x_n - x_m) = (x_m - Tx_m) - (x_n - Tx_n) + x_n - x_m$$

est élément de E_{m+1}. Ainsi,

$$\|T(x_n - x_m)\| \geq d(x_m, E_{m+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

C'est absurde car $(x_n)_n$ est borné et T est compact, donc il existe une sous-suite convergente de $(Tx_n)_n$. Or, la relation précédente contredit ce fait, et donc T est une surjection.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Montrons la réciproque : supposons $\mathrm{id}_E - T$ surjectif et montrons qu'il est injectif. Puisque $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T) = E$, on a ${}^{\perp}\ker((\mathrm{id}_E - T)') = E$. Ainsi, $\ker(\mathrm{id}_{E'} - T') = \{0_{E'}\}$ et l'on peut appliquer le sens direct déjà montré (grâce au théorème de Schauder). On sait donc que $\mathrm{id}_{E'} - T'$ est surjectif et donc $E' = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{E'} - T)$. On sait que $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{E'} - T') \subset \ker(\mathrm{id}_E - T)^{\perp}$. Ainsi, $\ker(\mathrm{id}_E - T)^{\perp} = E'$ donc $\ker(\mathrm{id}_E - T) = \{0_E\}$.

□

Rappel. Si E est un espace vectoriel, et F un sous-espace vectoriel de E, on appelle *codimension* de F l'entier

$$\operatorname{codim} F = \dim E/F.$$

Théorème 2.2.4 (alternative de Fredlhom, seconde version). *Soit E un espace de* Banach *et $T \in K(E)$. Alors*

$$\dim\ker(\mathrm{id}_E - T) = \dim\ker(\mathrm{id}_{E'} - T') = \operatorname{codim}\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T) = \operatorname{codim}\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{E'} - T').$$

Lemme 2.2.5. *Soit E un espace de* Banach *et $T \in K(E)$. Alors,* $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T)$ *est de codimension finie.*

Démonstration. On a $(E/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T))' \cong \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T)^{\perp} = \{f \in E' \,|\, \forall x \in E, f(x - Tx) = 0\}$. On a donc que $f(x - Tx) = 0$ pour tout $x \in E$ *si et seulement si* $(\mathrm{id}_{E'} - T')(f)(x) = 0$ pour tout $x \in E$ (par définition du dual). Ainsi,

$$(\mathrm{id}_{E'} - T')f = 0 \iff f \in \ker(\mathrm{id}_{E'} - T').$$

Ainsi, $(E/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T))' \cong \ker(\mathrm{id}_{E'} - T')$. Or, T' est compact d'après Schauder donc $\ker(\mathrm{id}_{E'} - T')$ est dimension finie, donc $(E/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T))'$ aussi.

□

Démonstration (théorème). Soit $d = \dim\ker(\mathrm{id}_E - T)$ et $d' = \dim\ker(\mathrm{id}_{E'} - T')$. Si $\dim E = d$ alors $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T) = \{0_E\}$ et donc ${}^{\perp}\ker(\mathrm{id}_{E'} - T') = \{0_{E'}\}$, et le résultat est vrai. Supposons par l'absurde que $d < d'$ et soit M le supplémentaire topologie de $G = \ker(\mathrm{id}_E - T)$. Pour construire ce supplémentaire, on se place dans une base de G et soit $\pi_i : G \to \mathbb{K}$, $x \mapsto x_i$ la projection en la i-ième coordonnée. D'après HAHN-BANACH, on peut étendre π_i à E et alors on a $M = \cap_{i\in I}\pi_i^{-1}(\{0\})$. On a donc $E = G \oplus M$ et alors la projection $p : E \longrightarrow G$ est continue. Par ailleurs, $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T) = {}^{\perp}\ker(\mathrm{id}_{E'} - T')$ donc $\mathrm{codim}\,\Im(\mathrm{id}_E - T) = d'$. On en déduit que $E = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T) \oplus N$ avec $\dim N = d'$. Puisque $d < d'$, il existe une application linéaire $l : G \longrightarrow N$ injective mais pas surjective. On pose $S = T + l \circ p$. Puisque T est compact et $l \circ p$ est de rang fini, il est clair que S est compact. Soit maintenant $x \in E$, on a

$$x \in \ker(\mathrm{id}_E - S) \iff x - Sx = 0 \iff \underbrace{x - Tx}_{\in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T)} = \underbrace{l(p(x))}_{\in N}.$$

On en déduit que si $x \in \ker(\mathrm{id}_E - S)$, alors $x \in \ker(\mathrm{id}_E - T)$ et $p(x) = 0$ (par injectivité de l). Autrement, dit $x \in G$ et $p(x) = 0$ donc $x = 0$. Ainsi, $\ker(\mathrm{id}_E - S) = \{0_E\}$, donc $\mathrm{id}_E - S$ est injective. Par le théorème d'alternative de FREDHOLM (première version), $\mathrm{id}_E - S$ est surjective. Ainsi, $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - S) = E$. Or, ceci est impossible car il existe $y \in N \setminus \mathrm{Im}(l)$ et pour un tel y, l'équation

$$x - Sx = y \iff x - Tx - \underbrace{l(p(x))}_{\in N} = \underbrace{y}_{\in N \setminus \mathrm{Im}(l)}$$

n'admet pas de solution. C'est en contradiction avec $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - S) = E$. Ainsi, $d \geq d'$. Il existe à appliquer ce résultat à T' :

$$\dim(\mathrm{id}_{E''} - T'') \leq \dim\ker(\mathrm{id}_{E'} - T') \leq \dim\ker(\mathrm{id}_E - T).$$

Mais T'' est une extension de T donc $\ker(\mathrm{id}_E - T)$ est isomorphe à un sous-espace de $\ker(\mathrm{id}_{E''} - T'')$. On en déduit que $d = d'$. □

Remarque. Les résultats s'appliquent à l'opérateurs $\lambda\,\mathrm{id}_E - T$ avec $\lambda \neq 0$ car $\frac{1}{\lambda}T$ reste compact.

2.3 Théorie spectrale

2.3.1 Spectre d'un opérateur

Définition 2.3.1. *Soit E un espace vectoriel normé complexe, $T \in \mathcal{B}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

- *Si $\lambda\,\mathrm{id}_E - T \in \mathrm{G}\mathcal{B}(E)$, on dit que λ est une valeur résolvante pour T. On note*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\,\mathrm{id}_E - T \in \mathrm{G}\mathcal{B}(E)\}$$

  l'ensemble résolvant de T.
- *Si $\lambda\,\mathrm{id}_E - T \notin \mathrm{G}\mathcal{B}(E)$, on dit que λ est une valeur spectrale pour T. On note*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\,\mathrm{id}_E - T \notin \mathrm{G}\mathcal{B}(E)\}.$$

- *Si $\lambda\,\mathrm{id}_E - T$ n'est pas injectif, on dit que λ est une valeur propre pour T. On note*

$$\mathrm{vp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\,\mathrm{id}_E - T \text{ n'est pas injectif.}\}$$

Remarques.

— On a $\mathbb{C} = \rho(T) \cup \sigma(T)$.

— Si E est un espace vectoriel normé réel, on peut le complexifier en donnant un nouvelle structure à E^2 en posant

$$(s + it)(x, y) = (sx - ty, tx + sy).$$

On écrit $x + iy$ le couple (x, y), et $x = (x, 0)$ et $iy = (0, y)$. On a alors un nouvel espace $E^{\mathrm{co}} = E \oplus iE$. Si $T = E \longrightarrow F$ est un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés réels, alors on définit $T^{\mathrm{co}} : E^{\mathrm{co}} \longrightarrow F^{\mathrm{co}}$ par

$$T^{\mathrm{co}}(x + iy) = Tx + iTy$$

pour tout $x + iy \in E^{\mathrm{co}}$. Si T est borné, il en est de même pour T^{co} et $\|T^{\mathrm{co}}\| = \|T\|$. Enfin, on pose $\sigma(T) = \sigma(T^{\mathrm{co}})$.

— Si $\dim E < \infty$, alors $\mathrm{vp}(T) = \sigma(T)$. Si $\dim E = \infty$, on a l'inclusion stricte $\mathrm{vp}(T) \subsetneq \sigma(T)$. Par exemple, l'application

$$T : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & Tx \end{array} \right.$$

où $Tx(t) = \int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$ pour tout $t \in [0,1]$. T est un opérateur injectif mais pas surjectif. En effet, $\operatorname{Im} T\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{C}) \subsetneq \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$. On a donc que $0 \in \sigma(T)$ mais $0 \not\in \mathrm{vp}(T)$.

Proposition 2.3.1. *Soit E un espace de* Banach *et soit $T \in \mathcal{B}(E)$.*

(i) $\sigma(T) \subset \overline{\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(0, \|T\|}$*. Autrement dit, si $|\lambda| > \|T\|$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \,\mathrm{id}_E - T$ est inversible.*

(ii) $\rho(T)$ *est un ouvert de* $\mathbb{C}$*.*

(iii) $\sigma(T)$ *est un compact de* $\mathbb{C}$*.*

(iv) $\overline{\mathrm{vp}(T)} \subset \sigma(T)$*.*

Démonstration. (i) Si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda \,\mathrm{id}_E - T = \lambda\left(\mathrm{id}_E - \frac{1}{\lambda}T\right)$. Si $\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\| < 1$ (équivalent à $|\lambda| > \|T\|$), alors $\mathrm{id}_E - \frac{1}{\lambda}T$ est inversible donc $\lambda \notin \sigma(T)$.

(ii) L'application $h : \mathbb{C} \to \mathscr{L}(E)$, $\lambda \mapsto \lambda \,\mathrm{id}_E - T$ est continue et $\rho(T) = h^{-1}(\mathrm{G}\mathcal{B}(E))$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ car $\mathrm{G}\mathcal{B}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{B}(E)$.

(iii) On a $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$ est fermé et borné dans $\mathbb{C}$ donc compact.

(iv) Puisque $\mathrm{vp}(T) \subset \sigma(T)$, on en déduit que $\overline{\mathrm{vp}(T)} \subset \sigma(T)$.

□

Remarque.

— On a $\sigma(T) = \mathrm{vp}(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im}(\lambda \,\mathrm{id}_E - T) \neq E\}$. En effet, E est un Banach, donc $\lambda \,\mathrm{id}_E - T \in \mathrm{G}\mathcal{B}(E)$ *si et seulement si* $\lambda \,\mathrm{id}_E - T$ est une bijection.

— Notre objectif va être de préciser l'inclusion pour $\sigma(T)$.