Applications polynomiales de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^k$

Victor LECERF et Maxime MOSCATELLI
sous la direction de Goulwen FICHOU

Résumé

Notre objectif lors de cette lecture dirigée est de déterminer l'existence d'applications polynomiales non constantes de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^k$ lorsque $k < n$, où $\mathbb{S}^j$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{j+1}$ pour la norme euclidienne. En effet, si $k \geq n$, l'inclusion canonique $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{S}^k$ est toujours non constante et polynomiale. Ainsi, k et n désigneront toujours (sauf indication contraire) des entiers tels que $k < n$. Le premier résultat sera l'observation suivante : trouver une application polynomiale non constante de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^k$ revient exactement à trouver une suite d'applications polynomiales $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-2}$, $\ldots$, $\mathbb{S}^{k+1} \to \mathbb{S}^k$.

Remerciements

Nous tenons à remercier Goulwen FICHOU pour ses aides et indications – qui ont été précieuses au bon déroulement de cette lecture dirigée, pour la bienveillance dont il a fait preuve auprès de nous, et de la curiosité que ce dernier a suscité chez nous. La topologie est un vaste sujet, et nous en avons appris un peu plus.

Table des matières

1 Motivations

1.1 Groupe fondamental

Dans toute cette sous-section, (X, p) désignera un espace topologique pointé (*i.e* que X est un espace topologique et p est un point de X). On appelle *arc continu* toute application

$\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continue. On dira de plus que γ est un *lacet basé en* p si $\gamma(0) = \gamma(1) = p$.

Définition 1.1. *Deux lacets $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \longrightarrow X$ basés en p sont dits homotopes s'il existe une application continue $H : [0,1]^2 \longrightarrow X$ telle que $H(\cdot\,,0) = \gamma_0$ et $H(\cdot\,,1) = \gamma_1$, et $H(0,x) = H(1,x) = p$ pour tout $x \in [0,1]$.*

Remarques.

— L'homotopie entre lacets basés en p définit une relation d'équivalence. On note $[\gamma]$ la classe d'équivalence d'un lacet γ basé en p, et l'on note $\pi_1(X,p)$ l'ensemble de ces classes d'équivalence.

— On peut définir sur $\pi_1(X,p)$ une structure de groupe. D'abord, si $f, g : [0,1] \longrightarrow X$ sont des lacets basés en p, on définit le lacet $f * g$ par $f * g(t) = f(2t)$ si $t \in [0,1/2]$, et $f * g(t) = g(2t-1)$ si $t \in]1/2, 1]$. On vérifie bien évidemment que $f * g$ est un lacet basé en p. On peut alors montrer que la classe d'équivalence $[f * g]$ ne dépend pas du représentant choisi pour $[f]$ et $[g]$. On a alors donné une structure de groupe sur $\pi_1(X,p)$, qu'on appelle alors *groupe fondamental de X basé en p*.

Proposition 1.1. *Soit X un espace topologique connexe par arcs, et $p, q \in X$ des points. Alors, les groupes $\pi_1(X,p)$ et $\pi_1(X,q)$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ une chemin de p à q. Alors, l'application

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X,p) & \longrightarrow & \pi_1(X,q) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha[\gamma]\alpha^{-1} \end{array}$$

est un isomorphisme.

□

Remarque. Ainsi, si X est connexe par arcs, on parlera *du* groupe fondamental, noté $\pi_1(X)$.

Exemples.

— Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, $\pi_1(\mathbb{R}^d)$ est trivial[1].

— On a $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, et $\pi_1(\mathbb{S}^d)$ est trivial dès lors que $d \geq 2$.

1.2 Groupes d'homotopies supérieurs

Une interrogation fondamentale de topologie algébrique est celle des structures des groupes d'homotopie entre sphères. Les groupes d'homotopie d'un espace est une généralisation du groupe fondamental qui fournit des invariants topologiques supplémentaires. Dans toute cette

1. Un tel espace est dit être *simplement connexe.*

section, $\mathcal{B}^i$ désignera la boule unité fermée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^i$. On a bien évidemment $\mathbb{S}^{i-1} = \partial\mathcal{B}^i$. On notera de plus $I = [0,1]$, et $F^{n-1} = \partial I^n$. Si (Y, y_0) est un espace topologique pointé, on notera $F_n(Y, y_0)$ l'ensemble des applications continues f de I^n dans Y telles que $f(F^{n-1}) = \{y_0\}$.

Définition 1.2 (applications homotopes)**.** *Soient X et Y deux espaces topologiques, et soient f et $g \in Y^X$ deux applications continues. On dit que l'application f est* ***homotope*** *à g s'il existe $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ une application continue (pour la topologie produit) telle que $H(\,\cdot\,, 0) = f$ et $H(\,\cdot\,, 1) = g$.*

Remarques.

— Deux fonctions sont homotopes si l'une est "continûment déformable en l'autre". Autrement dit, deux applications continues sont homotopes lorsqu'elles sont dans la même composante connexe par arcs. Ce sont topologiquement les mêmes applications. On comprend bien qu'un tel phénomène est réversible et transitif, ce qui justifie la remarque suivante.

— La relation "être homotopes" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X, Y)$.

  — *(Réflexivité).* Une application $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ est clairement homotope à elle même *via* l'application $X \times [0,1] \to Y$, $(x,t) \mapsto f(x)$.

  — *(Symétrie).* Si f et $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ sont homotopes par H, alors $X \times [0,1] \to Y$, $(x,t) \mapsto H(x, 1-t)$ est une homotopie de g vers f.

  — *(Transitivité).* Si f, g, et $h \in \mathcal{C}(X, Y)$ sont telles que $f \sim g$ *via* H_1 et $g \sim h$ *via* H_2, alors,

$$\begin{array}{ccc} X \times [0,1] & \longrightarrow & Y \\ (x,t) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} H_1(x, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(x, 2t-1) & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1]. \end{array} \right. \end{array}$$

  est une homotopie de f vers h.

Définition 1.3 (groupe d'homotopie)**.** *Soit (Y, y_0) un espace topologique pointé, $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle n-ième groupe d'homotopie de Y en y_0 l'ensemble des classes d'homotopie des éléments de $F_n(Y, y_0)$, noté $\pi_n(Y, y_0)$*

On pose sur cet ensemble la structure de groupe suivante : si f et g sont éléments de $\mathscr{F}_k(Y, y_0)$, alors on pose pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in I^n$,

$$(f * g)(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \begin{array}{ll} f(2x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{si} \quad x_1 \in [0, 1/2], \\ g(2x_1 - 1, x_2, \ldots, x_n) & \text{si} \quad x_1 \in]1/2, 1]. \end{array} \right.$$

Comme en dimension 1 vue précédemment, cette loi est compatible avec les classes d'homotopie, ce qui nous permet de parler de k-ième *groupe* d'homotopie de Y au point y_0 . Remarquons que si $k = 1$, on retrouve bien le groupe fondamental.

Attention. L'idée des groupes d'homotopies est de généraliser le principe du groupe fondamental en s'intéressant aux applications d'une sphère dans un espace topologique pointé. Or, comme vous avez pu le remarquer, nous avons défini les groupes d'homotopies à partir des application du cube de dimension n dans un espace pointé. Cela est tout simplement une convenance pour pouvoir définir la loi de composition interne ci-dessus. Cependant, il faudra bien comprendre[2] que les groupes d'homotopies s'intéressent aux applications des sphères vers un espace pointé. Le cube n'est étudié que pour des questions de formalisme.

Proposition 1.2. *En conservant la même quantification que précédemment,*

— *si $n \geq 2$, le groupe $\pi_k(Y, y_0)$ est abélien ;*

— *soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si y_1 et $y_2 \in Y$ sont dans la composante connexe par arcs, alors $\pi_n(Y, y_1)$ et $\pi_n(Y, y_2)$ sont isomorphes.*

Remarque. Si Y est connexe par arcs, on notera bien évidemment $\pi_n(Y)$ pour parler *du* n-ième groupe d'homotopie de Y.

Dans la même idée que le groupe fondamental permet de comprendre un espace topologique en considérant les lacets (donc des objets de dimension 1 sur cette espace), calculer les groupes d'homotopies d'un espace, c'est comprendre comment dessiner des objets de dimension 2,3, *etc*... dessus. La compréhension des groupes d'homotopie d'un espace est donc une question naturelle et le cas particulier des sphères est la première d'entre elles. Problème : on ne sait pas répondre à cette question aujourd'hui. La faute notamment à un manque d'outils de calculs pour les groupes d'homotopie. La question du calcul général des $\pi_n(\mathbb{S}^k)$ avec $n \geq 2$ reste encore ouverte. On cherche donc à simplifier la question et, ici, on s'intéresse à la classe des applications polynomiales.

Quelques groupes remarquables.

— Si $k \geq 2$, alors $\pi_1(\mathbb{S}^k)$ est trivial.

— Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$. Si $k > n$, alors $\pi_n(\mathbb{S}^k)$ est trivial.

— Si $k = n$, alors $\pi_n(\mathbb{S}^n)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

— Si $n > k$, les résultats sont vastes. En particulier pour $n = 3$ et $k = 2$, la fibration de Hopf fournit un exemple non trivial d'élément de $\pi_3(\mathbb{S}^2)$.

2. puisque l'on peut identifier I^n à $\mathbb{S}^n$...

2 Théorème de Hurwitz-Radon

2.1 Reformulation du problème *via* les formes polynomiales

Proposition 2.1. *Soient n et $k \in \mathbb{N}$, avec $n > k$. Il existe une application polynomiale non constante (APNC) $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^k$ si et seulement si pour tout $i \in [\![0, n-k-1]\!]$, il existe une APNC $\mathbb{S}^{n-i} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-i-1}$.*

Définition 2.1. *Soit $h : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^k$. L'application h est dite être une **forme** de degré d s'il existe $H_1, \ldots, H_{k+1}$ des polynômes homogènes de degré d tel que pour tout $x \in \mathbb{S}^n$,*

$$h(x) = (H_1(x), \ldots, H_{k+1}(x)).$$

On remarquera que la recherche de formes $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^k$ non constantes est équivalente à la recherche d'APNC $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^k$. Si l'on dispose d'une forme de degré d, on a évident une APNC. Le lemme suivant a pour objectif de montrer la réciproque.

Lemme 2.1. *S'il existe une APNC $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^k$, alors il existe une forme non constante $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^k$*

Démonstration. Soit $q : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'application définie pour tout $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ par

$$q(x) = (x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{n+1}^2, 2x_1x_2, \ldots, 2x_1x_{n+1}).$$

On remarque avant tout que q est à image dans $\mathbb{S}^n$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$q(x) = \big(2x_1^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2), 2x_1x_2, \ldots, 2x_1x_{n+1}\big) = (2x_1^2 - 1, 2x_1x_2, \ldots, 2x_1x_{n+1}).$$

Ainsi écrit, on observe que

$$\begin{aligned}
\|q(x)\|^2 &= (2x_1^2 - 1)^2 + 4x_1^2 \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2 \\
&= 4x_1^4 - 4x_1^2 + 1 + 4x_1^2 \left[\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \right) - x_1^2 \right] \\
&= 4x_1^4 - 4x_1^2 + 1 + 4x_1^2(1 - x_1^2) \\
&= 4x_1^4 - 4x_1^2 + 1 + 4x_1^2 - 4x_1^4 = 1.
\end{aligned}$$

De plus, $q(e_1) = e_1$ (où $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$), et q est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage ouvert de e_1 vers un autre voisinage ouvert de e_1. Pour cela, on remarque que le jacobien de q en x ne s'annule que si $x = 0$. On suppose maintenant qu'il existe $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$ une

APNC. Puisque q est $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de e_1, on en déduit que $f \circ q$ est non constante. De plus, q étant une forme quadratique, les monômes de $f \circ q$ sont tous de degré pair. Il suffit alors de multiplier chacun de ses monômes par une puissance de $\|x\|^2$, cela n'affectant pas les valeurs de $f \circ q$ puisque $\|x\|^2 = 1$ sur $\mathbb{S}^n$.

□

Remarque. Puisque $n > k$, une forme $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^k$ est nécessairement de degré pair. En effet, il n'existe aucune application continue $h : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^k$ préservant les antipodes ($i.e$ que $h(-x) = -h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$), voir [Mk], théorème 68.5, p. 404.

2.2 Reformulation *via* les formes de Hopf et théorème de Hurwitz-Radon

2.2.1 Formes bilinéaires normées et formes de Hopf

Définition 2.2 (forme normée, forme de Hopf)**.** *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Une forme bilinéaire $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est dite **normée** si pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$,*

$$\|F(x, y)\| = \|x\| \, \|y\| \, .$$

*On appelle **forme de Hopf associée à la forme bilinéaire normée** F l'application $\varphi : \mathbb{S}^{p+q-1} \longrightarrow \mathbb{S}^k$ de degré définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{S}^{p+q-1}$ par*

$$\varphi(x, y) = (\|x\|^2 - \|y\|^2 \, , 2F(x, y)).$$

Remarques.

— Il faut bien comprendre que choisir $(x, y) \in \mathbb{S}^{p+q-1}$ signifie que l'on choisit $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ de sorte que (x, y) soit de norme 1, $i.e$ que $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$.

— Les multiplications des nombres complexes, des quaternions, et des octonions fournissent des exemples de formes bilinéaires normées $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dans les cas où k est respectivement 2, 4, ou 8.

— De par sa définition, une forme bilinéaire normée est non constante. L'intérêt des ces formes est donc le suivant : si $p + q = n + 1$, l'existence d'une forme bilinéaire normée $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^k$ assure l'existence d'une APNC $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^k$ *via* la forme de Hopf associée à F.

— On remarquera que se donner une forme bilinéaire normé $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est équivalent à se donner $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ des formes bilinéaires $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$(x_1^2 + \cdots + x_p^2)(y_1^2 + \cdots + y_q^2) = \varphi_1(x, y)^2 + \cdots + \varphi_k(x, y)^2$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Notations.

— Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. On note $p * q$ le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe une forme bilinéaire normée $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^k$.

— Notons $k = 2^{4a+b}d$ où $a, b, d \in \mathbb{N}$, et tel que d est impair et $b \in [\![0, 3]\!]$ (a et b sont respectivement les quotient et reste de la division euclidienne de $\nu_2(k)$ par 4). On note $\rho(k) = 8a + 2^b$. La fonction ρ définie sur $\mathbb{N}^*$ est appelée *fonction de* Hurwitz-Radon. Cette fonction fait l'objet du théorème suivant.

2.2.2 Théorème et conséquences

Théorème 2.1 (Hurwitz-Radon)**.** *Pour tous $k, r \in \mathbb{N}^*$, $r * k = k$ si et seulement si $r \leq \rho(k)$.*

Corollaire 2.1. *Pour tous $r, k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $r \leq \rho(k)$, il existe une forme de* Hopf *de $\mathbb{S}^{r+k-1}$ dans $\mathbb{S}^{k+q}$.*

Démonstration. Soient $r, k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $r \leq \rho(k)$. Alors, par le théorème d'Hurwitz-Radon, il existe une forme bilinéaire normée $F : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$. On note alors $\varphi : \mathbb{S}^{r+k-1} \longrightarrow \mathbb{S}^k$ la forme de Hopf associée à F. On a donc construit une forme de Hopf de $\mathbb{S}^{r+k-1}$ dans $\mathbb{S}^{k+q}$ dans le cas $q = 0$. Pour le cas $q > 0$, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\psi_k : \mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathbb{S}^{k+1}$, $x \mapsto (x, 0)$ l'inclusion canonique. Par exemple, pour le cas $q = 1$, on pose $\varphi_1 = \psi_k \circ \varphi$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{S}^{r+k-1}$, on a

$$\varphi_1(x, y) = \psi_1(\varphi(x, y)) = \psi_1(\|x\|^2 - \|y\|^2, F(x, y)) = (\|x\|^2 - \|y\|^2, F(x, y), 0).$$

Pour transformer φ_1 en une forme de Hopf, on définit $F_1(x, y) = (F(x, y), 0) \in \mathbb{R}^{k+1}$. On remarque alors que F_1 est bien une forme bilinéaire normée puisque $\|F_1(x, y)\|^2 = \|F(x, y)\|^2 + 0^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$, dont φ_1 est la forme de Hopf associée. On construit de cette façon une forme de Hopf à tout rang q.

□

Corollaire 2.2. *Si n est de la forme $n = 2^c d$ où $c \in [\![0, 3]\!]$ et $d \neq 1$ est un nombre impair, alors il existe une forme de* Hopf *de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Démonstration. Pour utiliser le corollaire précédent, on doit trouver r, k et q tels que $r + k - 1 = n$ et $k + q = n - 1$. On remarque qu'il est nécessaire que $k \in [\![1, n-1]\!]$, et que $n - k + 1 = r \leq \rho(k)$. On prend alors $k = n - 2^c = 2^c(d-1)$. Puisque $d - 1$ est pair, on voit que k est de la forme $2^{c+c'}d'$ où c' est un entier et d' est un entier impair. On distingue alors quelques cas (en remarquant que $r = 2^c + 1$).

— Si $c = 0$, on a $\rho(k) \geq 2$, et $r = 2$;

— si $c = 1$, on a $\rho(k) \geq 4$, et $r = 3$;

— si $c = 2$, on a $\rho(k) \geq 8$, et $r = 5$;

— si $c = 3$, on a $\rho(k) \geq 16$, et $r = 9$.

□

Remarques.

— Si $n = 2^4 \cdot 3$, on a $r = 2^4 + 1 = 17$ et $k = 2^5 = 2^{4 \cdot 1+1}$, donc $\rho(k) = 8 + 2^1 = 10 < r$. On ne peut pas appliquer le corollaire précédent. On montrera plus tard qu'il n'existe aucune forme de Hopf $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ dans le cas $n = 2^4 \cdot 3$.

— De par ce corollaire, nous avons dégagé la voie pour bon nombre de cas en donnant une condition suffisante. Le théorème suivant énonce un condition nécessaire qui nous permettra d'écarter les puissances de 2, où le problème n'a pas de solution.

Théorème 2.2. *Si $n \in \mathbb{N}^*$ est une puissance de 2, et que $k < n$, alors toute application polynomiale de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^k$ est constante.*

Démonstration. Il suffit en fait de démontrer que toute forme $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ est constante si n est une puissance de deux. Soit alors $H : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ une forme de degré d dont les fonctions coordonnées dans la base canonique sont les polynômes $H_1, \ldots, H_n \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on a

$$\|H(x)\|^2 = H_1(x)^2 + \ldots + H_n(x)^2 = \|x\|^{2d} \left[H_1\left(\frac{x}{\|x\|}\right)^2 + \ldots + H_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right)^2 \right] = \|x\|^{2d}.$$

On suppose par l'absurde que H est une forme non constante (donc $d > 0$). Quitte à diviser $H(x)$ par $\|x\|^2$, on peut supposer qu'il existe un polynôme H_i qui n'est pas divisible par $\|x\|^2$ (en terme de division polynomiale. On écrit H sous la forme

$$H(x_1, \ldots, x_{n+1}) = P(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}^2) + x_{n+1} Q(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}^2)$$

où $P = (P_1, \ldots, P_n)$ et $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ sont tels que $P_i, Q_j \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$. Puisque pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|H(x)\|^2 = \|x\|^{2d}$, on a

$$\|P(x)\|^2 + u \|Q(x)\|^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2 + u)^d,$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i = 0.$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $u \in \mathbb{R}$. On note $F(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n, -(x_1^2 + \cdots + x_n^2))$ et $G(x_1, \ldots, x_n) = Q(x_1, \ldots, x_n, -(x_1^2 + \cdots + x_n^2))$, on a alors (pour $u = -(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$),

$$\|F(x)\|^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2) \|G(x)\|^2.$$

Nécessairement, G est non nul car sinon F le serait aussi. Or si F était nul, on aurait en particulier que $\|x\|^2$ diviserait les composantes de P et de Q, donc les H_i, ce qui n'est pas possible. On alors dans $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$ l'égalité

$$X_1^2 + \cdots + X_n^2 = \frac{\|F\|^2}{\|G\|^2}.$$

Or P et Q étant "orthogonaux", on a que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\|x\|^2 = \frac{\|F(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}G(x_1, \ldots, x_n)\|^2}{\|G(x_1, \ldots, x_n)\|^2}.$$

On pose enfin

$$V(x) = \frac{F(x_1, \ldots, x_n) + x_{n+1}G(x_1, \ldots, x_n)}{\|G(x_1, \ldots, x_n)\|^2},$$

ce qui donne

$$x_1 + \cdots x_{n+1}^2 = \|V(x)\|^2 \|G(x_1, \ldots, x_n)\|^2.$$

Or, selon un résultat d'Albrecht Pfister relatif au dix-septième problème de Hilbert[3] (voir [Pf67]), puisque n est une puissance de 2, les polynômes $\|V\|^2$, $\|G\|^2$, et $\|V\|^2 \|G\|^2$ peuvent s'écrire comme la somme d'exactement n carrés dans le corps $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_{n+1})$. Or, $X_1^2 + \cdots + X_{n+1}^2$ ne peut s'écrire comme la somme de n carrés. On en déduit par l'absurde que H est une forme constante.

□

Remarque. Combinés, le corollaire 2.2 et le théorème 2.2 permettent de conclure jusqu'à $n = 47$ inclus.

Corollaire 2.3. *Soit $n > k$ deux entiers non nuls. S'il existe APNC de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^k$, alors il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que*

$$2^r \leq k < n < 2^{r+1}.$$

Si $n \leq 47$, la réciproque est vraie.

Remarque. En fait, il nous est encore inconnu de savoir si la réciproque est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou ne serait-ce que pour un certain $n > 47$).

Démonstration. — $(i) \implies (ii)$. On suppose qu'il existe une application de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{S}^k$. Alors, il existe des applications $\mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, $\mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-2}, \ldots, \mathbb{S}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{S}^k$. On en déduit par le corollaire précédent que pour tout $j \in [\![k+1, n]\!]$, j n'est pas une puissance de 2. On en déduit que k et n sont encadrés par deux puissances de 2 (disons 2^r et 2^{r+1} pour un certain $r \in \mathbb{N}$) et que $n \neq 2^{r+1}$.

3. Allez voir Dounia et Brian pour ça...

— (*ii*) $\implies$ (*i*) (lorsque $n \leq 47$). Les résultats principaux, *i.e* le corollaire 2.2 et le théorème 2.2, permettent de conclure en faisant du cas par cas.

$\square$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	…	15	16	…	31	32	…	47	48
1	+																
2	−	+															
3	−	+	+														
4	−	−	−	+													
5			−	+	+												
6			−	+	+	+											
7				+	+	+	+	+						+			
8								+									
⋮																	
15							−	+		+	+						
16							−	−		−	+						
⋮																	
31										−	+		+	+			
32					−					−	−		−	+			
⋮																	
47													−	+		+	+
48													−	?		?	+
															?		

Figure 1 – En résumé.
Les "+" désigne les cas où le problème a une solution positive, les "-" le cas contraire.

3 Exemple : la fibration de Hopf

Si X est un espace topologique, on essaie de le définir localement comme un produit d'une "base" et d'une "fibre". Dans cette idée, la fibration de Hopf donne une partition de $\mathbb{S}^3$ en cercles grâce à une application polynomiale.

Essentiellement, on dit qu'une fibration sur un espace X est la donnée d'un espace de base B, d'une fibre F application continue et surjective $p : B \to X$ telle que les fibres de p sont homéomorphes à F. On voit alors localement l'espace X comme le produit $B \times F$

Dans le plan complexe $\mathbb{C}^2$, la sphère $\mathbb{S}^3$ s'identifie à l'ensemble des $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. On peut faire agir le groupe $\mathbb{U}$ des complexe de module 1 sur $\mathbb{S}^3$ *via* l'action définie pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in U$ par

$$\lambda \cdot (z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2).$$

Les orbites de cette action sont des cercles. On introduit l'application de Hopf

$$p : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & (|z_1|^2 - |z_2|^2, 2z_1\overline{z_2}). \end{array} \right.$$

On peut voir p comme une application à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. un rapide calcul nous montre que p envoie $\mathbb{S}^3$ sur $\mathbb{S}^2$. Soient $(z_1, z_2), (z_3, z_4) \in \mathbb{S}^3$ tels que $p(z_1, z_2) = p(z_3, z_4)$, alors, il existe $\lambda \in \mathbb{U}$ tel que $(z_1, z_2) = \lambda.(z_3, z_4)$. On en déduit que les fibres de p sont des cercles (c'est-à-dire homéomorphes à $\mathbb{S}^1$) appelés cercles de Hopf. En effet, si $p(z_1, z_2) = p(z_3, z_4)$, on a $|z_1|^2 - |z_2|^2 = 2|z_1|^2 - 1 = 2|z_3|^2 - 1$ d'où $|z_1| = |z_3|$. De plus, on a $\frac{z_1}{z_3} = \frac{\overline{z_4}}{z_2}$. Le membre de gauche est de module 1 donc celui de droite aussi et, si on pose $\lambda := \frac{z_1}{z_3} \in \mathbb{U}$, on a $\lambda = \frac{\overline{z_4}}{z_2} = \frac{z_2}{z_4}$ d'où le résultat.

Leur nature de fibre donne aux cercles de Hopf la qualité de ne pas s'intersecter deux à deux et de former alors une partition de $\mathbb{S}^3$.

Références

[Ser49] Jean-Pierre Serre, Groupes d'homotopie, Séminaire Henri Cartan, tome 2, , exposé n°2, p.1-7, 1949–1950.
http://www.numdam.org/article/SHC_1949-1950__2__A2_0.pdf

[BCR] Jacek Bochnak, Michel Coste, Marie-Françoise Roy, *Real algebraic geometry*, volume 36, chapitre 13.

[Mk] James R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, p. 404.

[Pfi67] Albrecht Pfister, *Zur darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten*, *Inventiones mathematicae*, volume 4, page 229-237, 1967–1968.
https://eudml.org/doc/141892