École Normale Supérieure de Rennes

DANF

DISTRIBUTION & ANALYSE DE FOURIER

Fonctions tests, topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$, distributions et opérations élémentaires (dérivation, multiplication, recollement, composition, intégration), distributions à support compact, convolution de distributions, transformation de Fourier, distributions tempérées

Auteur
Arnaud Debussche

Notes de cours
Victor Lecerf

2020–2021

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et rappels

1.1 Motivations

1.2 Fonctions à support compact

1.2.1 Topologie des espaces compacts

Notations. Dans toute la suite de ce cours, on adoptera la notation suivante :

- Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$,
- $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application,
- $f_1, \ldots, f_n$ sont les composantes de f,
- $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des fonctions $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ différentiables à l'ordre $k \in \mathbb{N}$ et de différentielle k-ième continue,
- $\mathcal{C}^k(\Omega) := \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$,
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$,
- Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, avec $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_d \leq k$ et tout $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, on note

$$\partial^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}}.$$

Cette notion ne pose aucune ambiguïté comme l'affirme le théorème de SCHWARTZ.

Topologie de $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. On cherche à trouver une bonne topologie pour $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Nous ne prendrons pas celle induite par la norme uniforme car elle n'est pas toujours pratique. Soit $(K_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite de compacts tels que $\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} K_\ell = \Omega$. Par exemple,

$$K_\ell = \{x \in \Omega \mid \|x\| < \ell,\ \mathrm{d}(x, \partial\Omega) \geq 1/\ell\}.$$

Pour $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $\ell \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_\ell^k(f) = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K_\ell} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Les applications p_ℓ^k se sont que des semi-normes. Cependant, $f = 0$ *si et seulement si* $p_\ell^k(f) = 0$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. On pose alors pour tout $f, g \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$,

$$\mathrm{d}(f,g) = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \frac{\min(p_\ell^k(f-g),1)}{2^\ell} < \infty.$$

Cette application définit une distance sur $\mathcal{C}^k(\Omega, R^n)$. Cette distance induit les propriétés suivantes.

Proposition 1.2.1. *Soient $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$ et $f \in \mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Alors,*

(i) $\mathrm{d}(f_n, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *si et seulement si* $p_\ell^k(f_n - f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *pour tout* $\ell \in \mathbb{N}$.

(ii) L'espace métrique $(\mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^n), \mathrm{d})$ est complet, appelé espace de Fréchet.

Topologie de $\mathcal{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Pour $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$, on pose

$$\mathrm{d}(f,g) := \sum_{k,\ell\in\mathbb{N}} \frac{\min(p_\ell^k(f-g),1)}{2^{k+\ell}},$$

ce qui définit une distance sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$.

1.2.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Notations. Soient $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d), \beta = (\beta_1,\dots,\beta_d) \in \mathbb{N}^d$, et $x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$. On note

— $x^\alpha = \prod_{i=1}^d x_i^{\alpha_i}$,

— $\alpha \le \beta$ *si et seulement si* $\alpha_i \le \beta_i$ pout tout $i \in [\![1,d]\!]$,

— $\alpha! = \prod_{i=1}^d \alpha_i!$,

— $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \prod_{i=1}^d \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

Avec ces notations, on a les résultats suivants.

Proposition 1.2.2 (formule de Leibniz)**.** *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \le k$, et $f, g \in \mathcal{C}^k(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Alors,*

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g.$$

Proposition 1.2.3 (multinôme de Newton)**.** *Soit $(x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$(x_1 + \ldots + x_d)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha.$$

Notations. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On note

$$\nabla f = (\partial_1 f, \ldots, \partial_d f).$$

On a $df(x) \cdot h = \langle \nabla f(x), h \rangle$ pour tout $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^d$ tels que $x + h \in \Omega$. Pour $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^d)$, on pose

$$\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Pour $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ avec $k \geq 2$, on a

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Proposition 1.2.4 (formule de Taylor avec reste intégral)**.** *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{k+1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $[a, b] \subset \Omega$. Alors,*

$$f(b) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{(\beta - \alpha)!}{\alpha!} \partial^\alpha f(\alpha) + \sum_{|\alpha| = k+1} (b - a)^\alpha \int_0^1 \frac{(1 - t)^k}{k!} \partial^\alpha f(ta + (1 - t)b) \, \mathrm{d}t.$$

1.2.3 Support d'une fonction

Définition 1.2.1. *Le **support** d'une fonction continue $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \,|\, f(x) \neq 0\}}.$$

On dit que f est à support compact si son support est compact. Pour $k \in [1, \infty]$, on note $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ (ou $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$) l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ à support compact. On note $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Remarques.

— Bon courage pour faire de la topologie sur cet espace. En l'occurence, cet espace n'est pas fermé dans $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

— Si $\operatorname{supp} f$ est non vide (*i.e* f non nulle), puisque f est continue, $\operatorname{supp} f$ contient au moins un ouvert de Ω.

Exemples de fonctions à support compact. Dans $\mathbb{R}$, on considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$. La fonction

$$\rho_{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(a - x) f(x - b). \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le support $[a,b]$ est compact. En dimension d, si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ sont tels que $\alpha \leq \beta$, alors la fonction

$$\begin{array}{rccl} \sigma_{a,b} : & \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \dots, x_d) & \longmapsto & \rho_{a_1,b_1}(x_1) \cdots \rho_{a_d,b_d}(x_d). \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. De même, la fonction $\theta : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\theta(x) = f(1 - \|x\|^2)$ en est une. On considère de plus

$$\begin{array}{rccl} F_{a,b} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\int_{-\infty}^x \sigma_{a,b}(y)\,\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}} \sigma_{a,b}(y)\,\mathrm{d}y}. \end{array}$$

Par composition, la fonction $G_{a,b}$ définie par $G_{a,b}(x) = 1 - F_{a,b}(1 - \|x\|^2)$ est à support compact.

1.2.4 Régularisation

Définition 1.2.2. *Soient $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications mesurables définies presque partout. On dit que f et g sont convolable si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'application*

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x-y)g(y). \end{array}$$

est élément de $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On pose alors

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy.$$

lorsque c'est bien défini.

Remarque. f et g sont convolables *si et seulement si* g et f le sont. En fait, $f * g = g * f$. Cette notion ne concerne que les classes d'équivalences.

Notation. On note $L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d)$ (ou $L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^d$. Il a une structure d'espace de Fréchet complet pour les semi-normes définies par

$$p_n(f) = \int_{\mathcal{B}_f(0,n)} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Exemples. Soient $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}^d,\ |f(x-y)g(y)| \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^d} |f(z)||g(y)|\mathbb{1}x - K$$

Proposition 1.2.5. *Soient $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $g \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors, $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit le compact $K = \operatorname{supp} f$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(x-y)g(y)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)||g(y)|\mathbb{1}_{x-K}.$$

Or, $x - K$ est compact, il est donc contenu dans une boule $\mathcal{B}_f(0, M)$. Ainsi,

$$|f(x-y)g(y)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)||g(y)|\mathbb{1}_{\mathcal{B}_f(0,M)}.$$

Le théorème de convergence dominée nous montre alors que $f * g$ est continue sur $\mathcal{B}_f(0, M)$, et donc sur $\mathbb{R}^d$ entier.

□

On a le résultat suivant, plus général, sur la régularité d'une convolution. La démonstration est la même.

Proposition 1.2.6. *Soit* $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $g \in L^1_{\ell oc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, *alors* $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *et :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq k,\ \partial^\alpha (f * g) = \partial^\alpha f * g.$$

Remarque. En résumé, “la régularité de $f * g$ est la meilleure des régularités de f, g”.

1.2.5 Retour sur le support

Si l'on prend $f = \mathbb{1}_Q$, on remarque $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}$, et pourtant f est nulle presque partout. Notre définition du support se transpose mal aux fonctions mesurables. On élargit donc la définition du support de la manière suivante.

Définition 1.2.3. *Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. On note* $O(f)$ *l'ensemble des ouverts* $O \subset \Omega$ *où* f *est nulle presque partout. On définit le support de cette fonction mesurable par*

$$\operatorname{supp} f = \left(\bigcup_{O \in O(f)} O \right)^c.$$

Proposition 1.2.7. *L'ensemble* $(\operatorname{supp} f)^c$ *est le plus grand ouvert tel que* f *y soit nulle presque partout.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $(\operatorname{supp} f)^c \in O(f)$ (il sera le plus grand par définition). L'ensemble $(\operatorname{supp} f)^c$ est ouvert comme unions d'ouverts. On pose

$$V = \bigcup_{\substack{x \in \mathbb{Q}^d \cap \Omega \\ r \in \mathbb{Q} \\ \mathcal{B}(x,r) \in O(f)}} \mathcal{B}(x, r).$$

On remarque alors que f est nulle presque partout sur V, donc $V \subset (\operatorname{supp} f)^c$. Soit maintenant $z \in (\operatorname{supp} f)^c$. Il existe $O \in O(f)$ tel que $z \in O$. Puisque O est ouvert, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\mathcal{B}(z,r) \subset O$. De plus, il existe $\tilde{z} \in \mathbb{Q}^d$ tel que $|z - \tilde{z}| < r/4$. Ainsi, $\mathcal{B}(\tilde{z}, r/2) \subset \mathcal{B}(z,r) \subset O$ et f est nulle presque partout sur $\mathcal{B}(\tilde{z}, r/2)$ avec $z \in \mathcal{B}(\tilde{z}, r/2)$. Ainsi, $z \in V$. D'où $V = (\operatorname{supp} f)^c \in O(f)$.

□

Proposition 1.2.8. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$. Alors, $f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$.*

Les définition du support pour les fonctions continues et mesurables coïncident.

Proposition 1.2.9. *Soient $f, g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions convolables. Alors,*

$$\operatorname{supp} f * g \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}.$$

De plus, si l'un des supports est compact,

$$\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

Démonstration. Soit $\tilde{f} = f \mathbb{1}_{\operatorname{supp} f}$ et $\tilde{g} = g \mathbb{1}_{\operatorname{supp} g}$ alors $\tilde{f} = f$ p.p et $\tilde{g} = g$ p.p. On en déduit que $\operatorname{supp} \tilde{f} = \operatorname{supp} f$ et $\operatorname{supp} \tilde{g} = \operatorname{supp} g$. Alors, $f * g = \tilde{f} * \tilde{g}$. Soit $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $x - y \notin \operatorname{supp} f$ ou $y \notin \operatorname{supp} g$. Ainsi, $f(x-y) = 0$ ou $g(y) = 0$. Ainsi, $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y = 0$. Alors, $f * g$ est nulle sur $(\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)^c$ donc sur $(\overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g})^c$. On en déduit alors le résultat.

□

Proposition 1.2.10 (Inégalité de Young)**.** *Soit $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors, f et g sont convolables et $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} .$$

Démonstration.

— Cas $p = q = r = 1$. On a par Fubini-Tonelli que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) g(y)| \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| \, \mathrm{d}x \right) |g(y)| \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \, \mathrm{d}z \right) |g(y)| \, \mathrm{d}y \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

— Cas $q = 1$, $r = p$.

— Le cas général se démontre de la même manière, on utilise encore l'inégalité d'Hölder. Les calculs sont simplement plus fournis.

□

1.2.6 Densité des fonctions continues à support compact

Définition 1.2.4. *On appelle* ***suite régularisante*** *toute famille* $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *de* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *telle que pour tout* $\varepsilon > 0$,

- $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1$,
- ρ_ε *est à valeurs positives,*
- *il existe* $r_\varepsilon > 0$ *tel que* $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon \subset \mathcal{B}_f(0, r_\varepsilon)$, *tel que* $r_\varepsilon \to 0$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Exemple. Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une fonction à valeurs positives telle que $\operatorname{supp} f \subset \mathcal{B}_f(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}}^d \rho(x)\,\mathrm{d}x = 1$. On pose pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

et $r_\varepsilon = \varepsilon$. On peut par exemple choisir ρ sous la forme

$$\rho(x) = \frac{\theta(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \theta(y)\,\mathrm{d}y}$$

avec $\theta(x) = e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} \mathbb{1}_{\mathcal{B}(0,1)}$.

Proposition 1.2.11. *Soit* $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, *et* $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une suite régularisante. Alors, les éléments de* $(\rho_\varepsilon * f)_{\varepsilon>0}$ *sont éléments de* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *et cette suite converge uniformément vers* f.

Théorème 1.2.1. *Soit* $p \in [1, \infty[$. *Alors, l'espace* $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 1.2.2. *Soit* $p \in [1, \infty[$. *L'espace* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. *Plus précisément, si* $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, *alors il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *convergeant uniformément vers* f. *De plus, pour toute suite régularisante* $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, *on a* $\rho_\varepsilon * f \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} f$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

1.2.7 Fonctions plateaux et partitions de l'unité

Théorème 1.2.3. *Soient* K *un compact de* $\mathbb{R}^d$ *et* O *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *tels que* $K \subset O$. *Alors il existe* $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ *tel que*

- χ *est constante à 1 sur un certain ouvert* U *tel que* $K \subset U$,
- $\operatorname{supp} \chi \subset O$.

Démonstration. Soit $x \in K$. Il existe $r_x > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r_x) \subset O$. On considère $\rho : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ définie pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ par

$$\rho(y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|y\|^2-1}} & \text{si } \|y\| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose alors $F_x : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ définie pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ par

$$F_x(y) = \rho\left(\frac{x-y}{r_x}\right).$$

Ainsi, $F_x \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\operatorname{supp} F_x = \mathcal{B}_f(x, r_x)$. On note

$$O_x = \{y \in \mathcal{B}(x, r_x) \,|\, F_x(y) \geq 1/2e\}.$$

On a alors que $K \subset \bigcup_{x \in K} O_x$. Par compacité, il existe $x_1, \dots, x_N \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^N O_{x_i}$. On pose $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, des fonctions définies par les méchanismes

$$g : y \longmapsto 2e \sum_{i=1}^N F_{x_i}(y) \quad \text{et} \quad \psi : t \longmapsto \frac{\int_{-\infty}^t \mathbb{1}_{[0,1]}(x) e^{-\frac{1}{x(x-1)}} \, \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} vse^{-\frac{1}{x(x-1)}} \, \mathrm{d}x}$$

Alors, ψ est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et ψ est constante à 1 sur $[1, \infty[$. On pose alors $\chi = \psi \circ g$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition. On pose alors $U = \bigcup_{i=1}^N O_{x_i}$. Ainsi, pour tout $y \in U$, $g(y) > 1$, donc $\chi_(y) = g(\psi(y)) = 1$. On a donc

$$\operatorname{supp} \chi \subset \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_f(x_i, r_{x_i}) \subset O.$$

□

Proposition 1.2.12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ (pour la topologie de $L^p(\mathbb{R}^d)$).*

Démonstration. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, et $\varepsilon > 0$. On cherche $h \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\|f - h\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon$. On prolongeg f en une fonction de $L^p(\mathbb{R}^d)$ en posant $\tilde{f}_{|\Omega^c} = 0$. Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, il existe $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $||\tilde{f} - h||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon$. On a donc

$$\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|\tilde{f} - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

Le problème maintenant est que l'on ne sait pas si $g_{|\Omega} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$K_n = \{x \in \Omega \,|\, d(x, \partial\, \Omega) \geq 1/n, \, \|x\| \leq n\}.$$

C'est un compact, et on a $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. On considère alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ une fonction $\chi_n \in L^p(\mathbb{R}^d)$, constante à 1 sur un voisinage ouvert de K_n et $\operatorname{supp} \chi_n \subset \Omega$. Comme $|h\chi_n| \leq |h|$, le théorème de convergence affirme que $h\chi_n \longrightarrow_{n \to \infty} h$ dans $L^p(\Omega)$. Soit alors $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|h\chi_n - h\| \leq \varepsilon$. On a par inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} \|f - h\chi_n\|_{L^p(\Omega)} &\leq \|f - h\|_{L^p(\Omega)} + \|h - h\chi_n\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|\tilde{f} - h\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|h - h\chi_n\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.4 (partition de l'unité)**.** *Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, $O_1, \dots, O_n$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^n O_k$ et $O_k \cap K \neq \varnothing$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Alors, il existe $\chi_1, \dots, \chi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tels que*

— $\operatorname{supp} \chi_k \subset O_k$ *pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$,

— $\chi_k(x) \in [0, 1]$ *pour tout* $x \in \Omega$, $k \in [\![1, n]\!]$,

— $\sum_{k=1}^n \chi_k$ *est constante à 1 sur un voisinage ouvert de* K.

Démonstration. Il existe des compacts $K_1, \dots, K_n$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i \quad \text{et} \quad K_i \subset O \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

En effet, pour $x \in K$, il existe $i_x \in [\![1, n]\!]$ tel que $x \in O_{i_x}$. Puisque O_{i_x} est ouvert, il existe $r_x > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r_x) \subset O_{i_x}$. Ainsi,

$$K \subset \bigcup_{x \in K}^n \mathcal{B}(x, r_{x_\ell}/2).$$

Par compacité, il existe $x_1, \dots, x_N \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{\ell=1}^n \mathcal{B}(x_\ell, r_{x_\ell}/2).$$

On pose alors

$$K_i = \bigcup_{\substack{\ell=1 \\ x_\ell \in O_i}}^n \mathcal{B}_f(x_\ell, r_{x_\ell}/2).$$

On a donc montré l'existence de tels compacts. Soit $i\, [\![1, n]\!]$. Par le théorème précédent, il existe une fonction $\tilde{\chi}_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que ...

□

Proposition 1.2.13. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, et $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$. Alors, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, on a*

$$\int_\Omega \partial_i f(x) \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f(x) \partial_i \varphi(x)\, dx.$$

Démonstration. — Cas $d = 1$ et $\Omega =]a, b[$ avec $a < b$ des réels. Puisque φ est à support compact dans l'intervalle $]a, b[$, une intégration par parties donne

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\, \mathrm{d}x.$$

— Cas $d \geq 1$ et $\Omega = \prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$. Par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \partial_i f_i(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= -\int_\Omega f(x)\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

— Cas général. On pose $K = \operatorname{supp}\varphi$. Par compacité, on peut écrire

$$K \subset \prod_{\ell=1}^{N} P_\ell \quad \text{avec} \quad P_\ell = \prod_{i=1}^{d}]a_{i,\ell}, b_{i,\ell}[\text{ pour } \ell \in [\![1, d]\!].$$

D'après le théorème précédent, il existe $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tels que

— $\operatorname{supp}\chi_k \subset O_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

— $\chi_k(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in \Omega$, $k \in [\![1, n]\!]$,

— $\sum_{k=1}^{n} \chi_k$ est constante à 1 sur un voisinage ouvert de K.

Alors, $\chi_\ell\varphi$ est à support compact. On a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_i f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{\ell=1}^{N} \int_\Omega \partial_i f(x)\chi_\ell(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{\ell=1}^{N} \int_{P_\ell} \partial_i f(x)(\chi_\ell\varphi)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{\ell=1}^{N} \int_{P_\ell} f(x)\partial_i(\chi_\ell\varphi)(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega f(x)\partial_i\varphi(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Application. Pour tout $g \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, et $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\int_\Omega f(x)\nabla g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \operatorname{div} f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chapitre 2

Distributions, exemples et opérations

2.1 Distributions et exemples

Définition 2.1.1 (distribution)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution si, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dont le support est inclus dans K, on ait*

$$\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi) \leq C_K \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq p_K}} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

T est dit être d'ordre inférieur ou égal à $p \in \mathbb{N}$ si $p_K \leq p$ pour tout compact K de Ω.

Notation. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

Exemple fondamental. Soit $f \in L^1_{\ell oc}(\Omega, \mathbb{R})$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} T_f : & \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \end{array}$$

T_f est une distribution, d'ordre 0.

Lemme 2.1.1. *Soit $f \in L^1_{\ell oc}(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors, f est nulle presque partout.*

Démonstration. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$, et $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ une approximation de l'unité. On prolonge $f\theta$ sur $\mathbb{R}^d$ par 0. Ainsi, ce prolongement (toujours noté $f\theta$) est de $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f\theta * \rho_\varepsilon = 0$ pour ε suffisamment petit. Or, $f\theta * \rho_\varepsilon \to f\theta$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. On en déduit que $f\theta$ est nulle presque partout. On écrit maintenant $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ où les K_n sont des compacts. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $\theta_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau telle que $\theta_n = 1$ sur K_n et $\operatorname{supp}\theta \subset \Omega$. Alors, $f\theta_n = 0$ presque partout sur Ω. On en déduit donc que f est nulle presque partout sur Ω.

$\square$

Ce lemme assure qu'il existe un prolongement de $L^1_{\ell oc}(\Omega,\mathbb{R})$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ *via* l'injection $f \mapsto T_f$. On confondra parfois f et T_f. On peut alors considérer que tout $f \in L^1_{\ell oc}(\Omega,\mathbb{R})$ est élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemples.

— Soit $a \in \Omega$. On considère l'application

$$\delta_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(a). \end{array}$$

δ_a est une distribution, mais elle ne s'identifie à aucune fonction. Nous allons le montrer par l'absurde. Supposons qu'il existe une fonction $f \in L^1_{\ell oc}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$. Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau à valeurs dans $[0,1]$, et telle que

$$\theta_{|\mathcal{B}(0,1)} = 1 \quad \text{et} \quad \theta_{|\mathcal{B}(0,3/2)^c} = 0.$$

De plus, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \theta(n(x-a))$. Ainsi, on a $\operatorname{supp}\theta_n \subset \mathcal{B}(a,3/2n) \subset \Omega$ pour n suffisamment grand. Alors,

$$1 = \langle \delta_a, \theta_n \rangle = \int_\Omega f(x)\theta_n(x)\,\mathrm{d}x \le \int_{\mathcal{B}(a,3/2n)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \longrightarrow 0,$$

ce qui est absurde.

— Soit $\mu : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une mesure de masse finie sur les compacts. Alors l'application

$$T_\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}\mu. \end{array}$$

est une distribution sur Ω.

— Soient $x_0 \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

Définition 2.1.2. *On appelle* ***valeur principale*** *de la fonction $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto 1/x$, l'application*

$$\mathrm{vp}(1/x) : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi\rangle = \displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x. \end{array}\right.$$

C'est une distribution d'ordre 1.

Démonstration. □

Définition 2.1.3. *Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite* ***positive*** *si :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ (\varphi \ge 0) \implies (\langle T,\varphi\rangle \ge 0).$$

Exercice. Soit $f \in L^1_{\ell oc}(\Omega)$. Alors, T_f est postive *si et seulement si* f est positive.

Proposition 2.1.1. *Les distributions positives sont d'ordre* 0.

Démonstration. Soit K un compact de Ω. Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau telle que θ est constante à 1 sur un voisinage ouvert de K, et $\operatorname{supp}\theta \subset \Omega$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, on a

$$\langle T, \|\varphi\|_\infty \theta - \varphi \rangle \geq 0.$$

Ainsi, $\langle T, \varphi \rangle \leq C_k \|\varphi\|_\infty$ où $C_K = \langle T, \theta \rangle$. On déduit que T est d'ordre 0.

□

2.2 Dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 2.2.1.
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si

- *pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a $\|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)\|_\infty \longrightarrow 0$,*
- *il existe un compact K de Ω tel que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 2.2.1. *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Sont équivalents :*

(i) T est une distribution.

(ii) Pour tout suite $(\varphi_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente de limite $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $(\langle T, \varphi_n \rangle)_n$ converge vers $T(\varphi)$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ On Suppose que T est une distribution. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ (au sens de la définition 2.2.1). Par définition, il existe un compact K de Ω tel que $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Puisque T est une distribution, il existe $C_K \geq 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que

$$| \langle T, \varphi_n - \varphi \rangle \leq C_K \sup_{|\alpha|\leq p_K} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Par contraposition, on suppose que T n'est pas une distribution. Alors, il existe un compact K de Ω tel que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi_{n,p} \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\operatorname{supp}\varphi_{n,p} \subset K \quad \text{et} \quad \langle T, \varphi_{n,p} \rangle > n \sup_{|\alpha|\leq p} \|\partial^\alpha \varphi_{n,p}\|_\infty .$$

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et $\varphi_{n,p} \in \mathcal{D}(\Omega)$ une telle fonction. On pose

$$\psi_{n,p} = \frac{\varphi_{n,p}}{\langle T, \varphi_{n,p} \rangle}.$$

Alors,

$$1 > n \sup_{|\alpha\leq p} \|\partial^\alpha \psi_{n,p}\|_\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}\psi_{n,p} \subset K.$$

Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq n$, on a $\|\partial^\alpha \psi_{n,n}\| < 1/n$. Or, $\psi_{n,n} \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, mais $\langle T, \psi_{n,n} \rangle$ ne tend pas vers 0.

$\square$

2.3 Convergence de distributions

Définition 2.3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $(\langle T_n, \varphi\rangle)_n$ converge vers $\langle T, \varphi\rangle$ dans $\mathbb{R}$.*

Exemples.

- Soient $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^1_{\ell oc}(\Omega)$ et $f \in L^1_{\ell oc}(\Omega)$, telles que $f_n \longrightarrow f$. Alors, $T_{f_n} \longrightarrow T_f$.
- Soient $(a_n)_n$ une suite d'éléments de Ω convergeant vers un élément $a \in \Omega$. Alors, $\delta_{a_n} \longrightarrow \delta_a$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[1/n,\infty[}(|x|)x^{-1}$. Alors, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{vp}(1/x)$.
-

Théorème 2.3.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $(\langle T_n, \varphi\rangle)_n$ soit convergente. Alors, il existe $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Théorème 2.3.2. *Soit $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \longrightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$, et telle que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors, on a que $\langle T_n, \varphi_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T, \varphi\rangle$.*

2.4 Dérivations des distributions

Définition 2.4.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, On définit $\partial_j T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$\langle \partial_j T, \varphi\rangle = -\langle T, \partial_j \varphi\rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. C'est une distribution.

Proposition 2.4.1. *Soient $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, et $j \in [\![1, d]\!]$. Alors, $\partial_j T_f = T_{\partial_j f}$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par une intégration par parties,

$$\langle \partial_j T, \varphi\rangle = -\langle T, \partial_j \varphi\rangle = -\int_\Omega f(x)\partial_j\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \partial_j f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left\langle T_{\partial_j f}, \varphi\right\rangle.$$

$\square$

Définition 2.4.2. *On appelle partie finie de la fonction* $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x \mapsto 1/x^2$ *la distribution*

$$\mathrm{pf}(1/x^2) : \left| \begin{array}{ccl} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \left\langle \mathrm{pf}(1/x^2), \varphi \right\rangle = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\displaystyle\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right) \end{array} \right.$$

Elle vérifie $\mathrm{vp}(1/x)' = \mathrm{pf}(1/x^2)$.

Proposition 2.4.2 (formule des sauts)**.** *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, *et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, et* $a_1 < \ldots < a_N \in I$ *une décomposition adaptée à* f. *On note* $\{f'\}$ *la fonction qui coïncident avec* $f'_{]a_k, a_{k+1}[}$ *sur* $]a_k, a_{k+1}[$ *pour tout* $k \in [\![1, N]\!]$. *Alors,*

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sum_{k=1}^{N} (f(a_k^+) - f(a_k^-)) \delta_{a_k}.$$

Démonstration. Appliquer la relation de Chasles.

□

Théorème 2.4.1. *Soit* $I =]a, b[$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$, *et* $T \in \mathcal{D}'(I)$ *tel que* $T' = 0$. *Alors, il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* T *soit constante à* λ.

Démonstration. Soit d'abord $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. On voit facilement que φ est d'intégrale nulle sur $]a, b[$ *si et seulement si* c'est la dérivée d'un élément de $\mathcal{D}(I)$. Soit maintenant $\theta \in \mathcal{D}(I)$ d'intégrale 1. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, on pose

$$\lambda_\varphi = \int_a^b \varphi(x) \, \mathrm{d}x.$$

Alors, $\varphi - \lambda_\varphi \theta$ est d'intégrale nulle. Il existe alors $\psi_\varphi \in \mathcal{D}(I)$ telle que

$$\varphi = \lambda_\varphi \theta + \psi'_\varphi.$$

Soit maintenant $T \in \mathcal{D}'(I)$ une distribution de dérivée nulle. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, il existe $\lambda_\varphi \in \mathbb{R}$ et $\psi_\varphi \in \mathcal{D}(I)$ des éléments tels que

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \lambda_\varphi \theta \rangle + \underbrace{\left\langle T, \psi'_\varphi \right\rangle}_{0}.$$

De plus, puisque λ_φ est choisi dans cette démonstration comme l'intégrale de φ sur I, on a bien pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_a^b \langle T, \theta \rangle \, \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

□

Définition 2.4.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on définit l'application $\partial^\alpha T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. C'est une distribution.

Proposition 2.4.3. *Soit $(T_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \longrightarrow T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a*

$$\partial^\alpha T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \partial^\alpha T.$$

Autrement dit, la dérivation est continue.

2.5 Multiplication

Il n'y a pas de multiplication comme on l'entend sur les distributions. En effet, si $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'unité, alors $\rho_\varepsilon \longrightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit I un intervalle de ouvert et $\rho \in \mathcal{D}(I)$ une fonction positive, telle que $\int_I \rho = 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit comme approximation de l'unité la suite de fonction de terme général

$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la quantité $\langle \rho_\varepsilon \delta_0, \varphi \rangle = \rho_\varepsilon(0)\varphi(0) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(0)\varphi(0)$ n'admet pas de limite lorsque ε tend vers 0. Or, on attendrait d'une multiplication de distributions que $\rho_\varepsilon\delta_0 \to (\delta_0)^2$. On ne peut donc pas définir de distribution $(\delta_0)^2$.

Définition 2.5.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On définit l'application $aT : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in D(\Omega)$. C'est une distribution.

Démonstration. On utilise la formule de Leibniz pour majorer les $\|\partial^\alpha(a\varphi)\|_\infty$.

□

Remarque. L'ordre de aT est majoré par celui de T.

Proposition 2.5.1. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$, et $(a_n)_n$ une suite de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On suppose $(T_n)_n$ converge vers une certaine distribution T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, que $\partial^\alpha a_n \longrightarrow \partial^\alpha a$ uniformément sur tout compact pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors, $a_nT_n \longrightarrow aT$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Proposition 2.5.2. *Soit $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors,*

$$\partial^\alpha(aT) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} T.$$

En particulier, pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, on

$$\partial_j(aT) = (\partial_j a)T + a\partial_j T.$$

2.6 Localisation et recollement

Définition 2.6.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et ω un ouvert de Ω. Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit la distribution T restreinte à ω, $T_{|\omega} \in \mathcal{D}'(\omega)$, par*

$$\left\langle T_{|\omega}, \varphi \right\rangle = \langle T, \widetilde{\varphi} \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, où $\widetilde{\varphi}$ coïncide avec φ sur ω, et vaut 0 sur $\Omega \backslash \omega$.

Proposition 2.6.1 (recollement de distributions)**.** *Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de Ω telle que $\Omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$. Soit $T_i \in \mathcal{D}'(\omega_i)$ pour tout $i \in I$. Pour tout $i, j \in I$, on suppose que ${T_i}_{|\omega_i\cap\omega_j} = {T_j}_{|\omega_i\cap\omega_j}$ dès lors que $i \neq j$. Alors, il existe une unique distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que :*

$$\forall i \in I,\, T_{|\omega_i} = T_i.$$

Démonstration. — *Unicité.* Soient T_1 et T_2 deux telles distributions. On pose $S = T_1 - T_2$ de sorte que $S_{|\omega_i} = 0$ pour tout $i \in I$. Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et K un compact tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Par compacité de $K \subset \Omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$, il existe $i_1, \ldots, i_n \in I$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^n \omega_{i_k}$. Soient $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ des partitions de l'unité telles que :

- $\chi_1 + \cdots + \chi_n = 1$ sur un voisinage de K,
- $\operatorname{supp}\chi_\ell \subset \omega_{i_\ell}$ pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$.

Puisque $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, on a

$$\langle S, \varphi \rangle = \left\langle S, \sum_{\ell=1}^n \chi_\ell \varphi \right\rangle = \sum_{\ell=1}^n \langle S, \chi_\ell \varphi \rangle = \sum_{\ell=1}^n \left\langle S_{|\omega_{i_\ell}}, \chi_\ell \varphi_{|\omega_{i_\ell}} \right\rangle = 0.$$

— *Existence.* Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et K un compact tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. On reprend les mêmes notations qu'au point précédent. Une analyse montre que si T existe, alors

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{\ell=1}^n \langle T_{i_\ell}, \chi_\ell \varphi \rangle .$$

Montrons que T est ainsi bien défini. Soit L un autre compact contenant le support de φ, et $j_1, \ldots, j_p \in I$ tels que $L \subset \bigcup_{k=1}^{p} \omega_{j_k}$. Soient $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p \in \mathcal{D}(\Omega)$ des partitions de l'unité associées. Montrons que

$$\sum_{\ell=1}^{n} \langle T_{i_\ell}, \chi_\ell \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{p} \langle T_{j_k}, \Lambda_k \varphi \rangle .$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n} \langle T_{i_\ell}, \chi_\ell \varphi \rangle &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} \langle T_{i_\ell}, \Lambda_k \chi_\ell \varphi \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} \left\langle T_{i_\ell |\omega_{j_k} \cap \omega_{i_\ell}}, \Lambda_k \chi_\ell \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} \left\langle T_{j_k |\omega_{j_k} \cap \omega_{i_\ell}}, \Lambda_k \chi_\ell \varphi \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} \langle T_{j_k}, \Lambda_k \chi_\ell \varphi \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p} \langle T_{j_k}, \Lambda_k \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

En conservant les notations associées à φ et K, on montre facilement que c'est bien une distribution.

□

2.7 Composition

Soient $f \in L^1_{\ell oc}(\Omega)$ et $\chi : \tilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. Si l'on cherche à définir une composition pour les distributions, on souhaiterait que cette formule soit compatible avec le changement de variable. Entre autres, on souhaite que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$,

$$\langle T_f \circ \chi, \varphi \rangle = \int_\Omega f(y) \varphi(\chi^{-1}(y)) \left|\det J_\chi(\chi^{-1}(y))\right|^{-1} \mathrm{d}y$$

Définition 2.7.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution, et $\chi : \tilde{\Omega} \longrightarrow \Omega$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme. On définit la distribution $T \circ \chi$ par*

$$\langle T \circ \chi, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\tilde{\Omega}), \mathcal{D}(\tilde{\Omega})} = \left\langle T, \left|\det J_\chi(\chi^{-1}(y))\right|^{-1} \varphi \circ \chi^{-1} \right\rangle_{\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}'(\Omega)} .$$

Remarque. C'est bien une distribution, en vertu de la formule de Faà di Bruno.

Exemple. Si $\tilde{\Omega} = \Omega = \mathbb{R}^d$, et $\chi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto Ax + b$ où $A \in GL_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle T \circ \chi, \varphi \rangle = |\det A|^{-1} \left\langle T, \varphi \circ \chi^{-1} \right\rangle \quad \text{avec} \quad \varphi \circ \chi^{-1}(x) = \varphi(A^{-1}(x - b)).$$

2.8 Dérivation et intégration

Proposition 2.8.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Soit K un compact de Ω tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset K \times \mathbb{R}^n$. Alors, la fonction $y \longmapsto \langle T, \varphi(\,\cdot\,, y)\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et est telle que pour $y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{d+n}$,*

$$\partial_y^\alpha \langle T, \varphi(\,\cdot\,, y)\rangle = \left\langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\,\cdot\,, y)\right\rangle.$$

Théorème 2.8.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Alors,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle T, \varphi(\cdot, z)\rangle \,\mathrm{d}z = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\cdot, z)\,\mathrm{d}z \right\rangle.$$

Démonstration. On démontre le théorème pour $n = 1$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$. Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset K \times [-R, R]$.

— *Cas particulier.* Si $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x, z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \varphi(x, z)\,\mathrm{d}z = 0$. On pose

$$\theta(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(x, z)\,\mathrm{d}z.$$

On voit alors que $\operatorname{supp}\theta \subset K \times [-R, R]$ et $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$. On a

$$\frac{\partial}{\partial y}\langle T, \theta(\cdot, y)\rangle = \left\langle T, \frac{\partial\theta}{\partial y}(\cdot, y)\right\rangle + \lambda,$$

avec un certain λ. Ainsi,

$$\langle T, \theta(\cdot, y)\rangle = \int_{-\infty}^{y} \langle T, \varphi(\cdot, z)\rangle \,\mathrm{d}z.$$

— Si $y < -R$, alors

$$0 = \langle T, \theta(\cdot, y)\rangle = \underbrace{\int_{-\infty}^{y} \langle T, \varphi(\cdot, z)\rangle \,\mathrm{d}z}_{=0} + \lambda,$$

d'où $\lambda = 0$.

— Si $y > R$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T, \theta(\cdot, y)\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{y} \langle T, \varphi(\cdot, z)\rangle \,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle T, \varphi(\cdot, z)\rangle \,\mathrm{d}z \\ &= 0 = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}} \varphi(\cdot, z)\,\mathrm{d}z \right\rangle. \end{aligned}$$

— *Cas général.* Soit $\psi(x,y) = \varphi(x,y) - \chi(y) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,z)\,\mathrm{d}z$ avec $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \chi(y)\,\mathrm{d}y = 1$ et $\operatorname{supp}\chi \subset [-R,R]$. Alors, comme dans le premier cas,

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\langle T, \psi(\cdot,y)\rangle}_{=0}\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \langle T, \varphi(\cdot,y)\rangle\;\mathrm{d}y - \left\langle T, \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,z)\,\mathrm{d}z \right\rangle.$$

La démonstration pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque consiste à dire que si $y \longmapsto \langle T, \varphi(\,\cdot\,,y)\rangle$ est à support dans $\mathcal{B}_f(0,R)$, elle est élément de $L^1(\mathbb{R}^n)$. On utilise alors Fubini pour intégrer variable par variable en se ramenant au cas $n = 1$.

□

Chapitre 3

Convolution de distributions

3.1 Support d'une distribution

Définition 3.1.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts $\omega \subset \Omega$ tel que $T_{|\omega}$ soit nulle. On définit le support de la distribution T par*

$$\operatorname{supp} T = \left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{O}} \omega \right)^c .$$

Attention. Ici, le complémentaire est le complémentaire dans Ω.

Proposition 3.1.1. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp} T$ est le plus petit fermé tel que $T_{|(\operatorname{supp} T)^c} = 0$. Entre autres, $(\operatorname{supp} T)^c$ est le plus grand ouvert sur lequel T est nulle.*

Démonstration. Par définition, il majore tous les ouverts sur lesquels T est nulle. Il faut maintenant montrer que $T_{|(\operatorname{supp} T)^c} = 0$. Pour tout $\omega \in \mathcal{O}$, $T_{|\omega}$ est nulle. Ainsi, par recollement, il existe une unique distribution $S \in \mathcal{D}\left(\bigcup_{\omega \in \mathcal{O}} \omega\right)$ telle que pour tout $\omega \in \mathcal{O}$, $S_{|\omega} = T_{|\omega} = 0$. On a donc que $T_{|(\operatorname{supp} T)^c}$

□

Remarques.

- De manière équivalente, le support de T est le plus petit fermé F tel que $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nulle sur un voisinage de F ($i.e$ $\operatorname{supp} \varphi \cap F = \varnothing$). Ainsi, si φ et $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sont deux fonctions coïncidant sur un voisinage de $\operatorname{supp} T$, alors $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle$.
- $(x \in \operatorname{supp} T) \iff (\forall r > 0,\ T_{|\mathcal{B}(x,r)\cap\Omega} \neq 0)$. Un point $x \in \Omega$ est dans le support *si et seulement si* pour toute boule ouverte ω voisinage de x, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset \omega$ et $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$. Les contraposées sont aussi intéressantes.

Exemple.

- Soit $x_0 \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors, $\operatorname{supp} \delta_{x_0}^{(\alpha)} = \{x_0\}$. En effet, si $x_1 \neq x_0$ est un point de Ω. Alors, pour tout $r > 0$ tel que $x_0 \notin \mathcal{B}(x_1, r)$, δ_{x_0}

— Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que φ soit égale à 1 sur un voisinage de 0. On a

$$\left\langle \delta_0', x\varphi \right\rangle = -\left\langle \delta_0, (x\varphi)' \right\rangle = -(x\varphi' + \varphi)(0) = -\varphi(0) = -1.$$

Ainsi, $\langle \delta_0', x\varphi, \neq \rangle\, 0$ car $x\varphi$ est nul sur le support de δ_0, mais pas sur un voisinage de $\operatorname{supp} \delta_0$.

— $\operatorname{supp} \operatorname{vp}(1/x) = \mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que φ soit positive sur $\mathbb{R}$, et constante à 1 au voisinage de x. On suppose de plus que $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathcal{B}(x_0, r)$ pour un certain $r > 0$.

$$\langle \operatorname{vp}(1/x), x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathrm{d}x > 0.$$

Remarque (encore). Soit $f \in L^1_{\ell oc}(\Omega)$, et ω un ouvert de Ω. Alors,

$$f_{|\omega} = 0 \text{ p.p} \iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega), \int_\omega f\varphi = 0 \iff T_{f_{|\omega}} = 0.$$

On en déduit donc dans ce cas que $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} T_f$.

Proposition 3.1.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, et $a \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Alors,*

$$\operatorname{supp} aT \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction nulle sur V, un voisinage de $\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$. Alors, $a\varphi$ est aussi nulle sur V et $a\varphi$ est nulle sur $(\operatorname{supp} a)^c$. On en déduit que $a\varphi$ est nulle sur $V \cup (\operatorname{supp} a)^c$ qui est un voisinage de $\operatorname{supp} T$. Ainsi, $\langle T, a\varphi \rangle = 0$. Au final, $\langle aT, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$. On en déduit l'inclusion.

□

Proposition 3.1.3. *Soit S et $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ des distributions. Alors,*

$$\operatorname{supp} S + T \subset \operatorname{supp} S \cup \operatorname{supp} T.$$

Démonstration. Exercice.

□

Proposition 3.1.4. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,*

$$\operatorname{supp} \partial^\alpha T \subset \operatorname{supp} T.$$

Démonstration. Soit ω un ouvert de Ω tel que $T_{|\omega} = 0$. Pour tout $\varphi \mathcal{D}(\Omega)$, si $\operatorname{supp} \varphi \subset \omega$, alors $\operatorname{supp} \partial^\alpha \varphi \subset \omega$, et alors $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = 0$.

□

Remarque. L'inclusion réciproque est en générale fausse. Prendre comme contre-exemple les T_f où f est une fonction constante.

3.2 Distributions à support compact

Définition 3.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω à support compact.*

Théorème 3.2.1. *Toute distribution $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est d'ordre fini. De plus, si p désigne l'ordre de T, il existe K un compact de Ω tel que K soit un voisinage de $\operatorname{supp} T$, et $c > 0$ tels que :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \langle T, \varphi \rangle \leq c \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \,.$$

Démonstration. Soit $K \subset \Omega$ un compact voisinage de $\operatorname{supp} T$. Par définition d'une distribution :

$$\exists c_K > 0,\, p_K \in \mathbb{N},\, \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \ \langle T, \psi \rangle \leq \max_{|\alpha| \leq p_K} |\partial^\alpha \psi| \,.$$

Soit maintenant $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que χ soit constante à 1 sur un voisinage de $\operatorname{supp} T$, et telle que $\operatorname{supp} \chi \subset K$. On a alors que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T, (1-\chi)\varphi \rangle = 0$ car $(1-\chi)\varphi = 0$ sur un voisinage du support de T. On a alors que $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$. Soit alors $K = \operatorname{supp} T$. Il existe $C_K > 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$, tels pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} \psi \subset K$,

$$\langle T, \psi \rangle \leq C_K \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq p_K}} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)| \,.$$

En particulier, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\operatorname{supp} \chi\varphi \subset K$. Ainsi,

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle \leq C_K \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq p_K}} \sup_{x \in K} |(\partial^\alpha \chi\varphi)(x)| \,.$$

En posant

$$C = 2^{p_K} C_K \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq p_K}} \sup_{x \in K} |(\partial^\alpha \chi)(x)| \quad \text{et} \quad p = p_K,$$

on trouve bien que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle T, \varphi \rangle \leq C \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq p}} \sup_{x \in K} |(\partial^\alpha \varphi)(x)| \,.$$

□

Remarque. On note $\mathcal{E}(\Omega)$ l'espace de FRÉCHET des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ des fonctions infiniment dérivables. Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, alors on peut prolonger T en une forme linéaire sur $\mathcal{E}(\Omega)$ telle qu'il existe un compact K, une constante $C > 0$ et un entier $p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle T, \varphi \rangle \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi| \,.$$

Il suffit de prendre le compact K donné par le théorème précédent. On se donne alors $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\chi = 1$ sur $\operatorname{supp} T$ et $\operatorname{supp} T \subset K$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, on pose $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \chi\varphi \rangle$.

Proposition 3.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $x_0 \in \Omega$, et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Si $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq p}$ un ensemble de coefficients réels, tels que*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \delta_{x_0}^{(\alpha)}.$$

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Cette distribution est d'ordre fini, qu'on note p.

— *Cas 1.* On suppose sans perte de généralité (par translation) que $x_0 = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi(0) = 0$. Alors, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \Omega$,

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{d} x_j \int_0^1 (1-t) \partial_{x_j} \varphi(tx) \, \mathrm{d}t \leq |x| \max_{1 \leq i \leq d} \|\partial_i \varphi\|_\infty .$$

□

3.3 Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{D}$

Définition 3.3.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose*

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle .$$

Proposition 3.3.1.
Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors $T * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on a

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = T * \partial^\alpha \varphi = \partial^\alpha T * \varphi.$$

De plus, $\operatorname{supp} T * \varphi \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi$.

Démonstration. (i) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que χ soit constante à 1 sur un voisinage V de x_0. Pour montrer que $x \longmapsto \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$ est infiniment dérivable au voisinage de x_0, on va montrer que $x \longmapsto \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle \chi(x)$ l'est. Pour tout $y, x \in \mathbb{R}^d$, on note $\psi(y, x) = \varphi(x-y)\chi(x)$. On a alors $\operatorname{supp} \psi \subset (-\operatorname{supp} \varphi + \operatorname{supp} \chi) \times \operatorname{supp} \chi)$. Par théorème de dérivation, on a que pour tout $x \in V$,

$$\begin{array}{rcl}
\partial^\alpha (T * \varphi)(x) & = & \partial^\alpha \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle \\
& = & \partial^\alpha \langle T, \varphi(x - \cdot) \chi(x) \rangle \\
& = & \langle T, \partial^\alpha [\varphi(x - \cdot) \chi(x)] \rangle \\
& = & \langle T, \partial^\alpha [\varphi(x - \cdot)] \rangle \\
& = & T * \partial^\alpha \varphi(x).
\end{array}$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{array}{rcl}
\partial^\alpha (T * \varphi)(x) & = & \partial^\alpha \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle \\
& = & (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi(x - \cdot) \rangle \\
& = & \langle T * \partial^\alpha, \varphi(x - \cdot) \rangle .
\end{array}$$

(ii) Montrons l'inclusion des supports. $T * \varphi$ est continue, donc on peut s'intéresser à l'adhérence des points où $T * \varphi$ ne s'annule pas.

□

Corollaire 3.3.1. *Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alors $T * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque. On peut définir la convolution pour $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. On obtient les mêmes résultats que ceux de la proposition 3.3.1.

Théorème 3.3.1. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'unité. Alors,*

$$T * \rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Théorème 3.3.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Proposition 3.3.2. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \\ \varphi & \longmapsto & T * \varphi \end{array}$$

est séquentiellement continue.

Proposition 3.3.3. *Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution, telles que $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la suite $(\partial^\alpha * \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers $\partial^\alpha * \varphi$. De plus, s'il existe un compact K de $\mathbb{R}^d$ tel que $\operatorname{supp} T_n \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $T_n * \varphi \xrightarrow[n\to\infty]{} T * \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.*

3.4 Convolution $\mathcal{D}' * \mathcal{E}'$

Définition 3.4.1. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On définit la distribution $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ par*

$$\langle T * S, \varphi \rangle = \left\langle T, \tilde{S} * \varphi \right\rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, où pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\left\langle \tilde{S}, \psi \right\rangle = \left\langle S, \tilde{\psi} \right\rangle \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(x) = \psi(-x).$$

Proposition 3.4.1. *Pour toutes distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\operatorname{supp} T * S \subset \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T.$$

Remarque. On peut aussi définir une convolution $\mathcal{E}' * \mathcal{D}'$ de la manière suivante : si $S \in E'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ sont des distributions, alors on pose $\langle S * T, \varphi \rangle = \left\langle S, \tilde{T} * \varphi \right\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On peut alors montrer que $S * T$ est bien élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et que $S * T = T * S$.

Exemples.

— Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a $T * \delta_0 = T$.

— Plus généralement, pour tout $a, b \in R^d$, on a $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

Proposition 3.4.2. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on*

$$\partial^\alpha (T * S) = \partial^\alpha T * S = T * \partial^\alpha S.$$

Remarque. On souhaite résoudre l'équation aux dérivées partielles $-\Delta u = f$. Si l'on connait une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $-\Delta T = \delta_0$, alors

$$-\Delta(T * f) = -\Delta(T * f) = (-\Delta T) * f = \delta_0 * f = f.$$

Ainsi, $u = T * f$ est une solution. La distribution T est appelée *solution fondamentale.*

Proposition 3.4.3. *Soient $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution, telles que $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$. Soient $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ une distribution, telles que $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$. On suppose qu'il existe un compact K de $\mathbb{R}^d$ tel que $\operatorname{supp} S_n \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $T_n * S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T * S\varphi$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

Théorème 3.4.1. *Soit $R, S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions. Si deux d'entre elles sont dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, alors,*

$$R * (S * T) = (R * S) * T.$$

Chapitre 4

Transformation de FOURIER

4.1 La classe de SCHWARTZ

4.1.1 Définition et convergence dans l'espace de SCHWARTZ

Définition 4.1.1. *On appelle* ***espace de*** **SCHWARTZ** *l'espace*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty \right\}.$$

Remarque. On a aussi

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, \forall k \in \mathbb{N},\ \forall \beta \in \mathbb{N}^d,\ \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^k||\partial^\beta \varphi(x)| < \infty \right\}.$$

Exemples.

— Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sont toutes dans la classe de SCHWARTZ.

— Toutes les fonctions de la forme $\varphi(x) = P(x)e^{-a\|x\|^2}$ avec $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d]$ et $a > 0$ sont de cette classe.

Remarque : topologie de la classe de SCHWARTZ. On utilisera sur l'espace de SCHWARTZ la topologie suivante : pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on définit

$$N_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|.$$

C'est une semi-norme.

Définition 4.1.2. *Une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite convergente de limite $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, si :*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ N_p(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Proposition 4.1.1. *L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ munie de la topologie définie ci-dessus.*

Corollaire 4.1.1. *Pour tout $p \in [1, \infty[$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ est dense dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.*

4.1.2 Propriétés de la classe de SCHWARTZ

Définition 4.1.3. *Une fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ est dite être **à croissante polynomiale** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$f(x) = o_{\|x\| \to \infty}(\|x\|^n).$$

Proposition 4.1.2. *Soit $\varphi \in \mathbb{R}^d$. On a les résultats suivants.*

(i) Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont les dérivées sont à croissance polynomiale, $f\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

(iii) Pour tout $q \in [1, \infty]$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$. De plus, il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ tels que $|\alpha|, |\beta| \leq p$, on ait

$$\left\| x^\alpha \partial^\beta f \right\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C N_p(f)^{1-\frac{1}{q}} N_{p+d+1}(f)^{\frac{1}{q}}.$$

(iv) Pour toute distribution à support compact $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a $S * \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$.

4.2 Transformation de FOURIER sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Définition 4.2.1. *Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On appelle **transformée de FOURIER de** φ la fonction*

$$\mathscr{F}\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \xi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, x\rangle} \varphi(x) \, \mathrm{d}x. \end{array} \right.$$

Remarque. L'application linéaire $\mathscr{F}$ est bien définie puisque pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|e^{-i\langle \xi, x\rangle} \varphi(x)| = |\varphi(x)|$$

sachant que φ est au moins L^1 puisqu'elle est dans la classe de SCHWARTZ.

Proposition 4.2.1. *Soit $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. On a les résultats suivants.*

(i) La fonction $\mathscr{F}\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\partial_j \mathscr{F}\varphi(\xi) = \mathscr{F}(-iX_j\varphi)(\xi).$$

où pour tout $x = (x_1, \dots, x_d)$, $X_j(x) = x_j$.

(ii) Pour tout $j \in [\![1, d]\!]$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathscr{F}(\partial_j\varphi)(\xi) = i\xi_j\mathscr{F}\varphi(\xi).$$

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, on pose $\tau_a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto \varphi(x-a)$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathscr{F}(\tau_a\varphi)(\xi) = e^{-i\langle \xi, a\rangle}\mathscr{F}\varphi(\xi).$$

Théorème 4.2.1. *La transformation de* FOURIER *$\mathscr{F}$ est un automorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, alors*

$$\mathscr{F}^{-1}\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi\rangle}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Enfin, $\mathscr{F}$ est un homéomorphisme sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Plus particulièrement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $C_p > 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$N_p(\mathscr{F}\varphi), N_p(\mathscr{F}^{-1}\varphi) \leq C_p N_{p+d+1}(\varphi).$$

Lemme 4.2.1. *Le théorème d'inversion de la transformation de* FOURIER *nécessite les deux résultats suivants.*

(i) L'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par $\mathscr{F}$.

(ii) Soit $A \in \mathscr{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ une matrice définie positive. Alors, l'application

$$G_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-1}x, x\rangle}}{\sqrt{(2\pi)^d \det A}} \end{array} \right.$$

est élément de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathscr{F}G_A(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\langle A\xi, \xi\rangle}.$$

Corollaire 4.2.1 (formule de PLANCHEREL)**.** *Soit $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors,*

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\langle \mathscr{F}\varphi, \mathscr{F}\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

4.3 Distributions tempérées

Définition 4.3.1 (distribution tempérée)**.** *On appelle distribution tempérée toute forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, dans le sens où il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$,*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C N_p(\varphi).$$

Les distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$ forment un espace vectoriel noté $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Remarque. Le terme de “distribution” est justifié par le fait que la restriction d'une distribution tempérée à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est bien une distribution usuelle. En effet, pour tout K compact de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ fonction à support compact contenu dans K, on a

$$N_p(\varphi) \leq A_K^p (1+p)^{2N} \max_{|\alpha| \ \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

où $A_K = \max_{x \in K}(1 + |x|)$. Par conséquent, on dispose de l'injection $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Exemples.

— Une distribution à support compact est tempérée.

— Toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ définit une distribution tempérée.