École Normale Supérieure de Rennes

EVNCD2

ESPACES VECTORIELS NORMÉS & CALCUL DIFFÉRENTIEL (2ÈME PARTIE)

Complétude et compacité dans les espaces métriques, séries de Fourier, espaces de Hilbert, théorème de Baire, topologie faible sur un espace de Hilbert, théorème de Hahn-Banach, sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ et théorème des extrema liés

Auteur
Karine Beauchard

Notes de cours
Victor Lecerf

2020–2021

Table des matières

Chapitre 1

Rappels : topologie dans les espaces métriques

L'objectif de ce chapitre est de se rappeler les résultats de la topologie des espaces métriques qui seront utiles pour étudier les espaces vectoriels normés, dans les chapitres ultérieurs.

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1 (distance, espace métrique)**.**

Définition 1.1.2 (boule ouverte/fermée, diamètre, borné)**.**

Définition 1.1.3 (continuité uniforme)**.** *Soient* (E, d_E) *et* (F, d_F) *des espaces métriques. Une fonction* $f : E \longrightarrow F$ *est dite uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, (d_E(x, y) \leq \delta) \implies (d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon).$$

Exemple. Une application K-lipschitzienne est uniformément continue (prendre $\delta = \varepsilon/K$). La réciproque est fausse ($[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$).

1.2 Ouverts d'un espace métrique

Définition 1.2.1 (ouvert, fermé)**.**

Proposition 1.2.1. *(i) (Axiomes d'ouverts)* E *et* $\varnothing$ *sont ouverts. Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte. Une intersection finie d'ouverts est ouverte.*

(ii) (Axiomes de fermés) E *et* $\varnothing$ *sont fermés. Une intersection quelconque de fermés est fermés. Une union finie de fermés est fermée.*

Définition 1.2.2 (intérieur, adhérence, densité)**.** *Soit (E, d) un espace métrique, A une partie de E, et $x \in E$.*

(i) (Intérieur) Le point x est dit intérieur à A s'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x, r) \subset A$. L'intérieur de A, noté $\operatorname{Int}(A)$ est l'ensemble des points intérieurs à A.

(ii) (Adhérence) Le point x est dit adhérence à A si pour tout $r > 0$, $\mathcal{B}(x, r) \cap A$ contient un autre point que x. L'adhérence de A, noté $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A.

*(iii) A est dite **dense** si $\overline{A} = A$.*

Proposition 1.2.2. *Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E.*

(i) L'intérieur de A est l'union des ouverts contenus dans A.

(ii) L'adhérence de A est l'intersection des fermés contenants A.

Définition 1.2.3 (distances équivalentes)**.** *Soient d et d' des distances sur un espace E. Les distances d et d' sont dites équivalentes s'il existe C_1 et C_2 des constantes strictement positives telles que*

$$\forall x, y \in E,\, C_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq C_2 d(x, y).$$

On note encore

$$C_1 d \leq d' \leq C_2 d.$$

Remarque. Cette définition définit bien évidemment une relation d'équivalence.

Proposition 1.2.3. *Deux distances équivalentes définissent la même topologie.*

1.3 Suites d'un espace métrique

Définition 1.3.1. *Soit (E, d) un espace métrique, $a \in E$, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. La suite $(x_n)_n$ est dite **convergente vers** a si*

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists n_0 \in \mathbb{N},\, \forall n \geq n_0,\, d(x_n, a) \leq \varepsilon.$$

*Le point a est alors dit être la **limite** de la suite $(x_n)_n$. On note $a = \lim_{n \to \infty} x_n$.*

Proposition 1.3.1. *Soit (E, d) un espace métrique, $a \in E$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Sont équivalents :*

(i) Il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers a.

(ii) Pour tout $r > 0$, $\mathcal{B}(a, r)$ contient une infinité des x_n (d'indice n arbitrairement grand).

Dans ce cas, a est dit être une ***valeur d'adhérence*** *de $(x_n)_n$.*

1.4 Application continues entre espaces métriques

Proposition 1.4.1. *Soit (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application, $a \in E$ et $b \in F$. Sont équivalents*

1.5 Espaces métriques compacts

1.5.1 Définitions

Définition 1.5.1 (compact)**.** *A est dite* ***compacte*** *si (définitions équivalentes)*

*(i) (*Borel-Lebesgue*) De tout recouvrement de A par des ouverts de E, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.*

*(ii) (*Bolzano-Weierstrass*) De toute suite d'éléments A, on peut en extraire une sous-suite convergente dans A.*

Théorème 1.5.1. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Si A est compacte, alors il existe $D \subset A$ dénombre et dense dans (A, d).*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A \subset \bigcup_{x\in A} \mathcal{B}(x, 1/n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on extrait

□

Définition 1.5.2 (compacité relative)**.** *A est dite* ***relativement compacte*** *si (définitions équivalentes)*

(i) $\overline{A}$ est un compact de (E, d).

(ii) De toute suite d'éléments de A, on peut en extraire une sous-suite convergente dans (E, d).

Démonstration. On montre l'implication $(ii) \implies (i)$. Supposons (ii). Soit $(x_n)_n \in \overline{A}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in A$ tel que $d(x_n, y_n) < 1/n$ (définition de l'adhérence). La suite $(y_n)_n$ est une suite d'éléments de A, on en extrait donc un sous-suite convergente dans (E, d). Il existe donc $z \in \overline{A}$ et φ une extratrice tels que $d(y_{\varphi(n)}, z) \longrightarrow 0$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d(x_{\varphi(n)}, z) \leq d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) + d(y_{\varphi(n)}, z) < 1/\varphi(n) + d(y_{\varphi(n)}, z).$$

□

Exercice. Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, A est relativement compacte *si et seulement si* A est bornée.

1.5.2 Fonctions continues sur un compact

1.6 Espaces métriques complets

1.6.1 Définitions

Définition 1.6.1 (suite de Cauchy)**.** *Soit (E, d) un espace métrique on appelle suite de Cauchy toute suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists n_0 \in \mathbb{N},\, \forall p, q \geq n_0,\, d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.6.1. *(i) Une suite convergente est de Cauchy.*

(ii) Une suite de Cauchy est bornée.

(iii) L'image d'une suite de Cauchy par une application ***uniformément continue*** *est une suite de Cauchy.*

Contre-exemple. Si $f(x) = 1/x$ et $x_n = 1/n$, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*} = (n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy, car f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Définition 1.6.2 (espace complet)**.** *Un espace métrique (E, d) est dit* ***complet*** *si toute suite de Cauchy d'éléments de (E, d) est convergente dans (E, d)*

Exercice. Montrer que $(\mathcal{C}^0(E, F), d_\infty)$ est complet lorsque (F, d_F) l'est.

Soit Maintenant A une partie de (E, d), un espace métrique.

1.6.2 Prolongement des applications uniformément continues

Théorème 1.6.1. *Soient (E, d_E) et (F, d_F) des espaces métriques. On suppose (F, d_F)* ***complet****. Soit $D \subset E$ une partie* ***dense*** *de E, et $f : (D, d_E) \longrightarrow (F, d_F)$ une application* ***uniformément continue****. Alors, f admet un unique prolongement par continuité $\widetilde{f} : E \longrightarrow F$. De plus, $\widetilde{f}$ est uniformément continue de (E, d_E) dans (F, d_F).*

Démonstration. Soit $x \in E\backslash D$, et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de D convergeant vers x. Montrons que $f(x_n)_n$ est convergente. En effet, $(x_n)_n$ est de Cauchy dans (D, d_E) et f est uniformément continue. Ainsi $f(x_n)_n$ est de Cauchy , et (F, d_F) est de plus complet. Ainsi, $f(x_n)_n$ est convergente.

Montrons maintenant que peu importe la suite $(x_n)_n$ choisie, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Soit $(y_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $d_F(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)) \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Soit $\delta > 0$ donné par l'uniforme continuité de f (convenable pour ε) Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d(x, x_n) \leq \delta/2$. Alors, $d_E(x,y_n) \leq \delta$. Ainsi, $d_F(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$.

Ainsi, on peut noter sans ambiguïté $\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ pour toute suite $(x_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ de limite x. Montrons maintenant que ce prolongement est uniformément continu. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ correspondant pour l'uniforme continuité de f. Soit $x, y \in E$ tels que $d_E(x, y) \leq \delta/2$. Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ de limites respectives x et y. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d_E(x_n, y_n) \leq \delta$, et alors,

$$d_F(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon.$$

On obtient le résultat par passage à la limite.

□

1.6.3 Théorème d'Ascoli

Théorème 1.6.2. *Soit (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique complet, et $A \subset \mathcal{C}^0(E, F)$. Sont équivalents :*

(i) A est relativement compacte dans $(\mathcal{C}^0(E, F), d_\infty)$ avec

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d_F(f(x), g(x)) \,|\, x \in E\}.$$

(ii) A est équicontinue :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall f \in A,\ \forall x, y \in E,\ (d_E(x, y) \leq \delta) \implies (d_F(f(x), f(y)) \leq \varepsilon)$$

et $A_x = \{f(x) \,|\, f \in A\}$ est relativement compacte dans F pour tout $x \in E$.

Démonstration. $\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose (ii). Montrons que A est relativement compacte dans $(\mathcal{C}^0(E, F), d_\infty)$. Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de A. Montrons qu'il existe une extractrice ψ et $g \in \mathcal{C}^0(E, F)$ telles que $d_\infty(f_{\psi(n)}, g) \longrightarrow 0$. (E, d_E) est compacte, il existe donc une partie $D \subset E$ dénombrable et dense dans (E, d_E).

(i) On construit une extractrice ψ tel que $(f_{\psi(n)})_n$ converge simplement sur D. Notons

$$D = \{d_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}.$$

Soit $j \in \mathbb{N}$, n a $\{f_n(d_j) \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{A}_{d_j}$, qui est compact dans (F, d_F) donc il existe une extractrice φ_j telle que $(f_{\varphi_j(n)}(d_0))_n$ converge dans (F, d_F). Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$(f_{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_j)(n)}(d_j))_{n\in\mathbb{N}}$$

converge dans (F, d_F). On procède ensuite à une extraction diagonale : on pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \psi(n) = (\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n).$$

Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $(f_{\psi(n)}(d_j))_{n\geq j}$ est une sous-suite de $(f_{(\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_j)(n)}(d_j))_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $(f_{\psi(n)}(d_j))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (F, d_F). Notons maintenant

$$g(d) = \lim_{n\to\infty} f_{\psi(n)}(d)$$

pour tout $d \in D$.

(ii) Montrons maintenant que g est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ donné par l'équicontinuité de A. Soient $x, y \in E$, tels que $d_E(x,y) \leq \delta$. Alors,

$$d_F(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(y)) \leq \varepsilon.$$

Par passage, à la limite lorsque n tend vers l'infini,

$$d_F(g(x), g(y)) \leq \varepsilon.$$

On applique ensuite le théorème de prolongement des applications uniformément continues. Soit $\widetilde{g}$ ce prolongement.

(iii) Montrons que $(f_{\psi(n)})_n$ converge uniformément vers $\widetilde{g}$ sur (E, d_E). Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$\forall x, y \in E,\ (d_E(x,y) \leq \eta) \implies (d_F(\widetilde{g}(x), \widetilde{g}(y)) \leq \varepsilon)$$

et

$$\forall x, y \in E,\ (d_E(x,y) \leq \eta) \implies (d_F(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(y)) \leq \varepsilon)$$

On sait que $E \subset \bigcup_{x \in D} \mathcal{B}(x, \eta)$ par densité de D dans (E, d_E). Il existe $x_1, \ldots, x_N \in D$ tels que $E \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{B}(x_j, \eta)$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $d_F(f_{\psi(n)}(x_j), \widetilde{g}(x_j)) \longrightarrow_{n \to \infty} 0$ selon le premier point de la démonstration. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ \geq 0$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$d_F(f_{\psi(n)}(x_j), \widetilde{g}(x_j)) \leq \varepsilon.$$

Soit $n \geq n_0$ et $x \in E$. Il existe $j \in [\![1, N]\!]$ tel que $d(x, x_j) \leq \eta$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d_F(f_{\psi(n)}(x), \widetilde{g}(x)) \leq \quad & d_F(f_{\psi(n)}(x), f_{\psi(n)}(x_j)) + d_F(f_{\psi(n)}(x_j), \widetilde{g}(x_j)) + d_F(\widetilde{g}(x_j), \widetilde{g}(x)) \\ \leq \quad & 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration $(ii) \implies (i)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit (E, d_E) un espace métrique compact et (F, d_F) un espace métrique complet. Soit de plus $A \subset \mathcal{C}^0(E, F)$. On suppose $\overline{A}$ compact dans $(\mathcal{C}^0(E,F), d_\infty)$. Montrons que A est équicontinue. Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $\overline{A} \subset \bigcup_{f \in A} \mathcal{B}_{d_\infty}(f, \varepsilon)$, donc par Borel-Lebesgue, il existe $f_1, \ldots, f_N \in A$ tels que $\overline{A} \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{B}_{d_\infty}(f_j, \varepsilon)$. Pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, f_j est uniformément continue sur E (selon le théorème de Heine), il existe donc $\eta > 0$, tel que

$$\forall j \in [\![1, N]\!], \forall x, y \in E, (d_E(x,y) \leq \eta) \implies (d_F(f_j(x), f_j(y)) \leq \varepsilon).$$

□

Application. Pour $M > 0$, l'ensemble

$$\left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1,\ \forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \right\}$$

est relativement compact dans $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Chapitre 2

Séries de Fourier

2.1 Coefficients de Fourier

Les séries de Fourier sont un outil fondamental dans l'étude des fonctions périodiques. L'étude d'une telle fonction par les séries de Fourier se fait en deux temps :

— l'analyse, qui consiste en la détermination des coefficients de Fourier,

— la synthèse, qui permet de retrouver, en un certain sens, à l'aide de la suite de ses coefficients.

Le but du chapitre est de mettre en place les résultats classiques, de nature non hilbertienne, concernant les séries de Fourier et leur convergence. Les séries de Fourier seront une illustration importante de la théorie des espaces de Hilbert que nous développerons au prochain chapitre. Par convention, nous noterons

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t,\ \forall f \in L^1(]0,2\pi[)$$

$$\|g\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t},\ \forall f \in L^1(]0,2\pi[)$$

de sorte que les fonctions $e_k : t \longmapsto e^{ikt}$ soient de normes 1 pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

2.1.1 Définitions, règles de calcul

Définition 2.1.1. *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique, on définit les coefficients de* Fourier *de f*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t$$

pour $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque.

— $c_n(e_k) = \delta_{n,k}$ pour $n, k \in \mathbb{Z}$. On appelle polynôme trigonométrique toute fonction dont les coefficients de Fourier sont à support fini.

— Pour $\varepsilon \in]0, \pi[$, la fonction signal $\sigma_\varepsilon = \mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ admet pour coefficients de FOURIER

$$c_n(\sigma_\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\sin(n\varepsilon)}{\pi n} & \text{si } n \neq 0, \\ \frac{\varepsilon}{\pi} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Proposition 2.1.1. *Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique et $a \in \mathbb{R}$, on définit*

$$\tau_a f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t-a). \end{array}$$

On a les résultats suivants.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\tau_a f) = e^{-ina} c_n(f)$.

(ii) Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique et $n, k \in \mathbb{Z}$, alors $c_n(t \longmapsto e^{ikt} f(t)) = c_{n-k}(f)$.

(iii) Pour $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions 2π-périodiques, on a $c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g)$.

(iv) Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est 2π-périodique, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

Démonstration. (i) Changement de variable.

(ii) Évident.

(iii) Soient $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ des fonctions 2π-périodiques, et soit $n \in \mathbb{N}$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x-y) \, \mathrm{d}y.$$

Montrons d'abord que $f * g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Par FUBINI-TONELLI,

$$\begin{aligned} \int_K \int_0^{2\pi} |f(s) g(t-s)| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \int_K |f(s) g(t-s)| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} |f(s)| \int_K |g(t-s)| \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} |f(s)| \int_{K-[0,2\pi]} |g(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}s < \infty. \end{aligned}$$

On en conclue que $f * g \in L^1(K)$ donc est finie presque partout. On trouve que

$$c_n(f * g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) g(t-s) \ \mathrm{d}s \right) e^{int} \, \mathrm{d}t.$$

(iv) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique. Soit $0 = a_0 < \ldots < a_N = 2\pi$ une subdivision adaptée à f'. Alors, par intégration par parties

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\left[f(t) e^{-int} \right]_{a_j}^{a_{j+1}} + \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(t) ine^{-int} \, \mathrm{d}t \right).$$

On observe un télescopage avec le premier membre de la somme, ce qui nous donne le résultat. $\square$

2.1.2 Décroissance, régularité

Proposition 2.1.2. *On a les résultats suivants.*

(i) *(Lemme de* Riemann-Lebesgue*) Si* $f \in L^1(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$*, alors* $c_n(f) = o_{n\to\infty}(1)$.

(ii) *Si* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est* 2π*-périodique, alors* $c_n(f) = o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(iii) *Si* $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est* 2π*-périodique, alors* $c_n(f) = o_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

(iv) *Si* $f \in L^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$*, alors* $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$.

(v) *Si* $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est* 2π*-périodique, alors* $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$*. De plus, sa série de* Fourier $\sum c_n(f)e^{int}$ *converge normalement,* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|c_n(f)e_n\|_\infty < \infty$*. Enfin, sa série de* Fourier $\sum c_n(f)e^{int}$ *converge uniformément par rapport à* t.

Démonstration. (i) Soit $f \in L^1(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$. Deux cas se présentent.

— Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact, alors

$$|c_n(f)| = \left|\frac{c_n(f')}{in}\right| \leq \frac{\|f'\|_1}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} .0$$

— Si f est simplement L^1 sur $]0, 2\pi[$, on utilise la densité de $\mathcal{C}^1_c(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$ dans $\left(L^1(]0, 2\pi[, \mathbb{C}), \|\cdot\|_1\right)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1_c(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$ telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon/2$. D'après le premier cas, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_0,\ |c_n(g)| \leq \varepsilon/2.$$

On a alors pour tout $n \geq n_0$,

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f)| + |c_n(f - g)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|f - g\|_1 \leq \varepsilon,$$

et ce pour tout $\varepsilon > 0$.

(ii)

(iii)

(iv) Soit $f \in L^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$, et $N \in \mathbb{N}$. On pose

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}.$$

On a alors $f = D_N + (f - D_N)$. C'est une décomposition orthogonale dans l'espace $L^2(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$ muni de son produit scalaire habituel. En effet, pour tout $k \in [\![-N, N]\!]$,

$$\int_0^{2\pi} (f - D_N)(t)e^{ikt}\,\mathrm{d}t = c_k(f) - c_k(D_N) = c_k(f) - \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)c_k(e_n) = 0.$$

D'après Pythagore, on a

(v) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique. Montrons que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty$. Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, on a l'inégalité [1] $|c_n(f)| = \left|\frac{c_n(f')}{in}\right| \leq \frac{1}{n^2} + |c_n(f')|^2$, d'où le résultat.

□

2.1.3 Noyau de Dirichlet, noyau de Fejer

Définition 2.1.2. *On appelle noyau de* Dirichlet *la fonction définie pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ par*

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Ainsi que le noyau de Fejer

$$K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{Nt}{2}\right)^2}{N\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

Remarque. Le noyau de Fejer est la moyenne de Césaro des noyaux de Dirichlet.

Définition 2.1.3. *Soit $f \in L^1(]0,2\pi[,\mathbb{C})$, on appelle* ***série de Fourier de*** *f (convergente ou non) la série*

$$\sum c_n(f)e^{int}.$$

On définit de plus les ***sommes partielles de la série de Fourier de*** *f pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ par*

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int} = (D_N * f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Enfin, on définit leur ***moyenne de Césaro*** *pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ par*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(D_n * f)(t) = (K_N * f)(t).$$

Proposition 2.1.3. *On a les résultats suivants sur les noyaux de* Fejer *et* Dirichlet *:*

(i) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, K_N est à valeurs positives et $\|K_N\|_1 = 1$.

(ii) D_N n'est pas de signe constant. On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

mais $\lim_{n\to\infty} \|D_N\|_1 = \infty$.

1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $ab \leq 2ab \leq a^2 + b^2$.

2.2 Théorème de Fejer

Théorème 2.2.1 (Fejer). *Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une fonction 2π-périodique, alors*

$$\|f - K_N * f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque. $K_N * f$ est la moyenne de Césaro des $D_N * f$, elle a donc de meilleures propriétés de convergence que $D_N * f$. En effet, D_N n'est pas une approximation de l'unité car elle n'est pas de signe constant. En revanche, K_N l'est.

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique et $\varepsilon > 0$. On cherche un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - K_N * f(x)| \leq \varepsilon$. Par le théorème de Heine, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $x \in R$, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(|t| < \delta) \implies \left(|f(x) - f(x-t)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

De plus, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$,

$$\frac{2\,\|f\|_\infty}{N \sin(\delta/2)^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors, pour tout $t, x \in \mathbb{R}$ avec $|t| < \delta$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - (K_N * f)(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x-t))K_N(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f(x-t)|K_N(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(par positivé de } K_N\text{)} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|<\delta}|f(x) - f(x-t)|K_N(t)\,\mathrm{d}t \\
&+ \frac{1}{2\pi N}\int_{\delta<|t|<\pi}|f(x) - f(x-t)|\frac{\sin((N+1/2)t)^2}{\sin(t/2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\,\|f\|_\infty}{N\sin(\delta/2)^2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

On en déduit alors le résultat.

□

Corollaire 2.2.1. *On obtient les deux résultats suivants.*

(i) $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est une fonction 2π-périodique et si sa série de* Fourier ***converge simplement****, alors sa somme coïncide en tout point avec f.*

(ii) $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *est une fonction 2π-périodique, alors la série de* Fourier *de f* ***converge uniformément*** *sur $\mathbb{R}$ par rapport à $t \in \mathbb{R}$:*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{int}, \text{ et } \|f - D_N * f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque.

— La série de FOURIER d'une fonction continue 2π-périodique *ne converge pas nécessairement.* Il en est donc de même pour la convergence uniforme avec l'hypothèse de convergence simple.

— Cependant, on peut montrer que pour tout $f \in L^p(]0, 2\pi[, \mathbb{C})$, $\|K_N * f - f\|_p \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (théorème de FEJER L^p). Nous démontrerons ce théorème en TD pour le cas $p = 1$.

2.3 Théorème de DIRICHLET

Théorème 2.3.1 (DIRICHLET). *Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique et $x \in \mathbb{R}$. Si f admet en x des limites à droite ($f(x^+)$) et à gauche ($f(x^-)$), et si les fonctions $t \longmapsto \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}$ et $t \longmapsto \frac{f(x-t)-f(x^-)}{t}$ sont bornées au voisinage de 0^+, alors*

$$(D_N * f)(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π-périodique et $x \in \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie les hypothèses du théorème. On a pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$D_N * f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)D_N(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x-s) + f(x-s))D_N(s)\,\mathrm{d}s$$

par parité de D_N. On a alors que

$$\begin{aligned} D_N * f(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x-s) + f(x^-))D_N(s)\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x-s) + f(x^+))D_N(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x-s) + f(x^-))\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (f(x-s) + f(x^+))\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

On applique le lemme de RIEMANN-LEBESGUE à chacune des intégrales. Selon les hypothèses et grâce à l'inégalité de convexité du sinus sur $[0, 2\pi]$, il existe un certain $M > 0$ tel que

$$\left|\frac{f(x-s) - f(x^-)}{\sin(s/2)}\right| \leq \left|\frac{f(x-s) - f(x^-)}{s}\right|\left|\frac{s}{\sin(s/2)}\right| \leq M\pi \in L^1(]0, 2\pi[, \mathbb{C}).$$

$\square$

Chapitre 3

Espaces de Hilbert

3.1 Espaces préhilbertiens

On suppose connue la notion d'espace préhilbertien sur un corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Nous supposons aussi connus les concepts et résultats suivants : inégalité de Cauchy-Schwartz, l'identité du parallélogramme, les formules de polarisation, orthogonalité et orthonormalité d'une famille d'éléments, théorème de Pythagore, l'orthogonal d'une partie.

3.2 Espace de Hilbert et théorème de projection

3.2.1 Espace de Hilbert

Définition 3.2.1. *Un espace de* Hilbert *est un espace préhilbertien* $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ *complet pour la norme euclidienne associée à son produit scalaire.*

Exemples.

— $\mathbb{R}^n$ (*resp.* $\mathbb{C}^n$) muni de son produit euclidien (*resp.* hermitien) est un espace de Hilbert .

— $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni de son produit scalaire canonique est un espace de Hilbert .

— $L^2(]0,1[, \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique est un espace de Hilbert .

— Dans un espace de Hilbert , tout sous-espace vectoriel fermé est de Hilbert (CNS).

Contre-exemples.

— $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire de $L^2(]0,1[, \mathbb{R})$ n'est pas un espace Hilbert (il n'est pas fermé).

— Dans un espace de Hilbert H tout sous-espace vectoriel F qui n'est pas fermé pour la norme associée au produit scalaire de H n'est pas de Hilbert.

3.3 Théorème de projection

3.3.1 Théorème de projection sur un s.e.v de dimension finie

Notre but va être de généraliser à la dimension infinie le résultat élémentaire suivant.

Théorème 3.3.1 (projection sur un s.e.v de dimension finie)**.** *Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien. On note $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire. Soit F un sous-espace vectoriel de E* ***de dimension finie****. Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base orthonormée de F. Alors,*

(i) Pour tout $x \in E$, la distance $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ est atteinte au point

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x \mid b_j \rangle \, b_j.$$

Le théorème de Pythagore *affirme alors que*

$$\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + d(x, F)^2.$$

(ii) La projection orthogonale $P_F : E \longrightarrow F$ est continue de norme 1.

(iii) $E = F \oplus F^{\perp}$.

Démonstration. (i) Soit $y \in F$. On vérifie que $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. Ainsi,

$$\|x - y\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x) - y\|^2 \geq \|x - P_F(x)\|^2.$$

On en déduit que l'infimum est atteint en $P_F(x)$ par positivité de la norme. On déduit la seconde partie du résultat grâce au fait que $P_F(x) \perp (x - P_F(x))$ et au théorème de Pythagore.

(ii) P_F est clairement linéaire par bilinéarité du produit scalaire. Puisque $d(x, F) \geq 0$ pour tout $x \in E$,

$$\|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ce qui montre que P_F est continue, et que $\|P_F\| \leq 1$. Or, $P_F(y) = y$ pour tout $y \in F$. On en déduit donc que $\|P_F\| = 1$.

(iii) D'une part, $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$ grâce au caractère défini du produit scalaire. De plus, la décomposition d'un point $x \in E$ est donné par $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$.

$\square$

Exemples et applications.

3.3.2 Théorème de projection sur un convexe fermé

Théorème 3.3.2 (projection sur un s.e.v de dimension finie)**.** *Soit* $(H, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$ *un espace de* HILBERT . *On note* $\|\cdot\|$ *la norme associée au produit scalaire. Soit* $C \subset H$ *un convexe fermé non vide.*

(i) Pour tout $x \in E$*, la distance* $d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|$ *est atteinte en un unique point noté* $P_C(x)$ *(projection de* x *sur* C*).*

(ii) Il est caractérisé par la propriété de l'angle obtus, i.e,

$$P_C(x) \in C \quad \textit{et} \quad \Re(\langle x - P_C(x) \,|\, z - P_C(x) \rangle) \leq 0 \textit{ pour tout } z \in C.$$

(iii) La projection orthogonale $P_C : H \longrightarrow C$ *est* 1*-lipschitzienne.*

(iv) En particulier, si F *est un sous-espace vectoriel fermé (de dimension quelconque) de* H*, alors pour tout* $x \in H$*,* $P_F(x)$ *est caractérisé par les propriétés suivantes :*

$$P_F(x) \in F, \quad \textit{et} \quad \Re\left(\langle x - P_F(x) \,|\, y \rangle\right) = 0 \textit{ pour tout } y \in F, \textit{ i.e, } (x - P_F(x)) \in F^{\perp}$$

Démonstration. (i) Soit $x \in C$, et $d = d(x, C)$. Par définition de la borne inférieure, il existe $(y_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - y_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} d$. Soit $n, p \in \mathbb{N}$, on sait par l'identité du parallélogramme que

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_p\| &= \|(x - y_n) - (x - y_p)\|^2 \\
&= 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2\right) - \|2x - (y_n + y_p)\|^2 \\
&= 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2\right) - \left\|\tfrac{4x - (y_n + y_p)}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_p\|^2\right) - 4d^2 \xrightarrow[n,p \to \infty]{} 0.
\end{aligned}$$

ce qui démontre que la suite $(y_n)_n$ est de CAUCHY . Par complétude de H (et puisque C est fermé), il existe $x_C \in C$ limite de la suite $(y_n)_n$. Soit maintenant x_1 et $x_2 \in C$ en lesquels l'infimum est atteint. Alors,

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_2\| &= \|(x - x_1) - (x - x_2)\|^2 \\
&= 2\left(\|(x - x_1)\|^2 + \|(x - x_2)\|^2\right) - \|2x - (x_1 + x_2)\|^2
\end{aligned}$$

(ii) Montrons que x_C est l'unique point de C tel que :

$$\forall z \in C,\ \Re(\langle x - x_C \,|\, z - x_C \rangle) \leq 0.$$

Soit $z \in C$. Pour tout $t \in]0, 1]$, $(1 - t)x_C + tz \in C$, alors

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x - (1 - t)x_C - tz\|^2 - \|x - x_C\|^2 \\
&\leq \|x - x_C + t(x_C - z)\|^2 - \|x - x_C\|^2 \\
&\leq 2t\Re(\langle x - x_C \,|\, x_C - z \rangle) + t^2 \|z\|^2 .
\end{aligned}$$

En divisant par $t \in]0, 1]$, on remarque que

$$2\Re\left(\langle x - x_C \,|\, z - x_C\rangle\right) \le t\,\|z\|^2 .$$

Ceci étant vrai pour $t \in]0,1]$, c'est aussi vrai en passant à la limite pour $t \to 0$. D'où le sens direct. Réciproquement : soit $\tilde{x}_C \in C$ tel que $\Re(\langle x - \tilde{x}_C) \,|\, z - \tilde{x}_C\rangle) \le 0$ pour tout $z \in C$. Montrons que $\|x_C - \tilde{x}_C\| = d$. Pour $z \in C$,

$$\begin{aligned}\|x-z\|^2 &= \|(x-\tilde{x}_C)-(z-\tilde{x}_C)\|^2\\ &= \|x-\tilde{x}_C\|^2 + \|z-\tilde{x}_C\|^2 \; - 2\Re(\langle x-\tilde{x}_C \,|\, z-\tilde{x}_C\rangle)\\ &\ge \|x-\tilde{x}_C\|^2 .\end{aligned}$$

par négativité de la partie réelle du produit scalaire.

(iii) Soient $x, y \in H$. Montrons que P_C est 1-lipschitzienne. On a

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \|(P_C(x)-P_C(y)) + ((x-P_C(x))-(y-P_C(y)))\|^2\\ &= \|P_C(x)-P_C(y)\|^2 + \|\ldots\|^2\\ &\quad -2\Re(\langle x-P_C(x) \,|\, P_C(y)-P_C(x)\rangle) - 2\Re\left(\langle y-P_C(y) \,|\, P_C(x)-P_C(y)\rangle\right)\\ &\ge \|P_C(x)-P_C(y)\|^2\end{aligned}$$

□

Remarque. En fait l'hypothèse de complétude de l'espace H entier n'est pas utilisée. Il suffit de supposer que H est un espace préhilbertien, et que C est une partie convexe et complète de H.

3.3.3 Théorème du supplémentaire orthogonal

Théorème 3.3.3 (du supplémentaire orthogonal (TSO))**.** *Soit H un espace de* HILBERT , *et F un sous-espace vectoriel **fermé** de H. Alors,*

$$H = F \oplus F^{\perp} \quad \text{et donc} \quad \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F.$$

Corollaire 3.3.1 (critère de densité)**.** *Soit H un espace de* HILBERT *et F un sous-espace vectoriel de H. Alors, F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0_H\}$.*

3.3.4 Dualité : théorème de RIESZ

Théorème 3.3.4. *Soit H un espace de* HILBERT . *Pour tout $\varphi \in \mathscr{L}_c(H,\mathbb{K})$, il existe un unique $x_0 \in H$ tel que $\varphi(y) = \langle x_0 \,|\, y\rangle$ pour tout $y \in H$. De plus, $\|\varphi\|_{\mathscr{L}_c(H,\mathbb{K})} = \|x_0\|$.*

3.4 Bases hilbertiennes

3.4.1 Définition, existence

Définition 3.4.1. *Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Une base hilbertienne de E est une famille orthonormée totale, i.e que l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans E.*

Remarque. Une telle définition impose de bien distinguer les bases *hilbertiennes* des bases *algébriques*.

Théorème 3.4.1. *Un espace préhilbertien est séparable si et seulement si il admet une base hilbertienne dénombrable.*

Remarque. Lorsque H est un Hilbert non séparable, il admet une base hilbertienne, mais elle n'est pas dénombrable. La démonstration de l'existence d'une telle base repose sur le lemme de Zorn, et la base obtenue est délicate à manipuler : puisque l'ensemble des indices est non dénombrable, on doit travailler avec des familles sommables, plutôt qu'avec des séries convergentes.

3.4.2 Caractérisation par l'égalité de Bessel

Théorème 3.4.2 (Bessel-Parseval)**.** *Soit E un espace préhilbertien, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E. Sont équivalents.*

(i) $(e_n)_n$ *est une base hilbertienne de E.*

(ii) Pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \langle x \mid e_n \rangle \right|^2 \quad \textit{(égalité de } \text{Bessel}\textit{).}$$

(iii) Pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x \mid e_n \rangle \langle e_n \mid y \rangle^2 .$$

Démonstration. Rappelons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, si $F_N = \mathrm{Vect}\,(e_n)_{0\leq n\leq N}$, alors $P_{F_N}(x) = \sum_{n=0}^{N} \langle x \mid e_n \rangle e_n$ pour tout $x \in E$, et

$$\mathrm{d}(x, F_N) = \|x - P_{F_N}(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \left| \langle x \mid e_n \rangle \right|^2}.$$

— $(i) \implies (ii)$. Supposons $(e_n)_n$ être une base hilbertienne. Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{d}(x, F_{N_0})^2 < \varepsilon$. Alors, comme $F_{N_0} \subset F_N$ pour tout $N \geq N_0$, on a

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \left| \langle x \mid e_n \rangle \right|^2 = \mathrm{d}(x, F_N)^2 \leq \mathrm{d}(x, F_{N_0}) < \varepsilon.$$

On en déduit la convergence de la somme et l'égalité de Bessel.

— *(ii)* $\implies$ *(i)*. Supposons qu'on ait pour tout $x \in E$ l'égalité de Bessel. Alors,

$$\|x - P_{F_N}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \left| \langle x \mid e_n \rangle \right|^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

d'où la densité de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— *(ii)* $\implies$ *(iii)*. Formules de polarisation.

— *(iii)* $\implies$ *(ii)*. Évident.

□

Théorème 3.4.3. *(i) L'application*

$$J : \left| \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & (\langle x \mid e_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

est une isométrie.

(ii) Pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x \mid e_n \rangle \, e_n,$$

et cette série est commutativement convergente.

(iii) L'isométrie J est surjective si et seulement si E est complet (donc un Hilbert).

3.4.3 Application aux séries de Fourier

3.5 Annexe 1. Application du théorème de Riesz : résolution d'EDP elliptiques

Chapitre 4

Théorème de Baire et applications

4.1 Théorème de Baire

Théorème 4.1.1 (Baire)**.** *Soit (E,d) un espace métrique* ***complet****. On a les résultats suivants.*

(i) Si $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts de (E,d) denses dans (E,d), alors

$$\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$$

est dense dans (E,d).

(ii) Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fermés de (E,d) d'intérieur vide dans (E,d), alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$$

est d'intérieur vide dans (E,d).

Démonstration. Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts denses. Montrons que $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$ est dense dans E. Pour cela, on va montrer que Ω rencontre tout ouvert de (E,d). Soit alors ω un ouvert de (E,d). Montrons donc que $\Omega \cap \omega \neq \varnothing$.

— *Étape 1.* On construit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ une suite suite $(x_n)_n$ d'éléments de E et $(r_n)_n \in \mathbb{R}$ une suite de rayons, telles que $\mathcal{B}(x_0, r_0) \subset \omega$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{B}_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathcal{B}(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \quad \text{et} \quad 0 < r_{n+1} \leq \frac{r_n}{2}.$$

  — $n = 0$. ω est ouvert.

  — Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $x_0, \ldots, x_n$, $r_0, \ldots, r_n$ construits. On veut construire x_{n+1} et r_{n+1}. Puisque O_{n+1} est dense, il rencontre l'ouvert $\mathcal{B}(x_n, r_n)$. Soit alors $x_{n+1} \in \mathcal{B}(x_n, r_n) \cap O_{n+1}$ et $r_{n+1} > 0$ suffisamment petit tel que
  ...

— *Étape 2.* Montrons alors que $\omega \cap \Omega \neq \varnothing$. Pour $n < p$ des entiers positifs, on a

$$d(x_n, x_p) < r_n < \frac{r_0}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On en déduit que $(x_n)_n$ est de CAUCHY. Puisque (E, d) est complet, il existe $x_\infty \in E$ limite de cette suite, *i.e* $d(x_n, x_\infty) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrons que $x_\infty \in \omega$ et que $x_\infty \in O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité $d(x_n, x_p) < r_n$ montre que (en faisant tendre p vers l'infini) $x_\infty \in \mathcal{B}_f(x_n, r_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$x_\infty \in \mathcal{B}_f(x_1, r_1) \subset \mathcal{B}(x_0, r_0) \subset \omega \quad \text{et} \quad B_f(x_n, r_n) \subset O_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

□

Exercice. Soit $(H, \langle\ \cdot \mid \cdot\rangle\,, \|\cdot\|)$ un espace de HILBERT , et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H. Montrer que l'ensemble

$$\{x \in H \mid \forall n \in \mathbb{N},\, \langle x \mid y_n\rangle \neq 0\}$$

est dense dans H.

Applications. Ce théorème peut servir à démontré qu'un ensemble défini par une quantité dénombrables de "contraintes ouvertes" est dense. On trouve dans *Analyse* de Xavier GOURDON les exemples suivants :

— un espace vectoriel normé admettant une base (algébrique) dénombrable (non finie) n'est pas complet ;

— les fonctions continues, nulle part dérivables, sont denses dans $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$;

— une fonction dérivée est continue sur un ensemble dense.

Enfin, on termine avec un exemple que nous allons corriger ici. Montrons que

$$O = \{x \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N},\, x_n \neq 0\}$$

est dense dans $(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$. On a

$$O = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \text{ où pour tout } n \in \mathbb{N},\, O_n = \{x \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid x_n \neq 0\}.$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. O_n est un ouvert de $(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$. En effet, si $x \in O_n$, alors $\mathcal{B}(x, |x_n|/2) \subset O_n$, car si $y \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, et $\|y - x\|_2 < |x_n|/2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n - x_n|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |y_k - x_k|^2 = \|y - x\|_2^2 \ldots$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, O_n est dense dans $(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$. En effet, si $y \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \backslash O_n$. On a $y_n = 0$. On pose alors x^ε la suite égale à y en tout point, sauf en n, où $x_n = \varepsilon e_n$...

4.2 Théorème de Banach-Steinhauss

4.2.1 Énoncé

Théorème 4.2.1 (Banach-Steinhaus)**.** *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un* ***espace*** **Banach***, et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *un espace vectoriel normé quelconque. Soit* $(T_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $\mathscr{L}_c(E,F)$ *(pour les normes associées). On suppose que pour tout* $x \in E$*,*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < \infty.$$

Alors,

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} < \infty.$$

Ce théorème est très important, et permet d'obtenir des estimations uniformes à partir d'estimations ponctuelles.

Démonstration. On va utiliser l'énoncé sur les fermés du théorème de Baire. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$Y_n = \{x \in E \,|\, \forall i \in I,\, \|T_i(x)\|_F \le n = \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(\mathcal{B}_f(0_F, n)).$$

C'est bien un fermé de $(E, \|\cdot\|)$ comme intersections de fermés (en utilisant le fait que les T_i sont des opérateurs continus). Par hypothèse,

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n.$$

Puisque $(E, \|\cdot\|)$ est complet, le théorème de Baire affirme qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de Y_{n_0} est non vide. Soit alors $x \in \mathrm{Int}(Y_{n_0})$ et $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(x,r) \subset \mathrm{Int}(Y_{n_0})$. Alors, pour tout $i \in I$, et $z \in \mathcal{B}(0_E, 1)$,

$$\left\|T_i\left(x + \frac{r}{2}z\right)\right\|_F \le n_0$$

car $x + \frac{r}{2}z \in \mathcal{B}(x,r)$. Ainsi,

$$\|T_i(z)\|_F = \frac{\left\|T_i(x+\frac{r}{2}z)\right\| - T_i(x)_F}{r/2} \le \frac{\left\|T_i(x+\frac{r}{2}z)\right\|_F + \ \|T_i(x)\|_F}{r/2} \le \frac{2n_0}{r/2}.$$

Ainsi, $\|T_i\| \le \frac{4n_0}{r}$, et ce pour tout $i \in I$.

□

Corollaire 4.2.1. *Soit* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un* ***espace*** **Banach***, et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *un espace vectoriel normé quelconque. Soit* $(T_n)_n \in \mathscr{L}_c(E,F)^{\mathbb{N}}$*. Si* $(T_n)_n$ *converge simplement sur* E *vers une application* T*, alors*

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} < \infty$,

(ii) $T \in \mathscr{L}_c(E,F)$,

(iii) $\|T\|_{\mathscr{L}_c(E,F)} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}_c(E,F)}$.

Démonstration. □

4.2.2 Applications aux séries de FOURIER

Proposition 4.2.1. *Il existe une fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 2π-périodique dont la série de* FOURIER *ne converge pas en $t=0$.*

Démonstration. On note $\mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace des fonctions continues dans $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on définit $\Lambda_N : \mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\Lambda_N(f) = (D_N * f)(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_N(-s)\,\mathrm{d}s$$

pour tout $f\in\mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On doit alors montrer qu'il existe $f\in\mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ une fonction telle que $(\Lambda_N(f))_N$ ne converge pas. Puisque $\mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est complet, il suffit de montrer que

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \|\Lambda_N\|_{\mathscr{L}_c(\mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\mathbb{C})} = \infty.$$

— *Étape 1.* Montrons que Λ_N est continue et que $\|\Lambda_N\| = \|D_N\|_1$. Pour $f\in\mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a $|D_N(f)| \leq \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\|D_N\|_1$. Cela assure la continuité de Λ_N, et que sa norme vérifie $\|D_N\| \leq \|D_N\|_1$. Or, il existe $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ tel que $|f_\varepsilon| \leq 1$ pour tout $\varepsilon>0$, et

$$f_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{p.p} \operatorname{sign}(D_N).$$

Et alors, par convergence dominée, on obtiendra la seconde inégalité de normes qui nous donnera l'égalité.

— *Étape 2.* Montrons que $\|D_N\|_1 \xrightarrow[N\to\infty]{} \infty$. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, on a par parité que

$$\|D_N\|_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |D_N(s)|\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin((N+1/2)s)|}{\sin(s/2)}\,\mathrm{d}s.$$

Par inégalité de convexité sur le dénominateur, on a

$$\|D_N\|_1 \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin((N+1/2)s)|}{s}\,\mathrm{d}s.$$

Par le changement de variable $y=(N+1/2)s$,

$$\|D_N\|_1 \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+1/2)\pi} \frac{|\sin(y)|}{y}\,\mathrm{d}y \geq \sum_{k=0}^{N-1}\frac{C}{k+1}.$$

où $C = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} |\sin(y)|\,\mathrm{d}y$. On a donc minoré $\|D_N\|_1$ par le terme d'une série divergente, d'où le résultat.

□

4.3 Théorème de l'application ouverte et théorème d'isomorphisme de Banach

Théorème 4.3.1 (de l'application ouverte (Banach-Schauder)). *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces de* Banach. *Soit enfin T une application linéaire continue surjective de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur $(F, \|\cdot\|_F)$. Alors, il existe $c > 0$ tel que $\mathcal{B}(0_F, c) \subset T(B(0_E, 1))$.*

Remarque. On dit alors que T est une *application ouverte.*

Démonstration. — *Étape 1.* Montrons qu'il existe $c > 0$ tel que $\mathcal{B}(0_F, 2c) \subset \overline{T(\mathcal{B}(0_E, 1))}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = n\overline{T(\mathcal{B}(0_E, 1))}$. C'est un fermé de $(F, \|\cdot\|_F)$. Par surjectivité de T,

$$F = \bigcup_{n \in N} F_n.$$

En effet, si $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $T(x) = y$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $\frac{\|x\|}{n} < 1$. Alors, $y = nT(\frac{x}{n}) \in F_n$. Puisque $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet, le théorème de Baire affirme qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Int}(F_{n_0}) \neq \varnothing$. Nécessairement, $\overline{T(\mathcal{B}(0_E, 1))}$ est aussi d'intérieur non vide. Il existe donc $x \in F$ et $c > 0$ tels que $\mathcal{B}(x, 4c) \subset \overline{T(\mathcal{B}(0_E, 1))}$. Alors,

$$\mathcal{B}(0_F, 4c) = -x + \mathcal{B}(x, 4c) \subset \overline{T(\mathcal{B}(0_E, 1))} + \underbrace{\overline{T(\mathcal{B}(0_E, 1))}}_{2\overline{T(\mathcal{B}(0_E, 1))}}.$$

On en déduit que $\mathcal{B}(0_F, 2c) \subset \overline{T(\mathcal{B}(0_E, 1))}$.

— *Étape 2.* Montrons que $\mathcal{B}(0_F, c) \subset T(\mathcal{B}(0_E, 1))$. Soit $y \in F$ tel que $\|y\|_F < c$. On cherche un antécédent $x \in E$ de y tel que $\|x\|_E < 1$. Construisons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ une suite $(z_n)_n$ d'éléments de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|y - T(z_1 + \cdots + z_n)\|_F < \frac{c}{2^n} \quad \text{et} \quad \|z_n\|_E < \frac{1}{2^n}.$$

- $n = 1$. On sait que $2y \in \mathcal{B}(0_F, 2c) \subset \overline{T(\mathcal{B}(0_E, 1))}$. Il existe $\tilde{z}_1 \in \mathcal{B}(0_E, 1)$ tel que $\|2y - T(\tilde{z}_1)\| < c$. On pose alors $z_1 = \tilde{z}_1/2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $z_1, \ldots, z_n$ construits. Construisons z_{n+1}. Par hypothèse de récurrence,

$$2^{n+1}(y - T(z_1 + \cdots + z_n)) \in \mathcal{B}(0_F, 2c).$$

Il existe alors $\tilde{z}_{n+1} \in \mathcal{B}(0_E, 1)$ tel que

$$\left\|2^{n+1}(y - T(z_1 + \cdots + z_n)) - T(\tilde{z}_{n+1})\right\|_F < c.$$

Alors,

$$z_{n+1} = \frac{\tilde{z}_{n+1}}{2^{n+1}}$$

convient.

Ainsi construite, $\sum \|z_n\|_E$ converge absolument donc $\sum z_n$ converge (car $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet). Notons

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Alors, par construction, $\|x\|_E \leq 1$. De plus, un passage à la limite permet de conclure que $T(x) = y$.

$\square$

Théorème 4.3.2 (d'isomorphisme de BANACH)**.** *Soit* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *des espaces de* BANACH. *Soit* T *une application linéaire continue bijective de* $(E, \|\cdot\|_E)$ *sur* $(F, \|\cdot\|_F)$. *Alors,* T^{-1} *est continue de* $(F, \|\cdot\|_F)$ *sur* $(E, \|\cdot\|_E)$.

Démonstration. On applique le théorème de l'application ouverte : il existe $c > 0$ tel que

$$B(0_F, c) \subset T(B(0_E, 1)).$$

Soit $y \in F$ un vecteur non nul. On voit que $\frac{cy}{2\|y\|} \in \mathcal{B}(0_F, c)$. Il existe donc $x \in \mathcal{B}(0_E, 1)$ tel que $T(x) = \frac{cy}{2\|y\|}$. Par linéarité,

$$y = T\left(\frac{2\|y\|_F}{c} x\right).$$

Par bijectivé de T, on a $T^{-1}(y) = \frac{2\|y\|_F}{c} x$. Puisque $\|x\|_E < 1$, on conclut que

$$\left\|T^{-1}(y)\right\|_E \leq \frac{2}{c} \|y\|_F,$$

d'où la continuité de T^{-1}.

$\square$

Chapitre 5

Topologie faible dans espace de Hilbert

5.1 Suites faiblement convergentes dans un espace de Hilbert

Définition 5.1.1. *Soit $(H, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H converge faiblement vers un élément f si pour tout $g \in H$,*

$$\langle f_n \mid g \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f \mid g \rangle .$$

Notation. $f_n \rightharpoonup f$.

Remarque. La limite est unique.

Exemples.

- Les fonctions $e_n : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{int}$ (pour $n \in \mathbb{N}$) sont des éléments de $L^2([0,1], \mathbb{C})$. Selon le lemme de Riemann-Lebesgue, la suite $(e_n)_n$ converge faiblement vers la fonction nulle.
- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée d'éléments de H, alors $f_n \rightharpoonup 0$. En effet, pour tout $z \in H$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle z \mid f_n \rangle|^2 \leq \|z\|^2 ,$$

donc $\langle z \mid f_n \rangle \rightharpoonup 0$ lorsque $n \to \infty$. Des exemples concrets sont par exemple la suite $((\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $l^2(\mathbb{N})$, ou la suite $(t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ dans $L^2([0,2\pi], \mathbb{C})$.

Proposition 5.1.1. *Soit $(f_n)_n, (g_n)_n$ deux suites de $H^{\mathbb{N}}$. On a les résultats suivants.*

(i) $(f_n \rightharpoonup f) \implies (f_n \xrightarrow[n\ \to\infty]{} f)$.

(ii) $(f_n \rightharpoonup f) \implies (\|f\| \leq \liminf \|f_n\|)$.

(iii) Si $f_n \rightharpoonup f$, alors $(f_n)_n$ est bornée.

(iv) $(f_n \to f) \iff (f_n \rightharpoonup f) \wedge (\|f_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|)$.

(v) $(f_n \rightharpoonup f) \wedge (g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g) \implies (\langle f_n \,|\, g_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle f \,|\, g\rangle)$ *(la convergence faible de $(g_n)_n$ ne suffit pas).*

(vi) Si $(f_n \rightharpoonup f)$ alors f appartient à l'enveloppe convexe fermée de $\{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ (pour la topologie de la norme).

Démonstration. (i) Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz à $f_n - f$ et g.

(ii) On a

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \langle f \mid f_n\rangle = \liminf_{n\to\infty} \langle f \mid f_n\rangle \leq \|f\| \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|\,.$$

(iii) On applique le théorème de Banach-Steinhaus. On pose $T_n : H \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \langle f_n \,|\, h\rangle$. Ill suffit de montrer que $\|T_n\| = \|f_n\|$.

(iv) Le sens direct est évident. Pour le sens réciproque, on écrit que

$$\|f_n - f\|^2 = \|f_n\|^2 + \|f\|^2 - 2\Re(\langle f \mid f_n\rangle) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(v) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(f_n)_n$ est faiblement convergente, c'est une suite bornée . Soit $M > 0$ un majorant de la suite $(\|f_n\|)_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$ un entier suffisamment grand, on a

$$|\,\langle f_n - f \mid g\rangle\,| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \|g_n - g\| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

On remarque alors que pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand,

$$\begin{aligned} |\,\langle f_n \,|\, g_n\rangle - \langle f \mid g\rangle\,| &\leq |\,\langle f_n \,|\, g_n - g\rangle\,| + |\,\langle f_n - f \mid g\rangle\,| \\ &\leq \|f_n\|\,\|g_n - g\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour se convaincre que la réciproque est fausse, il suffit de prendre $f_n = g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tel que $\|f_n\| = 1$ et $f_n \rightharpoonup 0$. On peut par exemple prendre $x \longmapsto e^{inx}$ dans $L^2([0,1],\mathbb{C})$.

(vi) Soit C l'enveloppe convexe fermée (pour la convergence forte) de $\{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Soit $P_C : H \longrightarrow C$ la projection sur C. La caractérisation de l'angle obtu, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Re(\langle f - P_C(f) \,|\, f_n - P_C(f)\rangle) \leq 0.$$

En passant à la limite lors que $n \to \infty$, et en utilisant la convergence faible des f_n, on obtient que

$$\|f - P_C(f)\|^2 = \Re(\langle f - P_C(f) \,|\, f - P_C(f)\rangle) \leq 0.$$

On en déduit que $f = P_C(f)$, d'où $f \in C$.

□

Exemples d'obstructions à la convergence forte.

5.2 Compacité faible

Théorème 5.2.1. *Dans un espace de* HILBERT *séparable, de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement.*

Démonstration. Soit H un espace de HILBERT séparable, $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H, dense dans H. Soit $(f_n)_n$ une suite bornée d'éléments de H.

— *Étape 1.* Montrons qu'il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\left(\left\langle f_{\psi(n)} \,|\, h_k \right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La suite $\left(\left\langle f_{\psi(n)} \,|\, h_k \right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient alors ψ par un procédé d'extraction diagonale.

— *Étape 2.* Montrons que $g \in H$, la suite $\left(\left\langle f_{\psi(n)} \,|\, g \right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. Soit $g \in H$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\|g - h_K\| < \frac{\varepsilon}{3M}$. La suite $\left(\left\langle f_{\psi(n)} \,|\, h_K \right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est de CAUCHY. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$,

$$|\left\langle f_{\psi(n)} - f_{\psi(M)} \,|\, h_k \right\rangle| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, l'inégalité triangulaire montre que la suite $\left(\left\langle f_{\psi(n)} \,|\, g \right\rangle\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de CAUCHY donc converge dans $\mathbb{R}$. On note $L(g)$ sa limite.

— *Étape 3.* On applique le théorème de Riesz. En effet, L est une forme linéaire puisque pour tout $g \in H$, l'inégalité de CAUCHY affirme que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left\langle f_{\psi(n)} \,|\, g \right\rangle\right| \leq M \|g\|.$$

Le théorème de RIESZ affirme alors qu'il existe $f \in H$ tel que $L(g) = \langle f \,|\, g \rangle$ pour tout $g \in H$. On conclut en remarquant que f est la limite faible des $f_{\psi(n)}$.

□

Remarque. L'hypothèse de séparabilité de H n'est pas nécessaire. Elle simplifie la démonstration, mais on peut toujours se ramener à un espace de HILBERT séparable en écrivant que $H = V \oplus V^{\perp}$ avec $V = \overline{\mathrm{Vect}\{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}}$. La plupart des espace de HILBERT que nous manipulons sont séparables, le théorème tel qu'il est suffit donc au cadre de ce cours.

5.3 Application à l'optimisation

Proposition 5.3.1. *Soit H un espace de* HILBERT *séparable, et $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ convexe et coercive, i.e que*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} J(x) = \infty.$$

Soit C un convexe fermé non vide de H. Alors, il existe $x_* \in C$ tel que

$$J(x_*) = \inf_{x\in C} J(x).$$

En d'autres termes, l'infimum sur un convexe fermé non vide est toujours atteint.

5.4 Quelques relations entre différents types de convergences

Proposition 5.4.1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L^2(\Omega, \mathbb{R})$, et $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Alors, $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ si et seulement si $(f_n)_n$ converge vers dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $(f_n)_n$ est bornée dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$.*

Chapitre 6

Le théorème spectral sur un espace de Hilbert

Ce chapitre aura pour but de démontrer le théorème spectral dans un espace de Hilbert quelconque. En dimension finie, il s'énonce ainsi.

Théorème 6.0.1 (spectral en dimension finie)**.** *Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien de dimension finie, et $T \in \mathscr{L}(E)$. Alors, on a les propriétés suivantes.*

(i) Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de T.

(ii) Les espaces propres de T sont orthogonaux et ses valeurs propres sont réelles.

(iii) La norme de T (subordonnée à la norme euclidienne) est son rayon spectral, i.e,

$$\|T\| = \rho(T) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T)} |\lambda|.$$

(iv) (Inégalité de Rayleigh). Pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$,

$$\min \mathrm{Sp}\, T \leq \frac{\langle x \mid T(x) \rangle}{\|x\|^2}.$$

Ce théorème est une conséquence directe de la réduction des endomorphismes normaux. En dimension infinie, la généralisation est la suivante.

Théorème 6.0.2. *Soit $(H, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace de* HILBERT *séparable sur $\mathbb{R}$, et $T \in \mathscr{L}_c(H)$ un endomorphisme autoadjoint compact. Alors, on a les propriétés suivantes.*

(i) *H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

(ii) *Les espaces propres de T sont orthogonaux et ses valeurs propres sont réelles.*

(iii) *La norme de T (subordonnée à la norme euclidienne) est son rayon spectral, i.e,*

$$\|T\|_{\mathscr{L}_c(H)} = \rho(T) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(T)} |\lambda|.$$

(iv) *(Inégalité de* RAYLEIGH*). Pour tout $x \in H \backslash \{0_H\}$,*

$$\min \mathrm{Sp}\, T \leq \frac{\langle x \,|\, T(x) \rangle}{\|x\|^2}.$$

6.1 Endomorphisme adjoint

6.2 Opérateurs compacts sur un espace de Banach

6.3 Spectre et valeurs propres

6.4 Annexe 1. Réduction des endomorphismes normaux en dimension finie

6.5 Annexe 2. Propriétés des opérateurs compacts sur un espace de Hilbert

6.6 Annexe 3. Démonstration partielle du théorème spectral

Chapitre 7

Théorème de HAHN-BANACH, complément de dualité

7.1 Théorème de HAHN-BANACH analytique

7.1.1 Démonstration du théorème de HAHN-BANACH sur un espace de HILBERT

7.1.2 Prolongement avec une dimension de plus

7.1.3 Démonstration du théorème de HAHN-BANACH en dimension finie

7.1.4 Démonstration du théorème de HAHN-BANACH dans le cas général *via* le lemme de ZORN

7.2 Complément de dualité

7.3 Théorème de HAHN-BANACH géométrique

7.3.1 Hyperplans

7.3.2 Le théorème

Chapitre 8

Calcul différentiel

8.1 Théorèmes des extremas liés (démonstration élémentaire)

8.1.1 Énoncé

Théorème 8.1.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On pose*

$$N = \{x \in U \mid f(x_1) = \cdots = f_k(x) = 0\}.$$

Soit $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On suppose que g admet un extrêmum local en un point $x^* \in N$ tel que les formes linéaires $df_1(x^*), \ldots, df_k(x^*)$ soient libres. Alors, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, tels que

$$dg(x^*) = \sum_{i=1}^{k} df_i(x^*).$$

Remarques.

— On peut aussi vérifier que les vecteurs $\nabla f_1(x^*), \ldots, \nabla f_k(x^*)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^n$ (lorsque c'est le cas, on dit que les contraintes sont qualifiées en x^*).

— Les λ_i sont appelés les *multiplicateurs de* Lagrange.

Lemme 8.1.1. *Soient T, $L_1, \ldots, L_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $(L_1, \ldots, L_k)$ soit libre et*

$$\bigcap_{j=1}^{k} \ker(L_j) \subset \ker(T).$$

Alors, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, tels que

$$T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i L_i.$$

Démonstration. Soient $v_1, \ldots, v_k, w \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$T(x) = \langle w \,|\, x \rangle \quad \text{et} \quad L_j(x) = \langle v_j \,|\, x \rangle \quad \text{pour tout } j \in [\![1, k]\!].$$

Soit l'application $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k+1}$, $x \mapsto (L_1(x), \dots, L_k(x), T(x))$, et M sa matrice dans la base canonique. On a que $\mathrm{rg}(L) = n - \dim L = k$. On en déduit que les $k+1$ lignes de la matrice M sont liées. On peut donc exprimer T en fonction des L_j.

□

On peut maintenant démontrer le théorème principal.

Démonstration. — *Étape 1.* Soit $f = (f_1, \dots, f_k) : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$. La différentielle

$$\begin{array}{rccl} df(x^*) : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ & h & \longmapsto & (df_1(x^*), \dots, df_k(x^*)). \end{array}$$

On pose $E_1 = \ker(df(x^*)) = \bigcap_{j=1}^k \ker(df_j(x^*))$ (de dimension $n-k$). Soit E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout vecteur On note $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x = x_1 + x_2$ sa décomposition dans $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$. Notons

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f} : \tilde{U} \subset E_1 \times E_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & f(x_1 + x_2). \end{array}$$

Alors,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}(x^*) \cdot h_2 = df(x^*) \cdot h_2$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. La fonction $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}(x^*) : \tilde{E}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est bijective. On applique alors le théorème des fonctions implicites. Il existe des voisinages ouverts $U_1 \in \mathcal{V}_{E_1}(x_1^*)$, $U_2 \in \mathcal{V}_{E_2}(x_2^*)$, et $\varphi \in \mathcal{C}^1(U_1, U_2)$ tels que pour tout $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$,

$$(\tilde{f}(x_1, x_2) = 0) \iff (x_1 \in U_1) \wedge (x_2 = \varphi(x_1)).$$

Ainsi,

$$N \cap (U_1 \times U_2) = \{x_1 + \varphi(x_1) \,|\, x_1 \in U_1\}.$$

— *Étape 2 : équation d'*EULER. Puisque $g_{|N}$ est extrêmale en x^*, alors $U_1 \to \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto g(x_1 + \varphi(x_1))$ est extrêmale en $x_1^* \in U_1$ (on rappelle que U_1 est un ouvert). On en déduit que pour tout $h_1 \in E_1$,

$$0 = dg(x^*) \cdot (h_1 + \underbrace{d\varphi(x_1^*) \cdot h_1}_{=0}).$$

Alors, par le théorème des fonctions implicites,

$$d\varphi(x^*) \cdot h_1 = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}(x^*)^{-1} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(x^*) \cdot h_1$$

□

8.2 Sous-variétés

Les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ cherchent à étendre le concept de courbe, tout en essayant de préserver les structures d'espaces vectoriels sur lequels nous savons différentier des fonctions.

8.2.1 Définitions équivalentes

Définition 8.2.1. *Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, et $k \in [\![1, n]\!]$. Un sous-ensemble N de $\mathbb{R}^n$ est dit être une* ***sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^p$*** *si, pour tout $x_0 \in N$, il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ tel que l'un des énoncés équivalents suivants a lieu.*

— *(Carte locale). Il existe un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme local $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\varphi(N \cap W)[\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}] \cap \varphi(W).$$

L'application φ aplattit N sur un espace vectoriel plat.

— *(Graphe). Il existe une application $u : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ et un changement de coordonnées $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que*

$$N \cap W = \{A(z, u(z)) \,|\, z \in \mathbb{R}^k\} \cap W.$$

— *(Équation). Il existe $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $dF(x_0)$ soit surjective, et $N \cap W = F^{-1}(\{0\})$.*

— *(Nappe paramétrée).*

Pont aux ânes. Soit $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x^2\}$, la parabole dans le plan $\mathbb{R}^2$. Montrons que $\mathcal{P}$ est une sous-variété de dimension et de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$. On va montrer ce résultats de trois manières différentes.

— (Carte locale). Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, y - x^2)$. Cette application satisfait $\varphi(\mathcal{P}) = \mathbb{R} \times \{0\}$, et est inversible d'inverse $z, w \longmapsto (z, w + z^2)$. Puisque φ et φ^{-1} sont des applications polynomiales, on en déduit que φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

— (Graphe). $\mathcal{P} = \{(x, x^2) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ est le graphe de $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

— (Équation). On a $\mathcal{P} = F^{-1}(\{0\})$ où on a posé

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & y - x^2. \end{array} \right.$$

F est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et est surjective ($y = f(0, y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$).

8.2.2 Espace tangent

Définition 8.2.2. *Soit N une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in N$. On définit* ***l'espace tangent à** N **en** x_0 comme l'ensemble $T_{x_0}N$ des vecteurs vitesse $t = 0$ des chemins de classe $\mathcal{C}^1$ tracés sur N passant par x_0 à $t = 0$, i.e,*

$$T_{x_0}N = \left\{\gamma'(0) \,|\, \forall \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}),\ I \text{ intervalle ouvert contenant } 0,\ \gamma(I) \subset N,\ \gamma(0) = x_0\right\}.$$

Remarques.

— Si N est un ouvert d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $T_{x_0}N$ coïncide avec ce sous-espace vectoriel.

— Pour l'instant, il n'est absolument pas clair que $T_{x_0}N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On s'efforcera de démontrer cela en utilisant des définitions équivalentes à l'aides des quatre définitions de sous-variété.

8.2.3 Équivalence des définitions.

Une carte locale définit une équation

Soit $x_0 \in N$. Il existe un voisinage $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ et $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme tel que $\varphi(N \cap W) \subset (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \cap \varphi(W)$. Notons $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k})$ les équations coordonnées dans l'espace d'arrivée. Soit $F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$, $x \mapsto (v_1(\varphi(x)), \ldots, v_{n-k}(\varphi(x)))$. Cette application de classe $\mathcal{C}^p$, et $F^{-1}(\{0\})$, et de plus, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ (par composition),

$$dF(x_0) \cdot h = (v_1(d\varphi(x_0) \cdot h, \ldots, v_{n-k}(d\varphi(x_0) \cdot h))).$$

Cette application est bien surjective car la différentielle $d\varphi(x_0)$ est bijective (puisque φ est au moins un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme).

Une équation définit un graphe

Soit $x_0 \in N$. Il existe un voisinage $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$. Il existe $F : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $N \cap W : F^{-1}(\{0\})$ et $dF(x_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est une surjection. Notons $E_1 = \ker(dF(x_0))$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k en vertu du théorème du rang. Soit de plus E_2 un supplémentaire de E_1 dans $\mathbb{R}^n$. Identifions $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$ à l'espace $E_1 \times E_2$ (si $x = x_1 + x_2$ est décomposé, alors on l'identifie à (x_1, x_2)). Alors, l'application $\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0) : E_2 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est injective donc bijective par égalité des dimensions. D'après le théorème des fonctions implicites, il exist une fonction $u : E_1 \longrightarrow E_2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ définie au voisinage de x_1 (où x_1 est la composante de x_0 dans E_1) telle que (quitte à réduire W),

$$N \cap W = \{(y_1, u(y_1)) \,|\, y_1 \in E_1\} \cap W.$$

De plus, $du(x_1) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0)\right)^{-1} \circ \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0)$.

Un graphe définit une carte locale

Soit $x_0 \in N$. Il existe un voisinage $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$. Il existe une application $u : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}n - k$ tel que (quitte à changer de coordonnée *via* une matrice inversible),

$$N \cap W = \{(z, u(z)) \,|\, z \in \mathbb{R}^k\} \cap W.$$

On identifie $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, et en notant $x = (x_1, x_2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} W \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1, x_2 - u(x_1)). \end{array} \right.$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^p$ et que (selon le théorème des fonctions composées),

$$d\varphi(x_0) \cdot h = (h_1, h_2 - du(x_{0,1}) \cdot h_1).$$

On en déduit que $d\varphi(x_0)$ est bijective. D'après le théorème d'inversion local, φ est un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme local en x_0, et

$$\varphi(N \cap W) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \cap \varphi(W).$$

8.2.4 Exercice type

8.3 Retour sur le théorème des extremas liés

8.3.1 Énoncé

8.3.2 Exercices-type