Université de Rennes 1

FHFS

FONCTIONS HOLOMORPHES
&
FONCTIONS SPÉCIALES

Auteur
Isabelle Gruais

Notes de cours
Victor Lecerf

2021–2022

Table des matières

Chapitre 1

Solutions holomorphes d'équations différentielles

1.1 Théorème d'existence et unicité

Théorème 1.1.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine (i.e ouvert connexe de $\mathbb{C}$), et soit $z_0 \in D$. Soient p et q deux fonctions holomorphes sur D. Alors, pour tout a_0 et $a_1 \in \mathbb{C}$, il existe une unique fonction holomorphe $w : D \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que*

$$\begin{cases} w''(z) + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0, \\ w(z_0) = a_0, \\ w'(z_0) = a_1. \end{cases}$$

Démonstration. Les fonctions p et q étant holomorphes sur D, elles sont développables en séries entières sur un disque dans D. On suppose que $z_0 = 0$ et que $0 \in D$ (quitte à translater). On a

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad \text{et} \quad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

On cherche alors w sous la forme

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

On a donc

$$w'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} z^k \quad \text{et} \quad w''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)a_{k-2} z^k.$$

De là, on reporte dans l'équations toutes les séries entières, et après avoir effectué des produits de Cauchy et identifié les puissances de z, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} + \sum_{\ell=0}^{k} (\ell+1)a_{\ell+1} b_{k-\ell} + \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell c_{k-\ell} = 0.$$

On vérifie ensuite que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$. Assurons nous maintenant que la série entière donnée de w converge. Soit $z_1 \in D$, on a $\sum_{k\geq 0} |b_k||z_1|^k < \infty$ et $\sum_{k\geq 0} |c_k||z_1|^k < \infty$. On pose $\rho = |z_1|$, et soit $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+^*$ deux réels tels que $\sum_{k\geq 0} |b_k||z_1|^k \leq M_1$ et $\sum_{k\geq 0} |c_k||z_1|^k \leq M_2$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|b_k| \leq \frac{M_1}{\rho^k}$ et $|c_k| \leq \frac{M_2}{\rho^k}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
(k+2)(k+1)|a_{k+2}| &\leq \sum_{\ell=0}^{k} (\ell+1)|a_{\ell+1}|\frac{M_1}{\rho^{k-\ell}} + \sum_{\ell=0}^{k} |a_\ell|\frac{M_2}{\rho^{k-\ell}} \\
&= \sum_{\ell=1}^{k+1} \ell|a_\ell|\frac{M_1}{\rho^{k-\ell+1}} + \sum_{\ell=0}^{k} |a_\ell|\frac{M_2}{\rho^{k-\ell}} \\
&\leq \frac{1}{\rho^{k+1}} \sum_{\ell=0}^{k+1} (\ell M_1 \rho^\ell + M_2 \rho^{\ell+1})|a_\ell| \\
&\leq \frac{M}{\rho^{k+1}} \sum_{\ell=0}^{k+1} (\ell+1)|a_\ell|\rho^\ell
\end{aligned}$$

où l'on a posé $M = \max(M_1, M_2\rho)$. On en déduit que

$$k(k+1)|a_{k+1}| \leq \frac{M}{\rho^k} \sum_{\ell=0}^{k} (\ell+1)|a_\ell|\rho^\ell.$$

Soit alors $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} (k+2)(k+1)A_{k+2} = \dfrac{M}{\rho^{k+1}} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k+1} (\ell+1)A_\ell \rho^\ell \\ A_0 = |a_0|,\ A_1 = |a_1|. \end{cases}$$

Par construction, on a $|a_k| \leq A_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (démontrable par récurrence). La relation de récurrence nous assure de plus que la suite est soit nulle à partir d'un certain rang, soit non nulle à tout rang. Dans le second cas, le calcul montre que

$$\frac{A_{k+2}}{A_{k+1}} = \frac{k(k+1) + M(k+2)\rho}{\rho(k+1)(k+2)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\rho},$$

ce qui signifie que la série entière $\sum A_k z^k$ a un rayon de convergence non nul $R = \rho$. De plus, $|a_k|z^k \leq A_k z^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $\sum a_k z^k$ a pour rayon de convergence au moins $\rho = |z_1|$.

□

1.2 Équations linéaires et points singuliers de Fuchs

On cherche désormais à résoudre la même équation, mais en supposant de plus que p et q admettent des pôles. On établit d'abord un résultat dans un cadre particulier défini ici.

Définition 1.2.1. *Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point singulier de* FUCHS *(ou fuchsien) si c'est un pôle de p ou de q (l'un deux au moins), et qu'ils existent $b_0, c_0 \in \mathbb{C}$ tels que*

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)p(z) = b_0 \in \mathbb{C} \quad \textit{et} \quad \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^2 q(z) = c_0 \in \mathbb{C}.$$

Théorème 1.2.1. *On suppose que l'une au moins des deux fonctions p et q admet z_0 pour pôle. On suppose que z_0 est un point singulier de* FUCHS *(on reprend les notations de la définition précédente). Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ les racines de $\alpha(\alpha-1)+\alpha b_0+c_0=0$, telles que $\Re(\alpha_1) \geq \Re(\alpha_2)$.*

(i) Si $\alpha_1-\alpha_2 \notin \mathbb{N}$, alors il existe deux solutions linéairement indépendantes développables au voisinage de z_0 sous les formes

$$\begin{cases} w_1(z)=(z-z_0)^{\alpha_1}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \\ w_2(z)=(z-z_0)^{\alpha_2}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} a'_\ell(z-z_0)^\ell. \end{cases}$$

(ii) Si $\alpha_1-\alpha_2 \in \mathbb{Z}$, alors il existe deux solutions linéairement indépendantes développables au voisinage de z_0 sous les formes

$$\begin{cases} w_1(z)=(z-z_0)^{\alpha_1}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \\ w_2(z)=u(z)w_1(z), \end{cases}$$

où u est de la forme $u(z)=A\ln(z-z_0)+\varphi(z)$, où φ admet éventuellement z_0 comme pôle.

Démonstration. On suppose encore $z_0=0$. Par hypothèse, les fonctions définies par $P(z)=zp(z)$ et $Q(z)=z^2q(z)$ sont holomorphes sur D, donc développable en série entière sur D. On écrit

$$P(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \quad \text{et} \quad Q(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

Enfin, on écrit w sous la forme

$$w(z)=z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

avec $\alpha=a+bi \in \mathbb{C}$. On a donc

$$w'(z)=z^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha+k)a_k z^{k-1} \quad \text{et} \quad w''(z)=z^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha+k)(\alpha+k-1)a_k z^{k-2}.$$

On en déduit que

$$zw'(z)=z^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha+k)a_k z^{k} \quad \text{et} \quad z^2w''(z)=z^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha+k)(\alpha+k-1)a_k z^{k}.$$

Par définition, on a

$$z^2w''(z)+P(z)w'(z)+Q(z)w(z)=0$$

Comme dans la démonstration précédente, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$ la relation

$$(\alpha+k)(\alpha+k-1)a_k + \sum_{\ell=0}^{k}(\alpha+\ell)a_\ell b_{k-\ell} + \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell c_{k-\ell} = 0.$$

Cela est vraie *si et seulement si*

$$\begin{cases} \big((\alpha+k)(\alpha+k-1)+(\alpha+k)b_0+c_0\big)a_k + \sum_{\ell=0}^{k-1}(\alpha+\ell)a_\ell b_{k-\ell} + \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell c_{k-\ell} = 0,\ k \geq 1\,; \\ \alpha(\alpha-1)+\alpha b_0 + c_0 = 0. \end{cases}$$

La deuxième égalité se traduit par $\alpha^2+\alpha(b_0-1)+c_0=0$. On pose pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $f(\alpha) = \alpha(\alpha-1)+\alpha b_0+c_0$, et $g_k(\alpha) = \alpha b_k + c_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi on traduit la première équation par

$$f(\alpha+k)a_k + \sum_{\ell=0}^{k-1} g_{k-\ell}(\alpha+\ell)a_\ell = 0.$$

On a a donc

$$f(\alpha_1+k) = (\alpha_1+k-\alpha_1)(\alpha_1+k-\alpha_2) = k(k+\alpha_1-\alpha_2).$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} |f(\alpha_1+k)| & \geq & |\Re f(\alpha_1+k)| \\ & = & |k^2 + k\underbrace{\Re(\alpha_1-\alpha_2)}_{\geq 0}| \\ & = & k^2+k\Re(\alpha_1-\alpha_2) \\ & \geq & k^2 \geq 1. \end{array}$$

La série eentière $\sum a_k z^k$ est donc formellement bien définie. On détermine maintenant son rayon de convergence. On a

$$\begin{array}{rcl} k^2|a_n| & \leq & |f(\alpha+k)|a_k| \\ & \leq & \sum_{\ell=0}^{k-1} |g_{k-\ell}(\alpha_1+\ell)||a_\ell| \\ & = & \sum_{\ell=0}^{k-1} |(\alpha_1+\ell)b_{k-\ell}+c_{k-\ell}||a_\ell| \\ & \leq & \sum_{\ell=0}^{k-1}((|\alpha_1|+\ell)|b_{k-\ell}|+|c_{k-\ell}|)|a_\ell| \end{array}$$

Soit donc $z_1 \neq 0$. Par hypothèse sur P et Q, il existe $M_1>0$ et $M_2>0$ des réels tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|b_k|\rho^k \leq M_1 \quad \text{et} \quad |c_k|\rho^k \leq M_2$$

où l'on a posé $\rho = |z_1|$. Ainsi,

$$\begin{aligned} k^2|a_n| &\leq \sum_{\ell=0}^{k-1}((|\alpha_1|+\ell)M_1\rho^{\ell-k}+M_2\rho^{\ell-k})|a_\ell| \\ &= \frac{1}{\rho^k}\sum_{\ell=0}^{k-1}((|\alpha_1|+\ell)M_1+M_2)\rho^\ell|a_\ell|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \frac{1}{k\rho^k}\sum_{\ell=0}^{k-1}(\frac{|\alpha_1|+M_1+M_2}{k}+M_1)\rho^\ell|a_\ell| \\ &\leq \frac{1}{k\rho^k}\sum_{\ell=0}^{k-1}((|\alpha_1|+\ell)M_1+M_2)\rho^\ell|a_\ell|. \end{aligned}$$

Soit $M > \frac{1}{k}\left[(|\alpha_1|+\ell)M_1+M_2\right]$. Ainsi,

$$|a_k| \leq \frac{M}{k\rho^k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\rho^\ell|a_\ell|.$$

C'est-à-dire que

$$|a_k|\rho^k < \frac{M}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\rho^\ell|a_\ell|.$$

Pour $k=1$, $|a_1|\rho < M|a_0|$, pour $k=2$, on en déduit que

$$|a_2|\rho^2 < \frac{M(M+1)}{2}|a_0|.$$

On suppose en outre que $M>1$. Ainsi, on obtient que $|a_2|\rho^2 < M^2 a_0$. On résonne par récurrence en supposant que pour tout $\ell \in [\![0,k]\!]$, $|a_\ell|\rho^\ell < M^\ell$. Ainsi,

$$|a_k|\rho^k < \frac{M}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}|a_\ell|\rho^\ell < \frac{M}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}M^\ell|a_0| \text{ (par hypothèse de récurrence).}$$

Ainsi, $|a_k|\rho^k < M^k|a_0|$. On conclut par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$ que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $|a_k|\rho^k < M^k|a_0|$. On en conclut que pour tout $k\geq 1$,

$$|a_k| < \left(\frac{M}{\rho}\right)^k|a_0|.$$

Alors,

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{M}{\rho}|a_0|^{\frac{1}{k}}.$$

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k z^k$. On a

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}} \leq \frac{M}{\rho}.$$

Ainsi, $R\geq \rho/M$. On en déduit que $\sum a_k z^k$ converge dès lors que $|z| < \rho/M < \rho$ (car $M>1$). Autrement dit, on obtient une solution w_1 telle que $w_1(z) \sim_{z\to 0} z^{\alpha_1}a_0$. Pour $\alpha=\alpha_2$, on obtient encore

$$f(\alpha_2+k)a_k+\sum_{\ell=0}^{k-1} g_{k-\ell}(\alpha_2+\ell)a_\ell=0.$$

On peut montrer par le calcul qu'il existe un $A\in]0,1[$ et $k_0\in\mathbb{N}$, tels que pour tout $k\geq k_0$,

$$|f(\alpha_2+k)\geq Ak^2.$$

Par le même raisonnement, on obtient une série entière $\sum a_k z^k$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $|a_k|\rho^k\left(\frac{M}{A}\right)^k$. On a donc convergence pour $|z|<(\rho A)/M<\rho/M<\rho$. Cela nous donne une seconde solution w_2. L'indépendance de w_1 et w_2 est donnée par le wronskien

$$W(w_1,w_2)=\begin{vmatrix} w_1 & w_2\\ w_1' & w_2'\end{vmatrix}=w_1w_2'-w_2w_1'.$$

Évalué en un point z, ce wronskien est

$$z^{\alpha_1+\alpha_2-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k}(\alpha_2+\ell a_\ell' a_{k-\ell}-(\alpha_1+\ell)a_\ell a_{k-\ell}')z^k.$$

On a donc

$$W(w_1,w_2)(z)=z^{\alpha_1+\alpha_2-1}(\alpha_2-\alpha_1)a_0a_0'+o\left(|z|^{\alpha_1+\alpha_2-1}\right).$$

On différencie alors les cas.

(i) $\alpha_1-\alpha_2\notin\mathbb{N}$. Le wronskien est non nul, et (w_1,w_2) est un système fondamental de solutions au voisinage de $z=0$.

(ii) $\alpha_1-\alpha_2\in\mathbb{N}$. On pose $m=\alpha_1-\alpha_2$. La solution w_1 reste inchangée, et on cherche w_2 sous la forme $w_2=uw_1$. On a donc nécessairement

$$\begin{cases} w_2'=u'w_1+uw_1',\\ w_2''=u''w_1+2u'w_1'+uw_1''.\end{cases}$$

On reporte dans $w''+pw'+qw=0$, et on obtient

$$0=w_1u''+(2w_1'+pw_1)u'+(\underbrace{w_1''+pw_1'+qw_1}_{=0})u=w_1u''+(2w_1'+pw_1)u',$$

$i.e$ que

$$w_1u''+(2w_1'+pw_1)u'=0.$$

On peut supposer de plus que u' ne s'annule pas, de sorte que

$$w_1\frac{u''}{u'}+2w_1'+pw_1=0,$$

et alors

$$\frac{u''}{u'}+2\frac{w_1'}{w_1}+p=0.$$

Par intégration, on obtient

$$\ln(u'(z)w_1^2(z)) = -\int p(\zeta)d\zeta \quad \text{et} \quad u'(z) = \frac{K}{w_1(z)^2}e^{-\int \ p(\zeta)d\zeta}.$$

On écrit $w_1(z)^2 = z^{2\alpha_1}W(z)$ où W est une fonction holomorphe. Alors, sachant que

$$p(z) = \frac{P(z)}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{k-1},$$

on trouve que

$$\int p(\zeta)d\zeta = b_0\ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}z^k$$

et donc que

$$e^{-\int p(\zeta)d\zeta} = \underbrace{e^{-b_0\ln(z)}}_{z^{-b_0}}U(z)$$

où U est une fonction holomorphe. On a $u'(z) = \frac{\varphi(z)}{z^{2\alpha_1+b_0}}$ avec φ une fonction holomorphe au voisinage de 0. Par hypothèse, $\alpha_1 - \alpha_2$ est un entier, et les α_1, α_2 sont les racines de $\alpha^2 + \alpha(b_0 - 1) + c_0 = 0$. Ainsi, $\alpha_1 + \alpha_2 = -b_0 + 1$ et $\alpha_1 - \alpha_2 = m$. En manipulant ces deux équations, on trouve que

$$u'(z) = \frac{1}{z^{m+1}}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k}_{\varphi(z)}.$$

Alors,

$$u(z) = \sum_{k=0, k\neq m}^{\infty}\frac{\beta_k}{k-m}z^{k-m} + \beta_m\ln(z) + C$$

avec $C \in \mathbb{C}$. On obtient à nouveau un système fondamental de solutions.

□

Définition 1.2.2. *On dit que $z = \infty$ est un point singulier fuchsien si $\zeta = 0$ est un point singulier fuchsien de l'équation obtenue par le changement de variable $\zeta = 1/z$.*

Exemple. On cherche maintenant à déterminer à quelle(s) condition(s) le point $\zeta = 0$ sera singulier fuchsien pour une équation différentielle. On pose $\zeta = 1/z$, et $v(\zeta) = w(1/\zeta)$ où w est solution de $w'' + pw' + qw = 0$. En dérivant, on obtient que $v'(\zeta) = -\frac{1}{\zeta^2}w'(1/\zeta)$. Ainsi, $-\zeta^2 v'(\zeta) = w'(1/\zeta)$. On dérive à nouveau, et l'on obtient

$$2\zeta^3 v'(\zeta) + \zeta^4 v''(\zeta) = w''\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

On détermine par le calcul que $\zeta = 0$ est un point singulier fuchsien *si et seulement si*

$$\lim_{\zeta\to 0}\left(2 - \frac{1}{\zeta^2}P\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) = b_0 \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \lim_{\zeta\to 0}\frac{1}{\zeta^2}q\left(\frac{1}{\zeta}\right) = c_0 \in \mathbb{C}.$$

Chapitre 2

Fonctions de Legendre

2.1 Équation de Legendre

Soit à. résoudre l'équation

$$(1-z^2)w''(z) - 2zw'(z) + n(n+1)w(z) = 0$$

dans $\mathbb{C}$. On se ramène à la théorie en posant

$$p(z) = -\frac{2z}{1-z^2} \quad \text{et} \quad q(z) = \frac{n(n+1)}{1-z^2}.$$

Les fonctions p et q se développent en série entière pour $|z| < 1$ sous les formes

$$p(z) = -2\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} \quad \text{et} \quad p(z) = n(n+1)\sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}.$$

Ainsi, on peut chercher une solution w dans le disque ouvert $\mathcal{B}(0,1)$. De plus, p et q admettent -1 et 1 pour pôles.

Nature des pôles -1 et 1. Un calcul de résidu en 1 de p et q montre que $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$. On s'est donc ramené à résoudre l'équation $0 = \alpha(\alpha-1)+\alpha = \alpha^2$, qui a pour racine double $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Un calcul de résidu en -1 donne les mêmes valeurs de b_0 et c_0. Ainsi, w se développe au voisinage de $z = 1$ et $z = -1$ sous la forme $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

2.1.1 Étude au voisinage de $z = 0$

Soit w solution de l'équation différentielle, sous la forme $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Le calcul montre alors que pour tout $k \geq 0$,

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)}.$$

Puisque les coefficients d'ordre pair ne dépendant que de a_0 et les impairs de a_1, on peut choisir w_1 et w_2 (les deux solutions) telles que

$$\begin{cases} w_1(0) = 1, \\ w_1'(0) = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_2(0) = 0, \\ w_2'(0) = 1. \end{cases}$$

Ainsi, w_1 est somme des termes pairs, et w_2 des termes impairs. Elles sont alors linéairement indépendantes. Étudions les racines du polynômes $X^2 + X - n(n+1)$ pour déterminer si la suite a_k s'annule ou non. Ses racines sont n et $-n-1$. Si $n \notin \mathbb{Z}$, alors w_1 et w_2 sont sommes de séries entières de rayon de convergence $R = 1$. Supposons maintenant que $n \in \mathbb{N}$.

— Si n est pair, alors $a_{n+2} = 0$, donc $p_n := w_1$ est un polynôme de degré au plus n, et w_2 est la somme d'une série convergente sur la boule ouverte de rayon 1.

— Si n est impair, alors $a_{n+2} = 0$, et cette fois-ci $p_n := w_2 \in \mathbb{C}_n[X]$, et w_1 est la somme d'une série convergente sur la boule ouverte de rayon 1.

Peu importe la situation, nous avons fait le choix d'un polynôme $p_n \in \mathbb{C}_n[X]$. On note $P_n = c_n p_n$ le normalisé de p_n, *i.e* tel que $P_n(1)$.

Définition 2.1.1. *Le polynôme P_n est appelé* ***polynôme de* Legendre *d'ordre*** *n.*

Remarques.

— Que n soit pair ou impair, on a montré que l'on peut compléter P_n en un système fondamental de solution (où la solution ajoutée est une série convergente présentant une singularité de type logarithmique sur le cercle unité).

— Les polynômes de Legendre (de première espèce) sont plus connus sous la forme

$$P_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

appelée *formule de* Rodrigues.

2.1.2 Étude au voisinage de $z = \infty$

On pose encore $\zeta = 1/z$, et $v(\zeta) = w(1/w)$. On observe, sous forme résolue, que v est solution de

$$v''(\zeta) + \underbrace{\frac{2\zeta}{\zeta^2 - 1}}_{p(z)} v'(\zeta) + \underbrace{\frac{n(n+1)}{\zeta^2(\zeta^2-1)}}_{q(z)} v(\zeta) = 0.$$

Ainsi, p et q admettent pour pôles les points $\zeta = -1, 0, 1$. En particulier, $\zeta = 0$ est un point singulier fuchsien. L'équation indicielle associée $\alpha(\alpha-1) - n(n+1) = 0$ admet pour racines $\alpha_1 = n+1$ et $\alpha = -n$, et $\alpha_1 - \alpha_2 = 2n+1 \in \ \mathbb{N}$. Ainsi, l'équation admet deux solutions sous la forme

$$v_1(\zeta) = \zeta^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^k \quad \text{et} \quad v_2(\zeta) = \zeta^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta^k$$

convergeant pour $|\zeta| < 1$, et telles que v_2 n'est pas indépendantes de v_1. Le changement de variable $z = 1/\zeta$ transforme v_1 en la solution

$$w_3 = z^{-n-1} \sum_{k=0} A_k z^{-k}.$$

Il est immédiat que w_3 forme avec P_n un système fondamental de solutions sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| > 1\}$. Dans le développement de w_3, on choisit

$$A_0 = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}$$

de sorte que $Q_n := w_3$ soit tel que que $Q_n(1) = 1$.

Définition 2.1.2. *La solution Q_n est appelé* ***fonction de*** **Legendre** ***d'ordre*** *n de seconde espèce.*

2.2 Application à l'équation de Laplace

Soit à résoudre l'équation en coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$ d'inconnue u,

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{(r\sin\varphi)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Cette équation se résume à

$$\nabla^2 u = \Delta u = 0$$

où $\nabla^2 = \Delta$ est l'opérateur différentiel laplacien (ici en coordonnées sphériques). On va chercher ici des solutions axiales, $i.e$ indépendantes de l'angle θ. On va même chercher des solutions dont les variables sont séparées, $i.e$ sous la forme

$$u(r,\varphi) = \mathbb{R}(r)\Phi(\varphi).$$

Si l'on suppose u être solution de l'équation différentielle, alors on obtient que

$$\frac{(r^2R'(r))'}{r^2R(r)} + \frac{(\sin\varphi\Phi'(\varphi))'}{r^2\sin\varphi\Phi(\varphi)}.$$

On déduit que

$$\frac{(r^2R'(r))'}{R(r)} = -\frac{(\sin\varphi\Phi'(\varphi))'}{\sin\varphi\Phi(\varphi)},$$

et l'on observe même que ces deux termes sont constants. En effet, cette égalité montre que chaque membre peut s'exprimer uniquement une variable dont il est indépendant. Soit donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{(r^2R'(r))'}{R(r)} = -\frac{(\sin\varphi\Phi'(\varphi))'}{\sin\varphi\Phi(\varphi)} = \alpha.$$

Chapitre 3

Fonctions de Bessel

3.1 Fonction Γ

Définition 3.1.1. *On appelle fonction Γ l'application*

$$z \longmapsto \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t} \ \mathrm{d}t.$$

Remarque. On déterminera plus tard le domaine de définition.

Proposition 3.1.1. *La fonction Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re(z) > 0\}$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, et $R > 0$. On va montrer que Γ est bien définie et holomorphe sur une une bande $C_{\varepsilon,R} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re(z) \in [\varepsilon, R]\}$. Soit $z = x + iy \in C_{\varepsilon,R}$ et $t > 0$. On a

$$|t^{z-1}e^{-t}| = |e^{(x+iy-1)\ln t}e^{-t}| = e^{(x-1)\ln t}e^{-t}.$$

Si $t > 1$, $\ln t > 0$ donc

$$0 < e^{(x-1)\ln t} \leq e^{(R-1)\ln t}.$$

On est ramené à étudier la convergence de

$$\int_1^\infty t^{R-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $\alpha > 1$, on a

$$t^\alpha(t^{R-1}e^{-t}) = t^{\alpha+R-1}e^{-t}$$

et $\alpha + R - 1 = (\alpha - 1) + R > 0$. Ainsi,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\alpha+R-1}e^{-t} = 0,$$

i.e que $t^{R-1}e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ lorsque t tend vers l'infini. Puisque $\alpha > 1$, on en déduit que

$$\int_1^\infty t^{R-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

D'après le théorème de Lebesgue sur les fonctions holomorphes, puisque $z \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est holomorphe, on sait donc que

$$z \longmapsto \int_1^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est holomorphe sur $C_{\varepsilon,R}$. On considère maintenant le cas où $0 < t < 1$. On a donc $|\ln t| = -|\ln t| < 0$. Ainsi,

$$t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t} = e^{(1-x)|\ln t|} \leq e^{(1-\varepsilon)|\ln t|} = t^{\varepsilon-1}.$$

Ainsi,

$$t^{x-1}e^{-t} \sim_{t\to 0} t^{x-1}$$

avec $0 < t^{x-1} \leq t^{\varepsilon-1}$. Soit $\alpha \in]0,1[$. Alors,

$$\alpha + \varepsilon - 1 > 0 \iff \varepsilon > 1 - \alpha.$$

On choisit $\alpha > 0$ tel que $0 < 1 - \ \alpha < \varepsilon$, et alors

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha+\varepsilon-1} = 0,$$

$i.e$ que $t^{\varepsilon-1} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ lorsque t tend vers l'infini. Ainsi,

$$\int_0^1 t^{\varepsilon-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t < \infty.$$

En appliquant à nouveau le théorème de Lebesgue, on en déduit que

$$z \longmapsto \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est holomoprhe sur $C_{\varepsilon,R}$. Finalement, Γ est holomorphe sur $C_{\varepsilon,R}$. On en déduit donc que Γ est holomorphe sur tout $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re(z) > 0\}$.

$\square$

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$,

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^\infty (\ln t)^n t^{z-1}e^{-t}.$$

Proposition 3.1.2. *La fonction Γ se prolonge sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ en une fonction holomorphe telle que*

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$$

lorsque $\Re(z) > -n$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$. On intègre par partie dans l'égalité

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

et on en déduit que $\Gamma(z+1) = z\Gamma z$. On peut donc prolonger Γ à $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > -1\}$ par le théorème des zéros isolés. On travaille ensuite par récurrence pour obtenir le résultat.

□

Proposition 3.1.3. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$. Alors,*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit $n > 0$. Si $0 < t < n$, alors $0 < 1 - \frac{t}{x} \leq e^{-\frac{t}{n}}$ et donc $0 < \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < e^{-t}$. Ainsi,

$$\mathbb{1}_{[0,n]} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^x < \mathbb{1}_{[0,n]} e^{-t}.$$

De plus,

$$\left| \mathbb{1}_{[0,n]} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \right| < \mathbb{1}_{[0,n]} e^{-t} t^{x-1}$$

où $z = x + iy$. Alors,

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t < \infty.$$

On sait que $e^{-t} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. Ainsi, d'après le théorème de de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, \mathrm{d}t = \Gamma(z)$$

(avec $\Re(z) > 0$). □

Proposition 3.1.4. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$. Alors,*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Démonstration. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x > 0$. On a

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} \, \mathrm{d}t.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait le changement de variable affine $s = t/n$ (donc $\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}t}{n}$) avec $0 < s < 1$. On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (1-s)^n\,(ns)^{z-1} n\,\mathrm{d}s \\
&= n^z \int_0^1 (1-s)^n\, s^{z-1}\,\mathrm{d}s \\
&=: I_n(z).
\end{aligned}
$$

Par intégration par parties successives, on en remarque

$$\frac{I_n(z)}{n^z} = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \int_0^1 s^{n-1+z}\,\mathrm{d}s.$$

On calcule enfin la dernière intégrale pour en déduire que

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

□

Proposition 3.1.5 (formule de Weierstrass)**.** *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$. Alors,*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

où

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$. Alors,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}{n^z n!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$
\begin{aligned}
\frac{\prod_{k=0}^{n}(z+k)}{n^z n!} &= e^{-z\ln n} z \prod_{k=1}^{n} \frac{z+k}{k} \\
&= e^{-z\ln n} z \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) \\
&= z e^{-z\ln n} e^{z\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}.
\end{aligned}
$$

On conclue en faisant tendre n vers l'infini.

□

3.2 Équation de Bessel

Soit à résoudre l'équation

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - \lambda^2)w(z) = 0$$

où $\lambda \geq 0$. Cette équation sous forme résolue devient

$$w''(z) + \underbrace{\frac{1}{z}}_{p(z)} w'(z) + \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2}\right)}_{q(z)} w(z) = 0.$$

On remarque que $z = 0$ est l'unique pôle de p et q. On a ici

$$b_0 = \lim_{z \to 0} zp(z) = 1 \quad \text{et} \quad c_0 = \lim_{z \to 0} z^2 q(z) = -\lambda^2.$$

On en déduit l'équation associée $\alpha^2 - \lambda^2 = 0$ (donc $\alpha = \pm\lambda$). On pose donc $\alpha_1 = \lambda$ et $\alpha_2 = -\lambda$. On a donc $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\lambda$.

— Si $2\lambda \notin \mathbb{N}$, on obtient deux solutions linéairement indépendantes de la forme

$$w_1(z) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{et} \quad w_2(z) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^k$$

pour tout $z \neq 0$.

— Si $2\lambda = m \in \mathbb{N}$, alors on obtient deux solutions indépendantes

$$w_1(z) = z^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{et} \quad w_2(z) = \left(A \ln z + z^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z^k\right) w_1(z).$$

pour tout $z \neq 0$.

(i) On se place dans le cas où $2\lambda \notin \mathbb{N}$. On chercher w sous la forme $w(z) = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. On a donc

$$w'(z) = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k) a_k z^{k-1}$$

et

$$w''(z) = z^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k)(\alpha + k - 1) a_k z^{k-2}.$$

avec $a_{-2} = a_{-1} = 0$ et $a_0 \neq 0$. En réinjectant dans l'équation, on observe que $a_1 = 0$ et que pour tout $k \geq 2$,

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2\lambda + k)}.$$

Puisque a_1 est nul, tous les coefficients d'indice impair sont nuls. Le calcul montre alors que

$$\frac{a_{2k}}{a_0} = \prod_{p=1}^{k} \frac{a_{2p}}{a_{2p-2}} = \frac{(-1)^k}{4^k k!} \cdot \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(k + \lambda + 1)}.$$

On en déduit sur notre solution w (qu'on note maintenant w_1) que

$$w_1(z) = a_0 z^\lambda \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{4^k k!} \cdot \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(k+\lambda+1)} z^{2k}.$$

On a donc que

$$w_1(z) = a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\lambda+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Puisque a_0 est un degré de liberté, on pose $a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\Lambda+1)}$. Alors,

$$w_1(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\lambda+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

On pose alors

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\lambda+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

On appelle *fonctions de* BESSEL les fonctions J_λ.

(ii) On suppose maintenant que $\alpha = \alpha_2 = -\lambda$. On sait que $a_1 = 0$ et que pour tout $k \geq 2$,

$$k(-2\lambda + k) a_k = -a_{k-2}.$$

Si $k = 2p$ est pair (avec $p \geq 1$), on a

$$4p(-\lambda + p) a_{2p} = -a_{2p-2}.$$

On suppose que $\lambda \notin \mathbb{N}$. Alors, on trouve encore quee

$$\frac{a_{2p}}{a_0} = \frac{(-1)^k}{4^k k!} \cdot \frac{1}{\Gamma(-\lambda+p+1)}.$$

On choisit donc $a_0 = \frac{2^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$. On a

$$J_{-\lambda}(z) := w_2(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-\lambda+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Si maintenant $\lambda = m \in \mathbb{N}$, alors $\alpha_1 - \alpha_2 = 2m \in \mathbb{N}$. On sait que

$$w_1(z) = J_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

On a aussi que

$$J_{-m}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-m+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Or,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{\Gamma(z+n+1)}$$

si $\Re(z) > -n-1$, donc $\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0$ lorsque $z = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
J_{-m}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \sum_{k=m} \frac{(-1)^k}{k!(-m+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} \sum_{p=0} \frac{(-1)^p(-1)^m}{p!(m+p)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+2p} \qquad (k-m=p) \\
&= (-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{m} \sum_{p=0} \frac{(-1)^p}{p!(m+p)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \\
&= (-1)^m J_m(z).
\end{aligned}$$

On obtient une solution Y_n indépendante de J_m en posant

$$Y_\lambda(z) = \frac{\cos(\pi\lambda)J_\lambda(z) - J_{-\lambda}(z)}{\sin(\pi\lambda)}.$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$, et en posant

$$Y_m(z) = \lim_{\lambda \to m} Y_\lambda(z).$$

En fait, lorsque λ tend vers m, le numérateur et le dénominateur de Y_λ tendent tous deux vers 0. La règle de L'Hôpital donne

$$Y_m(z) = \lim_{\lambda \to m} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial J_\lambda}{\partial \lambda} - \frac{\partial J_{-\lambda}}{\partial \lambda} \right)(z).$$