Université de Rennes 1

GEDI

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Sous variétés de $\mathbb{R}^n$, variétés, variétés quotients, partitions de l'unité, théorème de Withney, formes différentielles, différentielle extérieure, orientation, intégration des formes différentielles, théorème de Stokes, cohomologie de De Rham, degré d'une application.

Auteur
Christophe Dupont

Notes de cours
Victor Lecerf

2021–2022

Table des matières

Chapitre 1

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

1.1 Définition

Définition 1.1.1. *Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On dit que M est une variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x_0 \in M$, il existe U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme tel que $\varphi(x_0) = 0$, et tels que $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$*

Exemples.

— Une sous-variété de dimension 0 de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de points isolés.

— Une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

— Dans $\mathbb{R}^2$, un cercle, une hyperbole, une droite, sont des variétés de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.

— Une union de deux droites distinctes sécantes n'est pas une sous-variétés de $\mathbb{R}^2$, mais l'est si l'on enlève le point d'intersection.

— L'ensemble $\{(t^2, t^3) \,|\, t \in]1, 1[\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

1.2 Caractérisations

Théorème 1.2.1. *Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *M est une sous-variété de dimension p.*

(ii) *(Équation). Pour tout $x_0 \in M$, il existe V un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et une application $\mathcal{C}^\infty$ $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ tels que la différentielle $d_{x_0}F$ est surjective et $V \cap M = F^{-1}(\{0\})$.*

(iii) *(Graphe). Pour tout $x_0 \in M$, il existe V un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ de la forme $A \times B$ (avec $A \subset \mathbb{R}^k$ et $B \subset \mathbb{R}^{n-k}$ des ouverts), une permutation des coordonnées $L \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et $f : A \longrightarrow B$, tels que*

$$V \cap M = \{L(a, f(a)) \,|\, a \in A\}.$$

(iv) *(Nappe paramétrée). Pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, Ω un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$, et $j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application $\mathcal{C}^\infty$ tels que $j(0) = x_0$, $d_0 j$ est injective, et $j : \Omega \longrightarrow V \cap M$ est un homéomorphisme sur son image (où $V \cap M$ est muni de la topologie induite par l'ouvert V de $\mathbb{R}^n$).*

Exemples.

— Soit D la droite d'équation $2x + 3y = 1$ dans $\mathbb{R}^2$. C'est une sous-variété de dimension 1. En effet, si $m_0 \in D$, posons

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x + 3y - 1 \end{array} \right.$$

(remarquons ici que F ne dépend pas de m_0 mais ce n'est généralement pas le cas). On a $d_{m_0} = 2\mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y$ (ou $d_{m_0}F = (2, 3)$). Elle est surjective puisque $d_{m_0}F \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et est non nulle. Enfin, $\mathbb{R}^2 \cap D = F^{-1}(\{0\})$ (on a $V = \mathbb{R}^2$).

— Soit C le cercle de rayon 1 et de centre 0 dans $\mathbb{R}^2$, *i.e* $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$. Soit $m_0 = (x_0, y_0) \in C$ et

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 - 1. \end{array} \right.$$

On a $d_{m_0}F = 2x_0\mathrm{d}x + 2y_0\mathrm{d}y$. Cette différentielle est bien surjective car $m_0 \in C$ donc $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$. Ainsi, $d_{m_0}F$ est non nulle et est donc surjective car c'est un élément de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

— $O_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,|\, {}^tMM = I_2\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$. Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Alors, $M \in O_2(\mathbb{R})$ *si et seulement si*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab + cd & = & 0 \end{array} \right.$$

On voudrait donc poser

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (a,b,c,d) & \longmapsto & (a^2+c^2-1, b^2+d^2-1, ab+cd). \end{array} \right.$$

Pour montrer que $O_2(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension 1, il suffit de montrer que pour tout $(a,b,c,d) \in O_2(\mathbb{R})$, $d_{(a,b,c,d)}F \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ est surjective.

— $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det M = I_2\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$.
Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Alors, $M \in O_2(\mathbb{R})$ *si et seulement si* $ad - bc = 1$.

Démonstration. — $(i) \implies (ii)$. Soit $x_0 \in M$ et $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme tel que $\varphi(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$. On écrit

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \varphi(U) \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)). \end{array} \right.$$

On pose

$$F : \left| \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-p} \\ x & \longmapsto & (\varphi_{p+1}(x), \dots, \varphi_n(x)). \end{array} \right.$$

(avec ici $V = U$). Alors, $V \cap M = F^{-1}(0_{n-p})$ car $\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0\}^{n-p}$. $d_{x_0}F$ est bien surjective car $d_{x_0}\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ est inversible (puisque $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ est un difféormophisme).

— $(ii) \implies (iii)$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Selon (ii), $(a,b) \in V \cap M$ *si et seulement si* $F(a,b) = 0 \in \mathbb{R}^{n-p}$. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que $\partial_b F \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{n-p})$ est inversible. On applique le théorème des fonctions implicites, et il existe alors $A \times B \subset V$ et $f : A \longrightarrow B$ tels que $F(a,b) = 0$ *si et seulement si* $b = f(a)$.

— $(iii) \implies (i)$. Posons $U = A \times B$, et

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \varphi(U) \\ (a,b) & \longmapsto & (a, b - f(a)). \end{array} \right.$$

Alors, $\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}$. La différentielle

$$d_{x_0}\varphi = \left(\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline -\partial_a f & I_{n-p} \end{array} \right)$$

est inversible. Quitte à minimiser U, le théorème d'inversion locale assure que $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ est bien un difféomorphisme.

— $(iii) \implies (iv)$. Soit

$$j : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & M \cap (A \times B) \\ a & \longmapsto & (a, f(a)). \end{array} \right.$$

Alors, $d_a j \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est injective pour tout $a \in A$ (on peut supposer que $j(a_0) = x_0$ avec $a_0 = (a, 0)$). En effet, $d_a j$ est de la forme

$$d_a j = \left(\begin{array}{c} I_p \\ \hline d_a f \end{array} \right).$$

Enfin, montrons que l'application $j : A \longrightarrow M \cap (A \times B)$ est un bijection continue. Il reste à vérifier que j est ouverte. Pour cela, soit A' un ouvert de A. On a $j(A') = M \cap (A' \times B)$. $A' \times B$ est bien un ouvert de $V = A \times B$, donc $j(A')$ est un ouvert de $M \cap (A \times B)$.

— $(iv) \implies (iii)$. Soit

$$j : \left| \begin{array}{ccc} \Omega \subset \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \\ t & \longmapsto & (\alpha(t), \beta(t)) \end{array} \right.$$

telle que $j(0) = (a_0, b_0) = x_0$, $d_0 j \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est surjective, et $j : \Omega \longrightarrow V \cap M$ est un homéomorphisme. La démonstration se fait en deux temps. Dans un premier, on montre qu'il existe A un voisinage de a_0 dans $\mathbb{R}^p$, une application $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$, et $\Omega' \subset \Omega$ tel que $j(\Omega') = \{(a, f(a)) \,|\, a \in A\}$. Dans un second temps, on vérifie que $j(\Omega') = V' \cap M$, où V' est un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$.

Quitte à permuter des coordonnées, puisque $d_0 j$ est injective on peut supposer que ses p premières lignes et p premières colonnes forment une matrice carré inversible, $i.e$ que $d_0\alpha$ est inversible. On applique le théorème d'inversion locale : il existe $\Omega' \subset \Omega$ un voisinage ouvert de 0, A un voisinage ouvert de a_0 dans $\mathbb{R}^p$ tel que $\alpha : \Omega' \longrightarrow A$ est un difféomorphisme. Autrement dit, pour tout $(t, a) \in \Omega' \times A$,

$$a = \alpha(t) \iff t = \alpha^{-1}(a).$$

Posons

$$f : \left| \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-p} \\ a & \longmapsto & \beta(\alpha^{-1}(a)). \end{array} \right.$$

Alors, le graphe de f est

$$\{(a, \beta(\alpha^{-1}(a))) \,|\, a \in A\} = \{(\alpha(t), \beta(t)) \,|\, t \in \Omega'\} = j(\Omega').$$

Remarquons qu'on a en fait établi que $j(\Omega')$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. En effet, $j(\Omega')$ apparaît comme un graphe.

Passons au second point. On a supposé que : $\Omega \longrightarrow V \cap M$ est un homéomorphisme. L'ensemble $j(\Omega')$ est un ouvert de $V \cap M$ (muni de la topologie induite par V). Il existe donc V' un ouvert de V tel que $j(\Omega') = (V \cap M) \cap V'$. Mais V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, donc V' est aussi un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Finalement, $j(\Omega') = V' \cap M$ où V' est un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^n$.

□

Définition 1.2.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts.*

— *Une application $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ est une **submersion** si pour tout $u \in U$, $d_u F$ est surjective.*

— *Une application : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une **immersion** si pour tout $\omega \in \Omega$, $d_\omega j$ est injective.*

— *Une application : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un **plongement** si j est une immersion injective et telle que $j : \Omega \longrightarrow j(\Omega)$ est un homéomorphisme (où $j(\Omega)$ est muni de la topologie induite par $\mathbb{R}^n$).*

Attention. L'image d'une immersion n'est pas toujours une sous-variété.

1.3 Espace tangent

Définition 1.3.1 (espaces tangents)**.** *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension $p \in [\![0, n]\!]$. Soit $x_0 \in M$ et U un voisinage ouvert de x_0. Soit enfin $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ un difféomorphisme tel que $\varphi(U \cap M) = \mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\} \cap \varphi(U)$. L'espace tangent à la variété M en x_0 est l'espace vectoriel $(d_{x_0}\varphi)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\})$ noté $T_{x_0}M$.*

Remarque. Cette définition ne dépend pas du difféomorphisme φ choisi. Soit ψ un autre difféomorphisme convenable (quitte à restreindre, on peut supposer que φ et ψ sont tous deux définis sur U). Montrons que $d_0(\varphi \circ \psi^{-1})(\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}) = \mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}$. Cela suffira pour dire que $(d_{x_0}\varphi)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}) = (d_{x_0}\psi)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\})$. On dispose de l'application

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}) \cap \psi(U) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}) \cap \varphi(U) \\ (a, b) & \longmapsto & (f(a, b), g(a, b)). \end{array} \right.$$

On sait que pour tout $a \in \mathbb{R}^p$, $(\varphi \circ \psi^{-1})(a, 0) = (f(a, 0), g(a, 0))$ a sa seconde coordonnée nulle car $(\varphi \circ \psi^{-1})(\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\} \cap \psi(U)) \subset \mathbb{R}^p \times \{0\} \cap \varphi(U)$, *i.e* $g(a, 0) = 0$ pour tout $(a, 0) \in (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}) \cap \psi(U)$. Ainsi, $d_{(a,0)}(\varphi \circ \psi^{-1})$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} & ? \\ \hline (0)_{n-p,p} & ? \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $d_{(a,0)}(\varphi \circ \psi^{-1})(\mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}) \subset \mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}$. On a l'égalité car $d_{(a,0)}(\varphi \circ \psi^{-1})$ est inversible puisque $\varphi \circ \psi^{-1}$ est un difféomorphisme.

Méthode avec la caractérisation de l'équation. Pour calculer les espaces tangents, on peut utiliser la seconde caractérisation des sous-variétés. On note $M \cap V = F^{-1}(0)$ avec $F : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p}$. Dans ce cas, $T_{x_0}M = \ker d_{x_0}F$.

Exemple. Soit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0\}$. Alors, $d_{(x,y)}F = (4x, 6y)$. Si $(x_0, y_0) \in M$, alors

$$T_{(x_0,y_0)}M = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mid \; 4x_0h + 6y_0k = 0\} = \left\{(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mid \; \overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0) \cdot (h, k) = 0\right\}$$

Méthode avec la caractérisation du graphe. Notons $M \cap V = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$. Alors, $T_{(a,f(a))}M = \{(h, (d_af)(h)) \mid h \in \mathbb{R}^p\}$.

Exemple. Prenons l'exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. on a

$$T_{(x_0,f(x_0))}M = \{(h, f'(x)h) \mid h \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1, f'(x_0)).$$

Méthode avec la caractérisation de la nappe paramétrée. Dans ce cas, on a $T_{j(0)}M = (d_0j)(\mathbb{R}^p)$.

Chapitre 2

Variétés différentielles

2.1 Définition

Dans toute la suite du cours, M est un espace topologique séparé et $n \geq 1$ est un entier.

Définition 2.1.1 (atlas)**.** *Un atlas sur M est la donnée d'une famille $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ telle que*

(i) *$(U_i)_{i \in I}$ forme un recouvrement ouvert de M ;*

(ii) *pour tout $i \in I$, $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ un homéomorphisme ;*

(iii) *pour tout $i, j \in I$, si $i \neq j$ et $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, alors $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Remarque. Un élément (U_i, φ_i) pour $i \in I$ est une *carte* de l'atlas.

Définition 2.1.2 (atlas équivalents)**.** *Deux atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ sont dits équivalents si pour tout $i \in I$ et $j \in J$ tels que $U_i \cap V_j$, alors $\psi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap V_j) \longrightarrow \psi_j(U_i \cap V_j)$.*

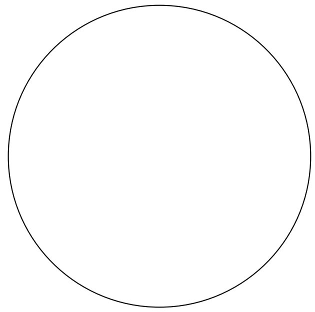
Remarque. Deux atlas sont équivalents *si et seulement si* leur union est un atlas.

Définition 2.1.3 (variété)**.** *Une variété (différentielle) est la donnée d'un espace topologique séparé M muni d'une classe d'équivalence d'atlas.*

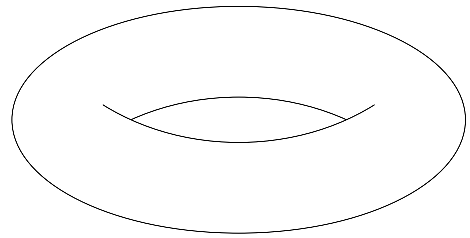
Remarques.

— Étant donné une variété, on appelle carte une carte quelconque de l'un des atlas de la classe d'équivalence considérée.

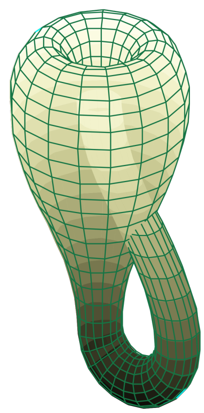
— La restriction d'une carte à un voisinage d'un point est toujours une carte : soit M une variété et $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de la classe d'équivalence choisie pour M. Soit $i \in I$, $x \in U_i$, et W un voisinage ouvert de x contenu dans U_i. On peut ajouter à $\mathcal{A}$ la carte $(W, \varphi_i|_W)$. On obtient alors un atlas $\mathcal{B}$ équivalent à $\mathcal{A}$.



(a) $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homéomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$.



(b) Le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$



(c) Bouteille de KLEIN, illustration de l'utilisateur Wikipédia Tttrung.

FIGURE 2.1

Exemples.

— $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, …, $\mathbb{R}^n$ sont des variétés. Ici, un atlas est $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})$.

— Soit V une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (au sens du premier chapitre [1]). Les cartes locales de M donnent à M une structure de variété au sens du chapitre deux. En effet, si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $x \in M$, la première définition de carte locale(de M en x) vue dans ce cours est un couple (U_x, φ_x) avec $U_x \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de x, tels que $\varphi : U_x \longrightarrow \varphi(U_x) \subset \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme, et $\varphi(U_x \cap M) = \varphi(U_x) \cap \mathbb{R}^p \times \{0_{n-p}\}$. Alors, $(U_x \cap M, \varphi_x)_{x \in M}$ définit un atlas (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur M. On choisit la classe d'équivalence de cet atlas pour munir M d'une structure de variété ("abstraite").

— *Variétés quotients.* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{S}^2/(\pm\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3/\mathbb{S}^2})$, $(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)/\{\mathrm{id}, \sigma : (x, y) \mapsto (x + 1/2, -y)\}$ sont des variétés (respectivement difféomorphes à un cercle, un tore de dimension 2, et au plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, et à la bouteille de KLEIN).

— La variété française.

Définition 2.1.4 (application lisse entre variétés). *Soient M et N deux variétés de dimensions respectives m et n (noté souvent M^n et N^n). Soit $f : M \longrightarrow N$ une application continue. L'application f est dite être de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou lisse) si pour tout $x \in M$, il existe une carte (U, φ) de M en x (i.e que $x \in U$) et une carte (V, ψ) de N en $f(x)$ telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

1. Et pas au sens défini ultérieurement.

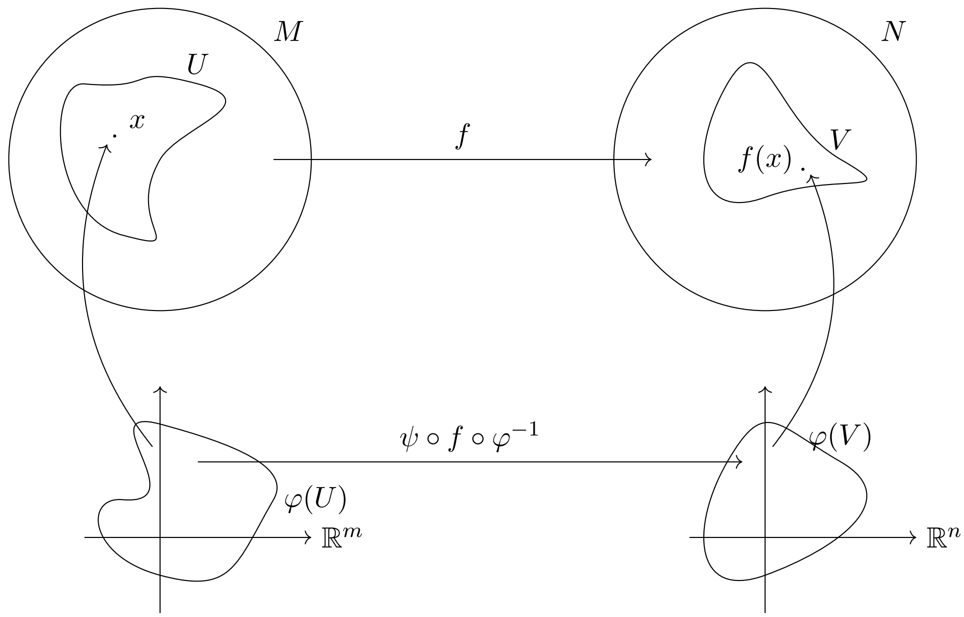


Figure 2.2 – Applications lisses entre deux variétés.

Remarques.

— Soit U un voisinage ouvert de x dans M et V un voisinage ouvert de $f(x)$ dans N. On suppose que ce sont des des cartes ($i.e$ qu'il existe $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ et $\psi : V \longrightarrow \psi(V)$ des homéomorphismes). Par continuité, il existe $\tilde{U}$ un voisinage ouvert de x contenu dans U tel que $f(\tilde{U}) \subset V$. L'ouvert $\tilde{U}$ est aussi une carte de la variété M (selon une remarque précédente). Ainsi, quitte à diminuer U, on peut toujours supposer que $f(U) \subset V$ (et U reste une carte de M).

— Dans cette définition des applications lisses, la propriété "être de classe $\mathcal{C}^\infty$" ne dépend pas du jeu de cartes $((U,\varphi),(V,\psi))$ utilisé. En effet, si $((\tilde{U},\tilde{\varphi}),(\tilde{V},\tilde{\psi}))$ est un autre jeu de carte, puisque $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ et $\psi \circ \tilde{\psi}^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors

$$\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})$$

l'est aussi.

Définition 2.1.5. *Une application $f : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme si c'est une bijection de classe telle que f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Lemme 2.1.1. *Soit (U,φ) une carte de M. Alors, $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ est un difféomorphisme.*

Démonstration. Un schéma suffit à cette démonstration. L'application $\mathrm{id}_{\varphi(U)} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$ est bien de $\mathcal{C}^\infty$ puisqu'elle vaut $\mathrm{id}_{\varphi(U)}$.

□

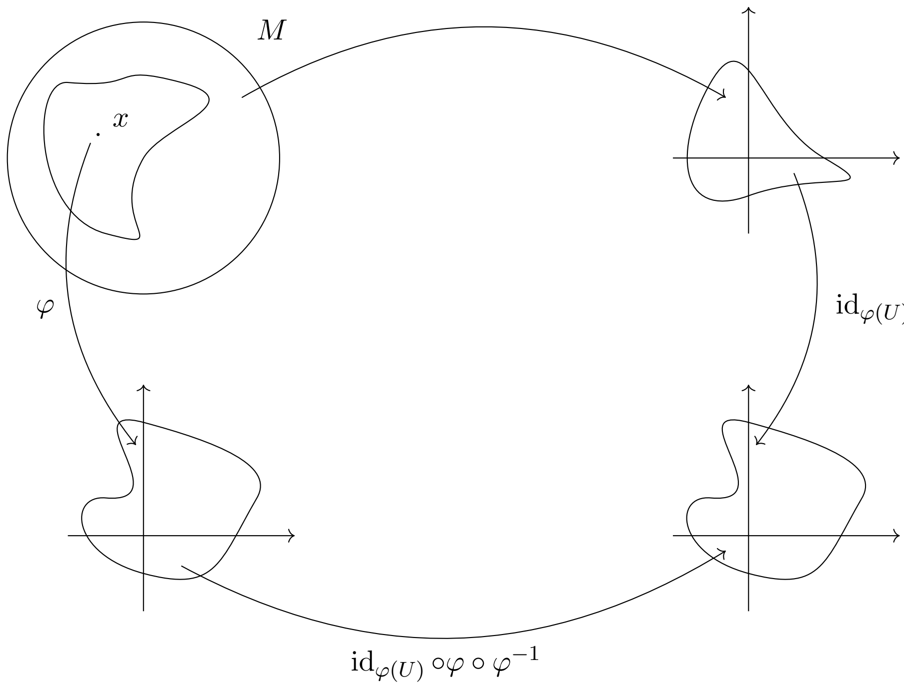


FIGURE 2.3 – L'application $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ est un difféomorphisme.

2.2 Variété quotient

2.2.1 Topologie quotient

Soit M un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $\mathcal{R}$. On définit une topologie sur l'espace des classes $M/\mathcal{R}$ en décrétant que $U \subset M/\mathcal{R}$ est ouvert *si et seulement si* $p^{-1}(U)$ est un ouvert de M (où $p : M \longrightarrow M/\mathcal{R}$).

Exercice. Soit X un espace topologique. Montrer qu'une application $f : M/\mathcal{R} \longrightarrow X$ est continue *si et seulement si* $f \circ p : M \longrightarrow X$ est continue.

2.2.2 Actions de groupe

Soit Γ un groupe opérant sur une variété M. On dit que Γ agît de manière lisse si pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $M \to M$, $x \mapsto \gamma(x)$ est un difféomorphisme. Le groupe Γ agît proprement si pour tout compacts K_1 et K_2 de M, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \,|\, \gamma(K_1) \cap K_2 \neq \varnothing\}$ est fini. Enfin, Γ agît librement si $\gamma(x) = x$ implique $\gamma = e_\Gamma$ (seul le neutre du groupe possède point fixe).

Exemples d'actions lisses.

— L'action $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(k, x) \mapsto k + x$ est propre et lisse.

— L'action $\{\pm \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} |_{\mathbb{S}^2}\} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, $(\sigma, (x, y, z)) \mapsto \sigma(x, y, z)$ est propre et libre.

— L'action $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(k, x) \mapsto 2^k x$ n'est ni propre ni libre. Elle n'est pas propre car si $K_1 = K_2 = [-1, 1]$, alors $2^k K_1 \subset K_2$ pour tout $k \leq 0$. Elle n'est pas propre car $2^k \times 0 = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

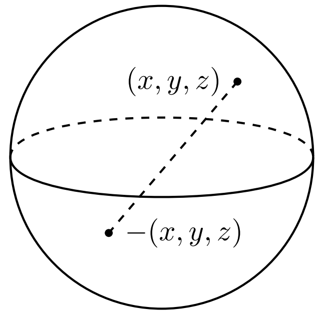


FIGURE 2.4 – Illustration d'une orbite d'un point $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ sous l'action de $\{\pm \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3}|_{\mathbb{S}^2}\}$.

2.2.3 Définition d'une structure de variété sur M/Γ

On munit M de la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff y \in \operatorname{Orb}_\Gamma(x)$.

Exercices.

1. Si γ agît de manière lisse, montrer que $p : M \longrightarrow M/\Gamma$ est une application ouverte.
2. Si Γ agît proprement et si $x, y \in M$ sont deux éléments tels que $p(x) \neq p(y)$, montrer qu'il existe un voisinage V de x et un voisinage W de y tels que $V \cap \gamma(W) = \varnothing$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.
3. Si Γ agît proprement et librement, montrer que pour tout $x \in M$, il existe un voisinage V de x tel que $V \cap \gamma(V) = \varnothing$ pour tout $\gamma \in \Gamma \backslash \{e_\Gamma\}$.

Conséquence. Si $V \cap \gamma(V) = \varnothing$ pour $\gamma \in \Gamma\backslash\{e_\Gamma\}$, alors $p|_V : V \longrightarrow p(V)$ est un homéomorphisme.

Théorème 2.2.1 (structure de variété naturelle sur l'espace quotient)**.** *Soit M une variété et Γ un groupe opérant de manière lisse, propre, et libre sur M. On définit un atlas sur M/Γ en considérant les couples $(p(V), \tilde{\varphi})$ où V est un ouvert de M contenu dans une carte (U, φ) de M et est tel que $V \cap \gamma(V) \neq \varnothing$ pour tout $\gamma \in \Gamma\backslash\{e_\Gamma\}$ (V ne rencontre pas ses translatés par l'action de Γ), et $\tilde{\varphi} = \varphi \circ (p|_V)^{-1} : p(V) \longrightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$.*

Remarques.

— Ces conditions sur V assure que la projection restreinte à V est injective.

— Dans la suite du cours, on munira toujours M/Γ de la structure de variété donnée par cet atlas.

Démonstration. Tout d'abord, les ouverts de la forme $p(V)$ recouvrent M/Γ (ce sont bien des ouverts puisque l'application p est ouverte). En effet, tout $x \in M$ possède un voisinage ouvert contenu dans une seule carte (U, φ) de M tel que $V \cap \gamma(V) = \varnothing$ pour tout $\gamma \in \Gamma\backslash\{e_\Gamma\}$. Observons ensuite que les applications $\tilde{\varphi}$ sont des homéomorphismes puisque ce sont des composées d'homéomorphismes. Soient $(p(V_1), \tilde{\varphi}_1)$ et $(p(V_2), \tilde{\varphi}_2)$ deux éléments de la famille considérée tels que $p(V_1) \cap p(V_2) \neq \varnothing$ (donc il existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $V_1 \cap \gamma_0(V_2) \neq \varnothing$). L'application $\tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} : \tilde{\varphi}_2(p(V_1) \cap p(V_2)) \longrightarrow \tilde{\varphi}_1(p(V_1) \cap p(V_2))$ est définie par

$$\varphi_1 \circ (p|_{V_1})^{-1} \circ (\varphi_2 \circ (p|_{V_2})^{-1})^{-1} = \varphi_1 \circ ((p|_{V_1})^{-1} \circ p|_{V_2}) \circ \varphi_2^{-1}.$$

Soit $m \in p(V_1) \cap p(V_2)$ et soit $(x, X) \in V_1 \times V_2$ tel que $p(x) = p(X)$. Il existe alors $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $\gamma_0(X) = x$ (il est en fait unique). Soit Ω_X un voisinage contenu dans V_2 tel que $\gamma_0(\Omega_X) \subset V_1$. Remarquons maintenant que $(p|_{V_1})^{-1} \circ p|_{V_2} = \gamma_0$ sur Ω_X. Soit $Y \in \Omega_X$ et soit $y = (p|_{V_1})^{-1} \circ p|_{V_2}(y)$. Soit $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ tel que $\tilde{\gamma} Y = y$. A-t-on $\tilde{\gamma} = \gamma_0$? Pour montrer cela, procédons à quelques observations.

- $\gamma_0(Y) \in \gamma_0(\Omega_X) \subset V_1$;
- $p(y) = p(\tilde{\gamma}(Y)) = p(\gamma_0(Y))$ car $p \circ \gamma' = p$ pour tout $\gamma' \in \Gamma$.

Puisque $\tilde{\gamma}(Y)$ et $\gamma_0(Y)$ sont éléments de V_1 et $p(y) = p(\tilde{\gamma}(Y)) = p(\gamma_0(Y))$, on a $\tilde{\gamma}(Y) = \gamma_0(Y)$ par injectivité de $p|_{V_1}$. Puisque l'action est libre, $\tilde{\gamma} = \gamma_0$. Cela montre le fait.

□

2.3 Partitions de l'unité et théorème de WITHNEY

2.3.1 Partitions de l'unité

Théorème 2.3.1. *Soit M une variété compacte. Soit $(U_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ un recouvrement fini de M par des ouverts. Alors,*

- *il existe un recouvrement $(V_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ fini de M tel que $\overline{V_i} \subset U_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$;*
- *il existe pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ une fonction $\tilde{\chi}_i : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\operatorname{supp} \tilde{\chi}_i \subset U_i$ et $\chi_i \equiv 1$ sur V_i.*

Conséquence. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose

$$\chi_i = \frac{\tilde{\chi}_i}{\sum_{j=1}^{d} \tilde{\chi}_i}.$$

Cette fonction est bien définie sur M puisque $(V_i)_i$ recouvre M donc $\sum_{j=1}^{N} \tilde{\chi}_i \geq 1$. La famille $(\chi_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est telle que $\operatorname{supp} \chi_i \subset U$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $\sum_{i=1}^{N} \chi_i = 1$ sur M.

Exemples d'applications.

- Soit $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^\infty$. Alors,

$$\varphi = \varphi \times \sum_{i=1}^{N} \chi_i = \sum_{i=1}^{N} \chi_i \varphi.$$

  On a donc décomposé φ en N fonctions $\chi_i \varphi$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de support contenu dans U_i.
- Les partitions de l'unité permettent de construire des formes volumes à partir d'un atlas d'orientation (vu ultérieurement dans le cours).
- Elles permettent aussi l'intégration de formes différentielles sur une variété orientable (aussi vu ultérieurement).

Lemme 2.3.1. *Soient X et Y des espaces topologiques séparées et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection continue. Alors, f est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit F un fermé de X. Montrons que $f(F)$ est fermé dans Y. Puisque F est un fermé dans un compact, F est compact. Ainsi, $f(F)$ est un compact donc fermé dans Y.

$\square$

2.3.2 Théorème de Withney

Théorème 2.3.2 (Withney). *Soit M une variété compacte de dimension m. Alors existe $\alpha \in \mathbb{N}$ et un plongement $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^\alpha$. Autrement dit, on peut toujours plonger une variété compacte dans un certain espace $\mathbb{R}^\alpha$).*

Démonstration. Soit $(U_i, \varphi_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un atlas fini de M et soit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, V_i et $\tilde{\chi}_i$ les ouverts et les fonctions données par le théorème des partitions de l'unité. Observons que $\chi_i\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est prolongeable en une application $M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en lui attribuant la valeur 0 en dehors de U_i (ce n'est donc plus un homéomorphisme). On pose

$$\varphi : \left|\begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & (\tilde{\chi}_1\varphi_1(p), \ldots, \tilde{\chi}_N\varphi_N(p), \tilde{\chi}_1(p), \ldots, \tilde{\chi}_N(p)) \end{array}\right.$$

où $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}$ apparaissant chacun N fois dans le produit cartésien. Cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Sa différentielle est de la forme

$$d\varphi = \left(\begin{array}{c} (d(\tilde{\chi}_1\varphi_1)) \\ \hline \vdots \\ \hline (d(\tilde{\chi}_N\varphi_N)) \\ \hline (d\tilde{\chi}_1) \\ \hline \vdots \\ \hline (d\tilde{\chi}_N) \end{array}\right).$$

Cette écriture n'est en fait pas vraiment rigoureuse puisque nous n'avons pas défini la différentielle d'une application définie sur une variété. On peut cependant facilement se ramener à $\mathbb{R}^m$ avec une carte. Supposons d'abord que φ et $\mathrm{d}_p\varphi$ sont injectives pour tout $p \in M$. Puisque φ est injective, $\varphi : M \longrightarrow \varphi(M)$ est une bijection. De plus, φ est continue et M est compacte donc φ est un homéomorphisme. Puisque $\mathrm{d}_p\varphi$ est une injection pour tout $p \in M$, φ est aussi une immersion. Ainsi φ est bien un plongement de M dans $\mathbb{R}^\alpha$.

Montrons maintenant les faits supposés.

— Montrons que φ est une injection. Si $\varphi(p) = \varphi(q)$, alors si $p \in V_{i_0}$ pour un certain $i_0 \in [\![1, N]\!]$. Alors, $\tilde{\chi}_{i_0}(p) = 1$. Puisque $\varphi(p) = \varphi(q)$, on a aussi $\tilde{\chi}_{i_0}(q) = 1$, et donc p et q sont éléments du support de $\tilde{\chi}_{i_0} \subset U_{i_0}$. Finalement, $(\tilde{\chi}_{i_0} \times \varphi_{i_0})(p) = (\tilde{\chi}_{i_0} \times \varphi_{i_0})(q)$ donc $\varphi_{i_0}(p) = \varphi_{i_0}(q)$. Puisque p et q sont élément de U_{i_0} et puisque φ_{i_0} est injective sur U_{i_0}, on a bien $p = q$.

— Montrons que $d_p\varphi$ est une injection pour tout $p \in M$. Soit $p \in M$ et $i_0 \in [\![1, N]\!]$ tel que $p \in V_{i_0}$. Soit Ω un voisinage ouvert de p contenu dans V_{i_0}. Alors, $\chi_{i_0}\varphi_{i_0} = \varphi_{i_0}$ sur Ω. Ainsi sur Ω, le i_0-ième bloc de $d\varphi$ (qui est $d\varphi_{i_0}$) est une application linéaire injective (car $\varphi_{i_0} : U_{i_0} \longrightarrow \varphi_{i_0}(U_{i_0})$ est un difféomorphisme). Ainsi, $d_p\varphi$ est injective.

$\square$

Chapitre 3

Formes différentielles

3.1 1-forme différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.1.1. *Une 1-forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une application $\omega : U \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, où $(\mathbb{R}^n)^*$ est le dual de $\mathbb{R}^n$. Elle s'écrit*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_i$$

où ω_i est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U à valeurs réelles et $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n)$ est la base canonique du dual de $\mathbb{R}^n$. On note $\Omega^1(U)$ l'espace des 1-formes différentielles sur U.

Exemples.

- $\omega = \cos(x)\mathrm{d}x \in \Omega^1(\mathbb{R})$ (le x dans le cosinus et le x du dx ne sont pas les mêmes, c'est un abus de notation).
- $\omega = x\mathrm{d}y - y^3 x\mathrm{d}x \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.
- $\omega = f(z)\mathrm{d}z \in \Omega^1(U)$ avec f holomorphe sur U.
- Toute fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ induit une 1-forme différentielle sur U avec

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x_i \in \Omega^1(U).$$

Définition 3.1.2. *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$, noté $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, une courbe paramétrée. L'intégrale de $\omega \in \Omega^1(U)$ le long de γ est définie par*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t))\gamma_i'(t) \right) \mathrm{d}t.$$

Définition 3.1.3. *Une 1-forme différentielle $\omega \in \Omega^1(U)$ est dite être* exacte *s'il existe une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$.*

Attention. Certaines 1-formes différentielles ne sont pas exactes. Par exemple,

$$\eta = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})$$

n'est pas exacte (voir TD).

3.2 k-forme différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

3.2.1 k-formes linéaires

Définition 3.2.1. *Une k-forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est une application $\varphi : (\mathbb{R}^n)^k \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune de ses coordonnées (i.e en chacun des k $\mathbb{R}^n$). Elle est dite être alternée si $\varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(v_1, \ldots, v_k)$ pour tout $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_k$.*

Notation. On note $\bigwedge^k((\mathbb{R}^n)^*)$ l'espace des formes linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$. Par convention, $\bigwedge^0((\mathbb{R}^n)^*) = \mathbb{R}$.

Exemples.
- Toute 1-forme linéaire est alternée.
- Le déterminant est une n forme linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.2.2. *Soit φ une k-forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. On définit* $\mathrm{Alt}(\varphi) \in \bigwedge^k((\mathbb{R}^n)^*)$ *pour tout $(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k$ par*

$$\mathrm{Alt}(\varphi) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma)\varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

Exercice. Montrer que φ est alternée *si et seulement si* $\mathrm{Alt}\,\varphi = \varphi$.

Exemples.
- Soit $\varphi = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ (donc une forme 2-linéaire) définie par $\varphi((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = a_1a_2$. Alors,

$$(\mathrm{Alt}\,\varphi)((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = \frac{1}{2}(a_1a_2 - a_2a_1) = 0.$$

- Si $\varphi = \mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}y$, *i.e* $\varphi((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = a_1b_2$. On a alors

$$(\mathrm{Alt}\,\varphi)((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = \frac{1}{2}(a_1b_2 - a_2b_1) = \frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2. \end{pmatrix}.$$

Notation. On note

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} = k!\,\mathrm{Alt}(\mathrm{d}x_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x_{i_k}) \in \bigwedge((\mathbb{R}^n)^*),$$

appelé produit extérieur.

Remarque. On a $\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = \det$.

Proposition 3.2.1. *On a les propriétés suivantes.*

(i) La famille $(\mathrm{d}x_1 \ \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$ *forme une base de* $\bigwedge((\mathbb{R}^n)^*)$.

(ii) On a $\dim \bigwedge((\mathbb{R}^n)^*) = \binom{n}{k}$ *si* $k \in [\![0, n]\!]$, *et* $\dim \bigwedge((\mathbb{R}^n)^*) = 0$ *si* $k > n$.

3.2.2 k-forme différentielle

Définition 3.2.3. *Une k-forme différentielle sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est une application $\omega : U \longrightarrow \bigwedge((\mathbb{R}^n)^*)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle s'écrit sous la forme*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \ldots, i_k}(x_1, \ldots, x_k) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

On note $\Omega^k(U)$ l'espace des k-formes différentielles sur U. L'entier k est le degré de la forme différentielle.

Notation. Par convention, on note $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$.

Exemples.
- $\omega = y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$;
- $\omega = y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

3.3 Algèbre extérieure sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $\Omega(U) = \Omega^0(U) \oplus \Omega^1(U) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(U)$. Ses éléments s'écrivent sous la forme $\omega = (\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)})$. Par exemple avec $U \subset \mathbb{R}^3$,

$$\omega = (e^{xy} + z, \cos(x)\mathrm{d}y - \mathrm{d}z, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}y\mathrm{d}y, x^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z).$$

On munit $\Omega(U)$ de l'addition (coordonnée par coordonnée), ainsi que du produit extérieur $\wedge$.

Définition 3.3.1. *Soit $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$. On définit $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(U)$ par*

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1), \ldots, v_{\sigma(k+\ell)}}).$$

Proposition 3.3.1. *Soit $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^\ell(U)$, et $\gamma \in \Omega^m(U)$. On a les propriétés suivantes.*
- *Si $m = \ell$, $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$.*
- *On a $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.*
- *On a $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$.*

Remarques.

— $(\Omega(U), +, \cdot, \wedge)$ est une algèbre.

— Si $\alpha = \mathrm{d}x$, on a $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$. Ce n'est pas toujours vrai, par exemple si $\alpha = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$, alors $\alpha \wedge \alpha = 2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}t$ est non nul puisque c'est le déterminant.

Exemple. Sur $\mathbb{R}^3$, on pose $\alpha = \mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y + e^{-xy}\mathrm{d}z$, et $\beta = 7\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Alors, $\alpha\beta = 7e^{-xy}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

3.4 Tiré en arrière des formes différentielles

Soit $f : U \longrightarrow V$ avec $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts. On note $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Soit $\alpha \in \Omega^k(V)$, qu'on note

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \ldots, i_k}(y_1, \ldots, y_n) \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_k}.$$

Définition 3.4.1. *Le tiré en arrière de α par f est la forme différentielle notée $f^*\alpha \in \Omega^k(U)$ et définie par*

$$\begin{aligned}(f^*\alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \ldots, i_k}(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \mathrm{d}_x f_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}_x f_{i_k}(v_1, \ldots, v_k) \\ &= \alpha_{f(x)}(\mathrm{d}_x f(v_1), \ldots, \mathrm{d}_x f(v_k)).\end{aligned}$$

Exemples.

— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^{2x}$ et $\alpha = y^3\mathrm{d}y$. On a

$$\begin{aligned}f^*\alpha &= (xe^{2x})^3 \mathrm{d}f \\ &= (xe^{2x})^3 f'(x)\mathrm{d}x \\ &= (xe^{2x})^3 (1e^{2x} + 2xe^{2x})\mathrm{d}x \\ &= (xe^{2x})^3 (1 + 2x)e^{2x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Moralement, on remplace y par $f(x)$.

— Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, 2\sin t)$ et $\alpha = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, on a

$$f^*\alpha = \mathrm{d}(\cos t) \wedge \mathrm{d}(2\sin t) = (-\sin t)\mathrm{d}t \wedge 2(\cos t)\mathrm{d}t = 0.$$

Si $\alpha = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$, on a $f^*\alpha = (-\sin t + 2\cos t)\mathrm{d}t$.

— Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2^2$ et $\alpha = e^{-y} \in \Omega^0(\mathbb{R})$, on a $f^*\alpha = e^{-(x_1, x_2^2)}$. Si $\alpha = 3y\mathrm{d}y$, $f^*\alpha = 3(x_1 - x_2^2)(\mathrm{d}x_1 - 2x_2\mathrm{d}x_2)$.

— Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $\alpha = \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2$, alors $f^*\alpha = \det(\mathrm{d}_x f)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$.

Proposition 3.4.1. *Soit $f : U \longrightarrow V$ où $U \subset \mathbb{R}^m$ et $V \subset R^n$ sont des ouverts. On a les propriétés suivantes.*

(i) L'application $f^* : \Omega(V) \longrightarrow \Omega(U)$ est linéaire.

(ii) Si $\alpha, \beta \in \Omega(V)$, on a $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$.

(iii) Si $U \subset \mathbb{R}^\ell$, $V \subset \mathbb{R}^m$, et $W \subset \mathbb{R}^n$ sont des ouverts, et si $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow W$ sont des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ sur $\Omega(W)$.

Remarque. L'opérateur $f \longmapsto f^*$ a la même fonctorialité que la transposée.

Démonstration. (*i*) Évident.

(*ii*) Par linéarité de f^*, il suffit de montrer ce point sur une base de $\Omega(V)$. Soit $\alpha = \mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_k}$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n = \dim V$, et $\beta = \mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_{k'}}$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_{k'} \leq n$. On a

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_k} \wedge \mathrm{d}y_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{j_{k'}}).$$

En notant $f = (f_1, \ldots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f, on a

$$\begin{aligned} f^*(\alpha \wedge \beta) &= \mathrm{d}f_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{i_k} \wedge \mathrm{d}f_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{j_{k'}} \\ &= (\mathrm{d}f_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{i_k}) \wedge (\mathrm{d}f_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_{j_{k'}}) \\ &= f^*\alpha \wedge f^*\beta. \end{aligned}$$

(*iii*) On fait une récurrence sur le degré de la forme différentielle. Soit $f : U \longrightarrow V$ et $g : V \longrightarrow W$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

— *Degré* 0. Soit $\alpha \in \Omega^0(W)$, *i.e* $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(W)$. On a

$$(g \circ f)^*(\alpha) = \alpha(g \circ f) = (\alpha \circ g) \circ f = f^*(\alpha \circ g) = f^*g^*(\alpha).$$

— *Degré* 1. Soit $\alpha \in \Omega^1(W)$. On a pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

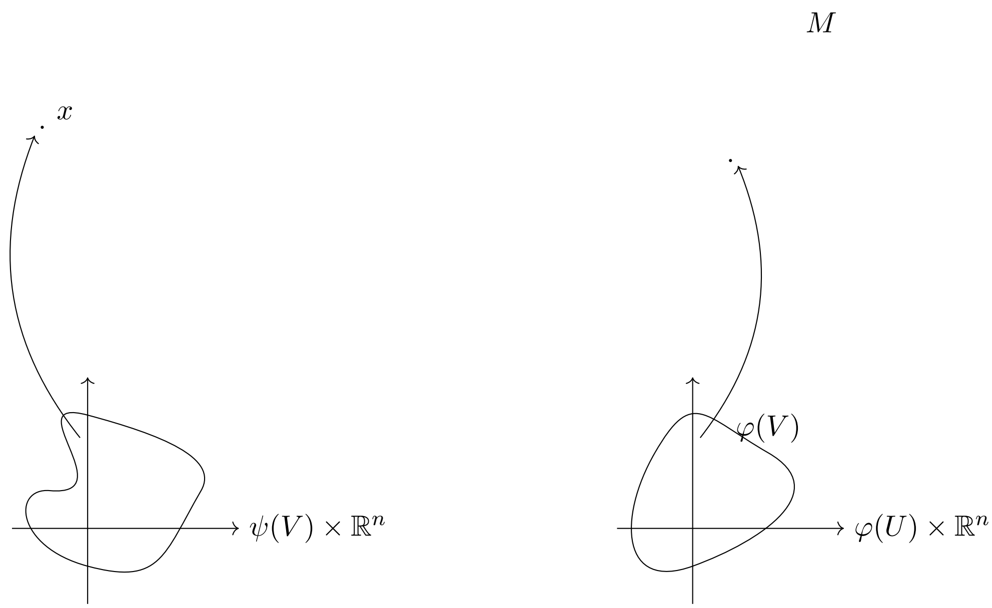
$$(f^*(g^*\alpha))_x(v) = (g^*\alpha)_{f(x)}(\mathrm{d}_x f(v)).$$

Remarquons que pour tout $\omega \in \Omega^1(W)$.

$$\begin{aligned} (f^*\omega)_x(v) &= \omega_{f(x)}(\mathrm{d}_x f(v)) \\ &= \alpha_{g(f(x))}(\mathrm{d}_{f(x)} g(\mathrm{d}_x f(v))) \\ &= \alpha_{g(f(x))}(\mathrm{d}_x (g \circ f)(v)) \\ &= ((g \circ f)^*(\alpha))(v). \end{aligned}$$

— *Récurrence.* La récurrence est pénible à écrire, on se contentera ici d'un exemple. Soit $\alpha \in \Omega^2(W)$ notée $\alpha = a(w)\mathrm{d}w_1 \wedge \mathrm{d}w_2$. On note $w = (w_1, \ldots, w_n)$ les coordonnées sur W et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées sur U. On a

$$(g \circ f)^*(a(w)\mathrm{d}w_1 \wedge \mathrm{d}w_2) = a(g \circ f(x))(g \circ f)^*(\mathrm{d}w_1 \wedge \mathrm{d}w_2) = a(g \circ f(x))(g \circ f)^*\mathrm{d}w_1 \wedge (g \circ f)^*\mathrm{d}w_2.$$



On a donc

$$\begin{aligned}(g \circ f)^*(a(w)\mathrm{d}w_1 \wedge \mathrm{d}w_2) &= a(g \circ f(x)) f^* g^* \mathrm{d}w_1 \wedge f^* g^* \mathrm{d}w_2 \\ &= a(g \circ f(x)) f^* (g^* \mathrm{d}w_1 \wedge g^* \mathrm{d}w_2) \\ &= a(g \circ f(x)) f^* g^* (\mathrm{d}w_1 \wedge \mathrm{d}w_2) \\ &= f^* g^* (a(w)\mathrm{d}w_1 \wedge \mathrm{d}w_2).\end{aligned}$$

□

Remarque. Cette démonstration se complique la vie. On pourra se contenter de démontrer directement le résultat sans récurrence.

3.5 Fibré tangent à une variété, champ de vecteurs

3.5.1 Vecteurs tangents, espace tangent, application tangente

On commence cette sous-section avec le fait suivant dont la démonstration est laissée en exercice. Soit $x \in M^n$, et C_x l'ensemble des cartes (U, φ) contenant x. La relation $\mathcal{R}$ sur $C_x \times \mathbb{R}^n$ définie par $((U, \varphi), \mathbf{u}) \mathcal{R} ((V, \psi), \mathbf{v})$ si $\mathbf{v} = \mathrm{d}_{\psi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})(\mathbf{u})$ est une relation d'équivalence. Remarquons que $\mathrm{d}_{\psi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})$ réalise un isomorphisme d'espace vectoriels.

Définition 3.5.1. *Soit $x \in M^n$.*

— *Un vecteur tangent à M au point x est une classe d'équivalence pour cette relation.*

— *L'espace tangent $T_x M$ est l'ensemble des vecteurs tangents à M en x.*

Définition 3.5.2 (application tangente)**.** *Soit $f : M \longrightarrow N$, $x \in M$, (U, φ) une carte de M contenant x et (V, φ) une carte de N contenant $f(x)$ (on peut toujours supposer $f(U) \subset V$ quitte à diminuer U). On définit*

$$T_x f = \left(\theta_{f(x)}^{(V,\psi)}\right)^{-1} \circ \mathrm{d}_{\varphi(x)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \theta_x^{(U,\varphi)},$$

où $\theta_x^{(U,\varphi)}$ est définie comme la bijection définie par

$$\theta_x^{(U,\varphi)} : \left| \begin{array}{rcl} T_x M & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ [(U,\varphi), \mathbf{u}] & \longrightarrow & \mathbf{u}, \end{array} \right.$$

où $[\,\cdot\,]$ est la classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$. $T_x f$ est une application de $T_x M$ vers $T_{f(x)}N$.

Remarques.

- Si $[(U', \varphi'), \mathbf{u}'] \in T_x M$, alors on a $\theta_x^{(U,\varphi)}([(U', \varphi'), \mathbf{u}']) = \mathrm{d}_{\varphi'(x)}(\varphi \circ (\varphi')^{-1})(\mathbf{u}')$.
- Il faut vérifier que cette définition ne dépend pas des choix des cartes dans M et N. Pour le montrer, il suffit de prendre deux autres cartes (U', φ') et (V', ψ') et de faire apparaître $\theta_x^{(U,\varphi)}([(U', \varphi'), \mathbf{u}']) = \mathrm{d}_{\varphi'(x)}(\varphi \circ (\varphi')^{-1})(\mathbf{u}')$ et $\theta_{f(x)}^{(U,\varphi)}([(V', \psi'), \mathbf{v}']) = \mathrm{d}_{\psi'(x)}(\psi \circ (\psi')^{-1})(\mathbf{v}')$.

3.5.2 Construction du fibré tangent TM

On pose $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$, et on définit

$$\pi : \left| \begin{array}{rcl} TM & \longrightarrow & M \\ q & \longmapsto & x \quad \text{si } q \in T_x M. \end{array} \right.$$

Une carte (U, φ) étant fixée, on définit la bijection

$$\tau^{(U,\varphi)} : \left| \begin{array}{rcl} \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ q & \longmapsto & (\varphi(\pi(q)), \theta_{\pi(q)}^{(U,\varphi)}(q)). \end{array} \right.$$

On cherche désormais à munir TM d'une structure de variété. On le munit d'abord d'une topologie en décrétant que la bijection $\pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme. La topologie induite sur TM est séparée car M et $\mathbb{R}^n$ sont séparés. De plus, si $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est un atlas de M, alors $(\pi^{-1}(U_i))_{i \in I}$ recouvrent TM. On veut que les $(\tau^{(U,\varphi)})_{(U,\varphi)}$ soient des cartes de TM. On vérifie que les changement de cartes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$: soit (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) deux cartes de M telles que $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. L'application

$$\tau^{(U_2,\varphi_2)} \circ \left(\tau^{(U_1,\varphi_1)}\right) : \left| \begin{array}{rcl} \varphi(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \varphi_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \\ (z, u) & \longmapsto & \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z), \theta_x^{(U_2,\varphi_2)} \circ \left(\theta_x^{(U_1,\varphi_1)}\right)^{-1}(u)\right) \end{array} \right.$$

(avec $z = \varphi_1(x)$) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car $\theta_x^{(U_2,\varphi_2)} \circ \left(\theta_x^{(U_1,\varphi_1)}\right)^{-1}(u) = \mathrm{d}_z(\varphi_2 \circ \varphi^{-1})(u)$. Le changement de carte est bien $\mathcal{C}^\infty$.

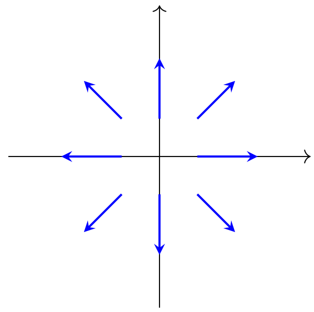


FIGURE 3.1 – Illustration du champ de vecteur $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \mathbf{x}$.

3.5.3 Champs de vecteurs sur M

Définition 3.5.3. *Un champ de vecteurs sur M est une application $X : M \longrightarrow TM$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $X(x) \in T_xM$ pour tout $x \in M$.*

Remarque. On a $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$, *i.e* que X est une section du fibré tangent TM.

Exemple. Si $M = \mathbb{R}^2$, on pose $X(x) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 3.5.1. *Si $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ est un atlas de M, un champ de vecteur sur M est la donnée d'une collection $(X_i : \varphi_i(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}^n)_{i\in I}$ telle que pour tout $p \in U_i \cap U_j$,*

$$X_j(\varphi_j(p)) = \mathrm{d}_{\varphi_i(p)}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})X_i(\varphi_i(p)).$$

3.6 Formes différentielles sur une variété

T_xM est muni grâce à θ d'une structure d'espace vectoriel. On note T_x^*M le dual de T_xM.

Rappel. Soit $\Theta : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels[1]. On définit l'application duale $\Theta^* : F^* \to E^*$, $\mu \mapsto \mu \circ \Theta$. On peut aussi définir $\mathcal{R}$ sur $C_x \times (\mathbb{R}^n)^*$ de sorte $((U,\varphi),\nu)\mathcal{R}((V,\psi),\mu)$ si $\nu = \mathrm{d}_{\varphi(x)}(\psi \circ \varphi^{-1})^*\mu$. Comme précédemment, on définit la variété $\bigwedge^k T^*M$. Les changements de cartes sont donnés par les applications

$$\tau^{(U,\varphi)} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \varphi(U) \times \bigwedge(\mathbb{R}^n)$$

avec

$$\tau^{(U,\varphi)} = \left(\varphi \circ \pi, \left(\left(\Theta^{(U,\varphi)}\right)^{-1}\right)^*\right).$$

1. Dans notre cas, $E = T_xM$ et $F = \mathbb{R}^n$

Définition 3.6.1. *Une k-forme différentielle sur M est une application $\omega : M \longrightarrow \bigwedge^k(T^*M)$ tel que $\omega(x) \in \bigwedge^k(T^*_xM)$ pour tout $x \in M$.*

Proposition 3.6.1. *Si (U_i, φ_i) est un atlas de M, une k-forme différentielle est la donnée d'une collection $(\omega_i : \varphi_i(U_i) \longrightarrow \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)^*)_{i\in I}$ telle que pour tout $i, j \in I$,*

$$\omega_i|_{\varphi_i(U_i\cap U_j)} = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^*\omega_j|_{\varphi_j(U_i\cap U_j)}.$$

3.7 Tiré en arrière et produit extérieur sur les variétés

3.7.1 Tiré en arrière

Soit $f : M \longrightarrow N$ une application continue, $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas sur M, et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ un atlas sur N. Remarquons que par continuité de f, on peut supposer que pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel $f(U_i) \subset V_j$. Soit $\beta = (\beta_j)_j$ une k-forme sur N. On a

$$\beta_j|_{\psi_j(V_j\cap V_{j'})} = (\psi_{j'} \circ \psi_j^{-1})^*\beta_{j'}|_{\psi_{j'}(V_j\cap V_{j'})}$$

lorsque $V_j \cap V_{j'}$.

Définition 3.7.1. *On pose pour tout $i \in I$, $\alpha_i = (\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})^*\beta_j$. La collection $(\alpha_i)_i$ définit une k-forme différentielle sur M. On la note $f^*\beta$.*

Remarque. La dépendance de α_i en j est justifiée par la remarque précédente : le j choisi pour définir $\alpha_i(x)$ dépend de l'image par f de $x \in \varphi_i(U_i)$. Cependant, si $f(x) \in V_j \cap V_{j'}$, alors α_i ne dépend pas du choix de j ou de j'. En effet, si $V_j \cap V_{j'}$, alors

$$\begin{aligned}(\psi_{j'} \circ f \circ \varphi_i^{-1})^*\beta_{j'} &= (\psi_{j'} \circ \psi_j^{-1} \circ \psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})^*\beta_{j'} \\ &= (\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})^* \underbrace{(\psi_{j'} \circ \psi_j^{-1})^*\beta_{j'}}_{\beta_j}.\end{aligned}$$

Démonstration (définition). Il s'agît de s'assurer que les α_i vérifient la relation de compatibilité. Soit $i' \in I$. On a

$$\begin{aligned}\alpha_{i'} = (\psi_j \circ f \circ \varphi_{i'}^{-1})^*\beta_j &= (\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i \circ \varphi_{i'}^{-1})^*\beta_j \\ &= (\varphi_i \circ \varphi_{i'}^{-1})^*(\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})^*\beta_j \\ &= (\varphi_i \circ \varphi_{i'}^{-1})^*\alpha_i.\end{aligned}$$

□

3.7.2 Produits de deux formes

Soient $\alpha \in \Omega^k(M)$ et $\beta \in \Omega^\ell(M)$ deux formes différentielles définies par $\alpha_i \in \Omega^k(\varphi_i(U_i))$ et $\beta_i \in \Omega^\ell(\varphi_i(U_i))$.

Définition 3.7.2. *On définit $\alpha \wedge \beta$ comme la forme différentielle définie pour tout $i \in I$ par $(\alpha \wedge \beta)_i = \alpha_i \wedge \beta_i$ sur $\varphi_i(U_i)$.*

Fait. La collection $((\alpha \wedge \beta)_i)_i$ définit une $(k+\ell)$-forme différentielle sur M. On la note $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(M)$.

Démonstration (du fait). Il s'agît de s'assurer que les $(\alpha \wedge \beta)_i$ vérifient la relation de compatibilité. On a

$$\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta)_{i'} &= \alpha_{i'} \wedge \beta_{i'} \\
&= (\varphi_i \circ \varphi_{i'}^{-1})^* \alpha_i \wedge (\varphi_i \circ \varphi_{i'}^{-1}) * \beta_i \\
&= (\varphi_i \circ \varphi_{i'}^{-1})^* (\alpha_i \wedge \beta_i) \\
&= (\varphi_i \circ \varphi_{i'}^{-1})^* (\alpha \wedge \beta)_i.
\end{aligned}$$

□

3.8 Différentielle extérieure

Définition 3.8.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha = a(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \in \Omega^k(U)$. On pose*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha &= \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \mathrm{d}x_{i_k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \partial_j a(x) \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on étend cette définition à tout élément de $\Omega^k(U)$ par linéarité.

Remarque. On définit ainsi une application linéaire $\mathrm{d} : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)$.

Exemples.

— Si $\omega = x^2 y \mathrm{d}x \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= (\partial_x(x^2y)\mathrm{d}x + \partial_y(x^2y)\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x \\
&= (2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x \\
&= x^2 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -x^2 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Omega^2(\mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

— Si $\omega = \cos(x)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + y^3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

Proposition 3.8.1. *On a les résultats suivants.*

(i) L'application $d \circ d : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+2}(U)$ *est l'opérateur nul* [a].

(ii) On a $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta$ *pour tout* $\alpha \in \Omega^k(U)$ *et* $\beta \in \Omega^\ell(U)$.

(iii) Soit $f : U \longrightarrow V$ *avec* $U \subset \mathbb{R}^m$ *et* $V \subset \mathbb{R}^n$. *Si* $\alpha \in \Omega^k(V)$, *alors* $\mathrm{d}(f^*\alpha) = f^*(\mathrm{d}\alpha)$.

a. Ça sent mauvais l'homologie moisie aujourd'hui, non ?

Remarque. Le point (iii) permet de définir l'opérateur d sur les k-formes définies sur les variétés (exercice, avec $f = \varphi_i \circ \varphi_i^{-1}$).

Démonstration. (i) Il suffit de montrer que $\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \Omega^k(U)$ de la forme $\alpha = \alpha(x)\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$. Notons $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [\![1, n]\!]$. On a

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin I}}^{n} \partial_j a(x) \mathrm{d}x_j \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha)) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin I}}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin I}}^{n} \partial_j \partial_\ell a \mathrm{d}x_\ell \wedge \mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

Selon le théorème de Schwarz, on a $\partial_\ell \partial_j a = \partial_j \partial_\ell a$. De plus, on a $\mathrm{d}x_\ell \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge x_\ell$. Cela permet de conclure que $\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0$.

(ii) Idem. Par linéarité, il suffit de traiter le cas lorsque $\alpha = a\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ et $\beta = b \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_\ell}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) &= \mathrm{d}(ab) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_\ell} \\
&= (b\mathrm{d}a + a\mathrm{d}b) \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_\ell} \\
&= \mathrm{d}a\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge (b\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_\ell}) \\
&+ a\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge (\mathrm{d}b) \times (-1)^k \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_\ell} \\
&= \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta.
\end{aligned}$$

(iii) On procède par récurrence sur k, le degré de α. Pour $k = 0$, si $\alpha \mathcal{C}^\infty(V)$, alors

$$\mathrm{d}_x f^*(\alpha) = \mathrm{d}_{f(x)} \alpha \circ \mathrm{d}_x f = (f^*(\mathrm{d}\alpha))_x.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ et supposons la formule vraie pour tout $k \in [\![0, N]\!]$. Soit $\alpha \in \Omega^{N+1}(V)$ de la forme $\alpha = a(y)\mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_{N+1}}$. On écrit que $\alpha = a(y)\mathrm{d}(y_{i_1}\mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_{N+1}})$ et notons $\tau = y_{i_1}\mathrm{d}y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{i_{N+1}} \in \Omega^N(V)$, et on a donc $\alpha = a\mathrm{d}\tau$. Ainsi, $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}(a\mathrm{d}\tau) = \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}\tau + (-1)^{\deg(a)} a\mathrm{d} \circ \mathrm{d}(\tau)$. Or, $\mathrm{d} \circ \mathrm{d}(\tau) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
f^*(\mathrm{d}\alpha) &= f^*(\mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\tau) \\
&= f^*(\mathrm{d}a) \wedge f^*(\mathrm{d}\tau) \\
&= \mathrm{d}(f^*a) \wedge \mathrm{d}(f^*\tau)
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence appliquée à $\alpha \in \Omega^0(V)$ et $\tau \in \Omega^N(V)$. D'autre part,

$$\mathrm{d}(f^*\alpha \wedge \mathrm{d}(f^*\tau)) = \mathrm{d}(f^*\alpha) \wedge \mathrm{d}(f^*\tau) + (-1)^{\deg(f^*a)} f^*a \wedge d \circ d(f^*\tau).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} f^*(\mathrm{d}\alpha) &= \mathrm{d}(f^*\alpha \wedge \mathrm{d}(f^*\tau)) \\ &= \mathrm{d}(f^*a \wedge f^*(\mathrm{d}\tau)) \\ &= \mathrm{d}(f^*(a\mathrm{d}\tau)) \\ &= \mathrm{d}(f^*\alpha). \end{aligned}$$

$\square$

Attention. L'argument de la démonstration du point (ii) fonctionne car $\mathrm{d}b$ est de degré 1.

Chapitre 4

Orientation et intégration des formes différentielles

4.1 Orientation

4.1.1 Atlas d'orientation

Définition 4.1.1. *Un atlas d'orientation est un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ tel que pour tout $i, j \in I$ et $p \in U_i \cap U_j$,*

$$\det(\mathrm{d}_{\varphi_j(p)}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})) > 0.$$

Une variété M est dite orientable *si elle possède un atlas d'orientable.*

Exemple. $\mathbb{S}^2$ est orientable. Soit N le pôle nord et S le pôle sud, et considérons $\varphi_1 : \mathbb{S}^2 \backslash \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $\varphi_2 : \mathbb{S}^2 \backslash \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ les deux projections stéréographiques. On a montré en TD qu'on a l'application

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{x^2+y^2}(x, y). \end{array} \right.$$

Le calculer permet alors de montrer que $\det \mathrm{d}_{(x,y)}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) = -\frac{1}{x^2+y^2}$. $((U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2))$ n'est pas un atlas d'orientation. On obtient un atlas d'orientation en considérant $((U_1, \varphi_1), (U_2, R \circ \varphi_2))$ où R est la réflexion d'axe (Ox).

Définition 4.1.2. *Deux atlas d'orientation $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ sont équivalents s'ils sont équivalents en tant qu'atlas, et et si pour tout $(i, j) \in I \times J$ tel que $U_i \cap V_j$, et pour tout $p \in U_i \cap V_j$, $\det \mathrm{d}_{\psi_j(p)}(\varphi_i \circ \psi_j^{-1}) > 0$. Une* orientation *sur M est la donnée d'une classe d'équivalence d'atlas d'orientation.*

Exercice. Toute variété connexe possède exactement deux classes d'atlas d'orientation.

4.2 Orientation et formes volumes

Définition 4.2.1. *Soit M une variété de dimension n. Une forme volume est une forme de degré n (*i.e *élément de $\Omega^n(M)$) qui ne s'annule pas.*

Rappel. Un élément $\omega \in \Omega^n(M)$ a pour expression dans la carte (U_i, φ_i)

$$(\varphi_i^{-1})^*\omega = w_i(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$$

où $x_1, \cdots x_n$ sont les coordonnées dans (U_i, φ_i) et w_i est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Puisque ω est définie globalement (c'est-à-dire que $\omega \in \Omega^n(M)$), on dispose par définition des relations de compatibilités

$$(\varphi_i \circ \varphi_j)^*(\omega_i) = \omega_j,$$

ou encore

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(w_i(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n) = w_j(y)\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées dans $\varphi_i(U_i)$ et $y_1, \ldots, y_n$ sont les coordonnées dans $\varphi_j(U_j)$. Si l'on développe cette expression, on obtient

$$w_i(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y)) \underbrace{(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^*(\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n)}_{= \det \mathrm{d}_y(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n.} = w_j(y)\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n$$

On a donc $w_i(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y)) \det \mathrm{d}_y(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) = w_j(y)$ pour tout $j \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$. En conclusion, on a explicité la définition d'une n forme différentielle M, dans sa version "collection de n-formes $(\varphi_i(U_i))_i$ qui doit bien se recoller".

Remarque importante. Le fait qu'une n-forme ne s'annule pas signifie que tout $p \in M$, il existe $i \in I$ tel que $p \in U_i$ et $w_i(\varphi_i(p)) \neq 0$. Ceci est équivalent à dire que pour tout $p \in M$ et pour tout $i \in I$ tel que $p \in U_i$, $w_i(\varphi_i(p)) \neq 0$.

Théorème 4.2.1. *On a les propriétés suivantes.*

(i) Si M possède une forme volume, alors M est orientable.

(ii) Si M est orientable et possède une partition de l'unité, alors M possède une forme volume.

Remarque. M possède une partition de l'unité par exemple lorsque M est compact.

Démonstration. (i) Soit $\omega \in \Omega^n(M)$ une forme volume (donc qui ne s'annule pas). Soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas. On peut toujours supposer que les U_i sont connexes (considérer les composantes connexes). On a $\omega_i = (\varphi_1^{-1})^*\omega = w_i(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \cdots \mathrm{d}x_n$, où $w_i : \varphi_i(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}$ ne s'annule pas. Ainsi, ou bien $w_i > 0$ sur $\varphi_i(U_i)$, ou bien $w_i < 0$ sur $\varphi_i(U_i)$. Posons $\tilde{\varphi}_i = \sigma_i \circ \varphi_i$, où $\sigma_i = R$ si $w_i < 0$ ou $\sigma_i = \mathrm{id}$ si $w_i > 0$. On pose de plus $\tilde{w}_i(x) = -w_i(R(\tilde{x}))$ si $w_i < 0$ ou $\tilde{w}_i(x) = w_i(\tilde{x}) = w_i(\sigma_i(x))$ si $w_i > 0$, où $\tilde{x}$ est la coordonnée sur $\tilde{\varphi}_i(U_i)$. On va vérifier que la collection $(\tilde{w}_i(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}_n)_{i\in I}$ définit un élément de $\Omega^n(M)$. On suppose d'abord cela vérifié : on dispose donc des relations de compatibilités

$$\tilde{w}_i(\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1})(\tilde{y}) \det \mathrm{d}_{\tilde{y}}(\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}) = \tilde{w}_j(\tilde{y}).$$

Ainsi,

$$\det \mathrm{d}_{\tilde{y}}(\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}) = \frac{\tilde{w}_j(\tilde{y})}{\tilde{w}_i(\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1}(\tilde{y}))} > 0$$

car le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs. On montre maintenant que la collection définit un élément de $\Omega^n(M)$. On a

$$\begin{aligned}
(\tilde{\varphi}_i \circ \tilde{\varphi}_j^{-1})^*(\tilde{w}_i(x)\mathrm{d}\tilde{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}_n) &= (\tilde{\varphi}_j^{-1})^*(\tilde{\varphi}_i)^*(\tilde{w}_i(x)\mathrm{d}\tilde{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}_n) \\
&= (\tilde{\varphi}_j^{-1})^*\varphi_i^*\sigma_i^*(\tilde{w}_i(x)\mathrm{d}\tilde{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}_n) \\
&= (\tilde{\varphi}_j^{-1})^*\varphi_i^*(\tilde{w}_i(x)\mathrm{d}\tilde{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}_n) \\
&= (\sigma_j^{-1})^*(\varphi_j^{-1})^*\varphi_i^*(w_i(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n) \\
&= (\sigma_j^{-1})^*(w_j(y)\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n) \\
&= \tilde{w}_j(\tilde{y})\mathrm{d}\tilde{y}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\tilde{y}_n.
\end{aligned}$$

(*ii*) Soit $(U_i, \varphi_i)_i$ un atlas d'orientation sur M. Introduisons une partition de l'unité associée à (U_i, φ_i) : soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M tel que $\bar{V}_i \subset U_i$, et $\tilde{\chi}_i : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction telle que $\operatorname{supp}(\tilde{\chi}_i) \subset U_i$ et $\tilde{\chi}_i \equiv 1$ sur V_i, pour tout $i \in I$. On construit et on définit une forme différentielle de degré n sur M de la manière suivante : pour tout $i \in I$, on définit $\omega_i \in \Omega^n(U_i)$ par $\omega_i = (\varphi_i)^*(\mathrm{d}x_1^i \wedge \cdots \wedge x_n^i)$. On pose

$$\tilde{\omega}^i = \begin{cases} \tilde{\chi}_i\omega^i & \text{sur } U_i, \\ 0 & \text{sur } M\backslash U_i. \end{cases}$$

Vérifions que $\tilde{\omega} = \sum_{i\in I} \tilde{\omega}^i$ est une forme volume sur M. C'est bien une somme d'éléments de $\Omega^n(M)$, il suffit donc de vérifier que $\tilde{\omega}$ ne s'annule pas. Soit $i \in I$ et montrons que $(\varphi_i^{-1})^*\tilde{\omega}$ ne s'annule pas sur $\varphi_i(U_i)$. On a

$$(\varphi_i^{-1})^*\tilde{\omega} = \sum_{i\in J_0} (\varphi_i^{-1})^*\tilde{\omega}^i$$

où $J_0 = \{j \in J \,|\, U_i \cap U_j \neq \varnothing\}$. On a donc

$$(\varphi_i^{-1})^*\tilde{\omega} = \sum_{i\in J_0} (\varphi_i^{-1})^*(\tilde{\chi}_i\varphi_i^*(\mathrm{d}x_1^i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n^i))$$

□

Exemples.

— *La sphère $\mathbb{S}^n$ est orientable.* On a $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|x\|_2 = 1\}$. Soit $X_0(x) = (x_1, \ldots, x_{n+1}$ (donc $X_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$), et $\eta = i_{X_0}(\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1})$. C'est un fait que si $J : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est l'injection canonique, alors $J^*\eta$ est une forme volume sur $\mathbb{S}^n$. En effet, si $(v_1(x), \ldots, v_n(x))$ est une base de $T_x\mathbb{S}^n$, alors

$$(J^*\eta)_x(v_1(x), \ldots, v_n(x)) = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}(X_0(x), v_1(x), \ldots, v_n(x)) \neq 0.$$

En effet, $\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}$ est le déterminant, $X_0(x)$ est orthogonal à $T_x\mathbb{S}^n$, et $(v_1(x), \ldots, v_n(x))$ est une base de $T_x\mathbb{S}^n$, donc $(X_0(x), v_1(x), \ldots, v_n(x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{n+1}$. On a donc bien une forme volume.

— *Généralisation de l'exemple précédent.* Soit $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ une submersion. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$M_c\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, F(x) = c\}$$

est une variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n. Alors, M_c est une variété orientable. En effet, il suffit de choisir

$$\eta{=}i_X(\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n+1}) \quad \text{où} \quad X = \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x F.$$

Alors, $J^*\eta$ est une forme volume sur M_c.

— *Cas des variétés quotients.* Soit Γ un groupe agissant proprement et librement sur une variété M. On peut montrer les faits suivants laissés en exercices.

1. Si $\alpha \in \Omega(M/\Gamma)$, alors $\omega := p^*\alpha$ est telle que $\gamma^*\omega = \omega$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ (utiliser $p \circ \gamma = p$).
2. Si $\omega \in \Omega(M)$ vérifie $\gamma^*\omega = \omega$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, alors il existe un unique $\alpha \in \Omega(M/\Gamma)$ tel que $\omega = p^*\alpha$.

De cet exercice tire-t-on deux conséquences. Premièrement, si M/Γ possède une forme volume, alors M aussi. Secondement, si M possède une forme volume Γ-invariante (*i.e* $\gamma^*\omega = \omega$ pour tout $\gamma \in \Gamma$), alors M/Γ possède une forme volume.

Exercice. $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n/\{\pm \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}\}$ est orientable *si et seulement si* n est impair.

4.3 Intégration des formes différentielles

4.3.1 Intégration sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$

Définition 4.3.1. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $\alpha \in \Omega^n(U)$ à support compact. L'intégrale de α sur U est la quantité définie par*

$$I(\alpha, U) = \int_U a(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

où λ est la mesure de Lebesgue*, et a est l'unique fonction telle que $\alpha = a(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ (et $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$).*

Exemples.

— Si $\alpha = (x_1^2 + x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, alors $a(x) = x_1^2 + x_2$.

— Si $\alpha = x_1 e^{x_2}\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1$, alors $a(x) = -x_1 e^{x_2}$.

Proposition 4.3.1. *Soit $f : U \longrightarrow V$ (avec $U, V \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts) un difféomorphisme, et soit $\alpha \in \Omega^n(V)$ à support compact. Si $\det(\mathrm{d}_x f) > 0$ pour tout $x \in U$, alors*

$$I(f^*\alpha, U) = I(\alpha, V).$$

Démonstration. Soit $\alpha = a(y)\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n$. Alors, $f^*\alpha = a(f(x))\det(\mathrm{d}_x f)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ (formule propre aux formes de degré maximal n). On a alors

$$\begin{aligned} I(f^*\alpha, U) &= \int_U a(f(x)) \det \mathrm{d}_x f \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_U a(f(x)) |\det \mathrm{d}_x f| \,\mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_V a(y) \,\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= I(\alpha, V). \end{aligned}$$

□

Remarque. Si $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ est un changement de carte entre $U = \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ et $V = \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, alors la proposition permet d'affirmer que

$$I((\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})^*\alpha_1, \varphi_2(U_1 \cap U_2)) = I(\alpha_1, \varphi_1(U_1 \cap U_2)).$$

En fait cette proposition va permettre de donner un sens à l'intégration des formes différentielles dans une variété orientable puisque la condition $\det(\mathrm{d}_x f) > 0$ est exactement la condition d'orientabilité d'une variété (avec $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$).

4.3.2 Intégration des formes différentielles de degré maximale sur les variétés

Définition 4.3.2. *Soit M une variété compacte (ou plus généralement possédant des partitions de l'unité). Soit $(U_i, \varphi_i)_i$ un atlas d'orientation de M (donc M est orientable. Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M tel que $\overline{V}_i \subset U_i$, et $\chi : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\mathrm{supp}(\chi_i) \subset U_i$ pour tout $i \in I$, et telles $\sum_{i \in I} \chi_i \equiv 1$ sur M. Pour tout $\omega \in \Omega^n(M)$, on pose*

$$I(\omega, M) = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^*(\chi_i \times \omega).$$

Remarque. Cette définition est indépendante des choix faits (représentant de la classe d'équivalence d'atlas d'orientation, recouvrement ouvert, partitions de l'unité).