

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE RENNES

RAPPORT DE STAGE

INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE
TROPICALE
&
SEIZIÈME PROBLÈME DE HILBERT

AUTEUR
VICTOR LECERF

ENCADRANT
ARTHUR RENAUDINEAU



école
normale
supérieure

2020–2021

Résumé

Notre objectif dans ce rapport est de s'intéresser à la structure des courbes algébriques en tant que surfaces de RIEMANN. Nous définissons en première partie cette structure et sa place dans la théorie de l'holomorphie, puis nous posons cette structure sur les courbes algébriques dans une seconde section. Nous démontrons que le genre d'une telle surface de degré d dans \mathbb{C}^2 est $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$, puis le théorème de BÉZOUT nous permettant de montrer le théorème de HARNACK. Ce résultat nous donne une majoration optimale du nombre de composantes connexes d'une courbe algébrique dans \mathbb{R}^2 . Dans la troisième et dernière section, nous décrivons la méthode du patchworking dans la théorie de la géométrie tropicale pour ainsi donner des exemples de courbes algébriques de tout degré montrant de l'optimalité de la majoration proposée par A. HARNACK.

Remerciements

Il est sans aucun doute nécessaire de remercier Arthur RENAUDINEAU pour ses réponses à mes nombreuses interrogations et ses clarifications face à mes incompréhensions. La géométrie tropicale ironiquement, n'est pas de tout repos mais ce stage a été la découverte d'un domaine des mathématiques intrigant et totalement étranger à mes connaissances, sous son regard toujours bienveillant.

Table des matières

1	Surfaces de RIEMANN	2
1.1	Variétés complexes	2
1.1.1	Constructions	3
1.2	Exemples classiques	4
1.2.1	L'espace projectif $\mathbb{C}P^1$	4
1.2.2	Tores complexes	5
1.3	Graphes et lieux d'annulations	5
1.4	Fonctions sur les surfaces de RIEMANN	7
1.4.1	Généralisation de l'holomorphie	7
1.4.2	Singularités	7
1.4.3	Exemples et applications	8
1.5	Holomorphie entre surfaces de RIEMANN	10
1.5.1	Définitions	10
1.5.2	Propriétés globales	11
1.5.3	Nombre d'EULER	12
2	Courbes algébriques	13
2.1	Genre d'une courbe de degré d	13
2.1.1	Théorème de BÉZOUT	14
2.2	Théorème d'HARNACK	16
2.2.1	Démonstration du théorème	17

3 Géométrie tropicale	18
3.1 Polynômes à coefficients dans \mathbb{T}	19
3.1.1 ... à une variable	19
3.1.2 ... à deux variables	20
3.1.3 Courbe duale	21
3.1.4 Amibes	23
3.2 Patchwork	25
3.2.1 Définitions	25
3.2.2 Méthode	26
3.2.3 Construction de courbes maximales	27
3.3 Note historique	28

1 Surfaces de RIEMANN

Dans cette section, X désignera un espace topologique.

1.1 Variétés complexes

L'objet principal de cette section est de définir les variétés complexes. Une variété complexe de dimension 1 est appelée *surface de RIEMANN*. On définit tout d'abord une carte locale complexe comme un homéomorphisme d'un ouvert de X vers un ouvert de \mathbb{C} . On peut voir une surface RIEMANN comme une variété de dimension réelle de dimension 2. En particulier, on demande sur ce nouveau type de variété que les changements de cartes définis sur un même domaine soient holomorphes pour pouvoir affirmer que deux cartes soient compatibles. Comme dans le cas réel, on appelle *atlas* toute famille de cartes deux à deux compatibles. On affirme ensuite que deux atlas sur X sont équivalents si leurs éléments sont deux à deux compatibles. On remarque alors que deux atlas \mathcal{A} et \mathcal{B} sont équivalents *si et seulement si* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est un atlas. Par le lemme de ZORN, on peut alors montrer que chaque classe d'équivalences d'atlas possède un atlas maximal. Cela permet de considérer que nous nous plaçons sur l'atlas maximal de la classe d'équivalences d'atlas étudié. Si X est munit d'un atlas maximal, on parle alors de *structure complexe* sur X . On définit de là les surfaces de RIEMANN.

Définition 1.1.1. Soit U et V des ouverts respectifs de X et de \mathbb{C} . On appelle *carte locale complexe* tout homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$.

Remarques.

- Une carte $\varphi : U \rightarrow V$ est dite centrée en $p \in X$ si $\varphi(p) = 0$.
- Soit $(U_i)_{i \in I}$ des ouverts de X , $(V_i)_{i \in I}$ des ouverts de \mathbb{C} , et $(\varphi_i)_{i \in I}$ des cartes complexes de X . Soit maintenant i et $j \in I$. On dit que les cartes φ_i et φ_j sont compatibles si $V_i \cap V_j = \emptyset$, ou si $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ est une fonction holomorphe. Cette

application est appelé *changement de cartes*. Remarquons aussi que cette définition est cohérente puisque $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ est de même holomorphe.

- Un changement de cartes T est tel que T' ne s'annule jamais sur son domaine de définition.

Définition 1.1.2. On appelle **atlas complexe** sur X toute famille de cartes $(\varphi_i : U_i \rightarrow V_i)_{i \in I}$ telle que $(U_i)_{i \in I}$ recouvre X , et que les cartes soient toutes deux à deux compatibles. Deux atlas sur X sont dits équivalents si toutes les cartes de l'un sont compatibles avec toutes les cartes de l'autre.

Remarque. Deux atlas \mathcal{A} et \mathcal{B} sont équivalents *si et seulement si* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est un atlas. Ceci définit bien une relation d'équivalence. En fait, le lemme de ZORN permet d'affirmer que tout atlas est contenu dans un unique atlas maximal pour l'inclusion. Deux atlas sont alors équivalents *si et seulement si* ils sont contenus dans le même atlas maximal.

Définition 1.1.3. On appelle **surface de RIEMANN** tout espace topologique séparé, connexe, à base dénombrables d'ouverts, muni d'une structure complexe.

Une surface de RIEMANN est structurellement une variété réelle \mathcal{C}^∞ de dimension 2. De plus, sur une telle variété, connexité simple et connexité par arcs étant équivalents, une surface de RIEMANN est connexe par arcs.

Orientation. Dans le cas réel, si V est une variété différentielle de dimension n quelconque, on dit que V est orientable s'il possède un atlas réel tel que tous ses changements de cartes ont un déterminant jacobien positif. Dans le cas $n = 2$ (pour une surface réelle), cela signifie que l'on peut définir en tout point de V un unique vecteur normal, et d'appliquer la règle de la main droite. Un exemple classique de surface orientable est le tore. Nous utiliserons¹ dans ce rapport la classification des surfaces orientables à homéomorphie près : ces surfaces sont la sphère \mathbb{S}^1 , le tore, le 2-tore, ..., le tore à k poignées. On définit le genre d'un genre comme l'entier $k \in \mathbb{N}$ tel que cette surface soit homéomorphe à un k -tore (ou à la sphère quand $k = 0$). Revenons en aux surfaces de RIEMANN. Une surface de RIEMANN peut être vue comme une variété de classe \mathcal{C}^∞ de dimension 2. Or, un changement de carte T en un point c a pour jacobien $|T'(c)|^2 > 0$. Une telle surface est donc orientable², et c'est bien pratique car certains résultats ultérieurs de ce rapport utilisent une formule du genre de certaines classes de surfaces.

1.1.1 Constructions

Il est bien intéressant de définir les surfaces de RIEMANN, mais il serait encore mieux de savoir *comment les construire*. Pour cela, nous rappelons la méthode classique pour donner à

1. et admettrons...

2. On peut visualiser un peu mieux ce résultat en se rappelant qu'une fonction holomorphe dont la dérivée ne s'annule pas préserve les angles, et donc une orientation locale qu'on pourrait donner à chaque point d'une surface, donnant alors une orientation invariante et globale.

un espace sans topologie “quelconque”³. Cette construction se base sur l’observation suivante si X est un espace topologique (séparé, connexe, à base dénombrables d’ouverts) muni d’une structure complexe, nous possédons donc une famille $(\varphi_j)_{j \in J}$ d’homéomorphismes compatibles $\varphi_j : U_j \rightarrow V_j$ où U_j est un ouvert de X et V_j de \mathbb{C} . On remarque en fait que la topologie donnée par l’atlas est cohérente avec celle de X .

En fait, si X est un ensemble quelconque (sans topologie), il suffit de se donner une famille dénombrable $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de parties (munies chacune d’une topologie détaillée plus tard) recouvrant X , et de donner la topologie suivante à X : une partie $U \subset X$ est ouverte dans X si et seulement si $U \cap U_\alpha$ est ouverte dans U_α pour tout $\alpha \in A$.

Pour maintenant donner une topologie sur chaque U_α , on se donne une famille d’éléments $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ de bijections où les V_α sont des ouverts de \mathbb{C} . On posera sur chaque U_α la topologie la plus fine telle φ_α soit un homéomorphisme. On remonte ensuite pour créer une topologie sur X . Une telle topologie sur X impose que U_α est ouvert dans X si et seulement si pour tout $\beta \in A$, $U_\alpha \cap U_\beta$ est ouvert dans U_α , si et seulement si pour tout $\beta \in A$, $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ est ouvert dans V_α .

Il nous suffit enfin de vérifier que les φ_α (qui sont maintenant des cartes locales complexes de X) sont deux à deux compatibles. On a alors déterminé sur X une structure de surface de RIEMANN.

1.2 Exemples classiques

1.2.1 L’espace projectif \mathbb{CP}^1

On considère l’action de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^2 définie pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ par $\lambda \mapsto (\lambda z, \lambda w)$. Les orbites de cette action sont exactement les droites de l’espace \mathbb{C}^2 . On considère alors l’espace de ces droites

$$\mathbb{CP}^1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

appelé espace projectif standard de dimension 1 sur \mathbb{C} . Dans cet espace, pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, on note $[z : w] = \text{Vect}((z, w)) \subset \mathbb{C}^2$ la droite engendrée par (z, w) . On a alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que $[\lambda z : \lambda w] = [z : w]$. On veut maintenant utiliser la méthode précédente pour montrer que \mathbb{CP}^1 est une surface de RIEMANN. On pose

$$U_0 = \{[z : w] \in \mathbb{CP}^1 \mid z \neq 0\}$$

et

$$U_1 = \{[z : w] \in \mathbb{CP}^1 \mid w \neq 0\}.$$

On pose de plus $\varphi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $[z : w] \mapsto \frac{w}{z}$ et $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $[z : w] \mapsto \frac{z}{w}$. Ce sont tout deux des bijections et $\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \varphi_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$ sont des ouverts de \mathbb{C} . On vérifie facilement que φ_0 et φ_1 sont compatibles et que U_0 et U_1 sont connexes d’intersections non vide, ce qui assure que \mathbb{CP}^1 est connexe. Enfin, \mathbb{CP}^1 est bien séparé : en effet, si $p, q \in \mathbb{CP}^1$, un premier cas est que $p, q \in U_0$ (ou symétriquement U_1), et on peut alors les séparer dans U_0 . Dans un second cas, on peut supposer que $p \in U_0 \setminus U_1$ et que $q \in U_1 \setminus U_0$. Alors, $p = [1 : 0]$ et $q = [0 : 1]$. On pose $D = \mathcal{B}(0, 1)$ la boule ouverte unité de \mathbb{C} , et alors $\varphi_0^{-1}(D)$ et $\varphi_1^{-1}(D)$ séparent p et

3. Pas tout à fait quelconque, mais suffisamment géométrique pour tenter de lui donner une telle structure.

q . Enfin nous observons que $\mathbb{C}\mathbb{P}^{-1} = \varphi_0^{-1}(\overline{D}) \cup \varphi_1^{-1}(\overline{D})$ qui est une union de fermés (en tant qu'images réciproques de \overline{D}) et compact en tant qu'union de compacts (en tant qu'images directes respectives de φ_0^{-1} et φ_1^{-1}) car φ_0 et φ_1 sont des homéomorphismes.

1.2.2 Tores complexes

Soit ω_1 et ω_2 deux complexes non alignés dans le plan complexe (*i.e* formant une famille \mathbb{R} -libre). Soit

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2.$$

Le réseau L est un sous-groupe additif de \mathbb{C} . On pose $X = \mathbb{C}/L$ et on munit X de la topologie induite par la projection canonique $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$. Puisque L est discret, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $|\omega| > 2\varepsilon$ pour tout $\omega \in L$. Ainsi, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la boule ouverte $\mathcal{B}(z_0, \varepsilon)$ contient exactement un seul représentant de chaque classe d'équivalences de X . Ainsi, l'application $\pi_z = \pi|_{\mathcal{B}(z, \varepsilon)} : \mathcal{B}(z, \varepsilon) \rightarrow \pi(\mathcal{B}(z, \varepsilon))$ est une bijection pour tout $z \in \mathbb{C}$ (c'est même un homéomorphisme). On note alors φ_z son inverse et on vérifie que les cartes locales φ_z sont deux à deux compatibles.

On remarque enfin grâce aux propriétés de π que X est séparé, connexe, et à base dénombrable. On observe même que X est compact. On conclue que X est une surface de RIEMANN compacte. X est fait un tore⁴ (complexe) de genre 1.

1.3 Graphes et lieux d'annulations

Si $V \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe de \mathbb{C} , et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, alors on peut munir d'une structure de surface de RIEMANN le graphe

$$X = \{(z, g(z)) \mid z \in V\}.$$

Pour cela on munit X de la topologie induite par \mathbb{C}^2 et on note $p : X \rightarrow V$ la projection en la première coordonnée. Cela suffit pour définir sur X un atlas. Pour cela on utilise les projections $\pi : X \rightarrow V$, $(z, w) \mapsto z$ (l'atlas ne comportera qu'une carte). On remarque d'abord que V et $g(V)$ sont tout deux ouverts dans \mathbb{C} (l'un par définition, l'autre car g est holomorphe et est donc ouverte) et que π est bien un homéomorphisme d'inverse $z \mapsto (z, g(z))$. Il est donc automatique que nous avons un atlas, et donc une structure de surface de RIEMANN. On généralisera ce résultat à un graphe du type

$$X = \{(z, g_1(z), \dots, g_n(z)) \mid z \in V\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$$

où g_1, \dots, g_n sont des fonctions holomorphes. On peut même aller encore plus loin et donner une structure de surface de RIEMANN à un sous-ensemble quelconque $X \subset \mathbb{C}^2$ pourvu qu'on puisse l'identifier localement au graphe d'une fonction. Pour cela, on dispose du théorème des fonctions implicites dans le cas où X est le lieu d'annulation d'une fonction $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

4. On observe cela en remarquant que que X est l'image d'un parallélogramme qui sous l'action de l'application π voit ses côtés devenir identiques.

Théorème 1.3.1 (des fonctions implicites). Soit $P \in \mathbb{C}[Z, W]$ un polynôme en deux variables, et soit $X = P^{-1}(\{(0, 0)\})$, et soit $p = (z_0, w_0)$ une racine de P (donc $p \in X$). On suppose que $\frac{\partial P}{\partial w}(p) \neq 0$. Alors, il existe une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un voisinage $U \subset \mathbb{C}$ de z_0 tel que pour tout $(z, w) \in U$,

$$P(z, w) = 0 \iff w = g(z).$$

Remarque. Comme dans le cas des espaces de BANACH, on a accès à la dérivée de g puisque

$$g' = -\frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{\frac{\partial P}{\partial w}}.$$

On pourrait énoncer ce théorème bien plus généralement (même aux fonctions holomorphes en n -variables). Cet énoncé suffira ici.

Définition 1.3.1. On appelle *courbe algébrique plane* le lieu d'annulation d'un certain polynôme $P \in \mathbb{C}[Z, W]$.

Remarque. Une racine $a \in \mathbb{C}^2$ de P est dite *non singulière* si $\partial_1(a) \neq 0$ ou $\partial_2 P(a) \neq 0$. De même, la courbe $X = P^{-1}(\{0, 0\})$ est dite non singulière (ou lisse) si ses points sont tous non singuliers.

L'intérêt majeur des courbes algébriques planes est que nous pouvons y appliquer en chacun de ses points le théorème des fonctions implicites (en l'une des deux coordonnées). Puisque ce théorème indique que X est localement (en tout point) le graphe d'une fonction, on peut construire comme précédemment des cartes locales complexes sur X . Ces cartes sont en fait les projections π_1 et π_2 en les premières et secondes coordonnées. On vérifie facilement que ces cartes sont compatibles. On a alors quasiment une surface de RIEMANN et le seul point délicat à discerner est que la connexité de X n'a rien de trivial, et n'est même pas automatique⁵. Pour remédier à ce problème, on peut demander que P soit irréductible. On arrive à la proposition suivante.

Proposition 1.3.1. Si P est un polynôme irréductible non singulier en toutes ses racines, alors X est une surface de RIEMANN.

Remarque. Une courbe algébrique plane lisse n'est *jamais* compact (car non bornée en vertu du théorème fondamental de l'algèbre).

5. Lorsque $P(Z, W) = (Z + W)(Z + W - 1)$, X est formé de deux composantes connexes.

1.4 Fonctions sur les surfaces de RIEMANN

1.4.1 Généralisation de l'holomorphic

Avec les surfaces de RIEMANN, nous allons pouvoir généralisé le concept de fonction holomorphe. Fixons maintenant X une surface de RIEMANN. Soit $p \in X$, et $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un voisinage de p .

Définition 1.4.1. La fonction f est dite **holomorphe** en p s'il existe une carte locale complexe de X , $\varphi : U \rightarrow V$ avec $U \subset W$ et $p \in U$, telle que la composition $f \circ \varphi^{-1}$ soit holomorphe en $\varphi(p)$. On dit que f est holomorphe sur W si elle l'est en tout point de W .

Quelques observations suivent : on remarque que si f est holomorphe en p pour une certaine carte locale complexe, alors $f \circ \varphi^{-1}$ est toujours holomorphe, peu importe la carte locale utilisée (pourvu qu'elle soit compatible pour la composition). Ceci est dû au fait que les changements de cartes sont holomorphes. De plus, on observe que si f est holomorphe en p , elle l'est sur un voisinage de p . Ces deux remarques nous assurent que cette définition prolongent correctement les fonctions holomorphes car on retrouve bien des propriétés "convenues".

Notation. On notera $\mathcal{O}_X(W)$ (ou $\mathcal{O}(W)$ s'il n'y a pas de confusion possible) la \mathbb{C} -algèbre des fonctions $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes.

1.4.2 Singularités

On conserve les mêmes notations. On suppose surtout que f est holomorphe sur un voisinage "perforé" de p , *i.e.* sur $W \setminus \{p\}$. On dira que f a une singularité effaçable (*resp.* un pôle, *resp.* une singularité essentielle) en p s'il existe une carte locale complexe (de X) telle que $f \circ \varphi^{-1}$ a une singularité effaçable (*resp.* un pôle, *resp.* une singularité essentielle) en $\varphi(p)$. Encore une fois, une propriété attendue est que cette définition de singularité est indépendante de la carte choisie⁶. On dispose même du théorème classique qui classe les singularités (si f est bornée au voisinage de p , si $|f|$ tend vers l'infini en p , si $|f|$ n'a pas de limite en p). Enfin, on dira qu'une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est méromorphe sur \mathbb{C} en p si elle y est holomorphe, ou si p est une singularité effaçable ou un pôle.

On remarquera surtout que toutes ces définitions et résultats correspondent à ce que l'on connaît déjà de la théorie de l'holomorphic (en considérant \mathbb{C} comme une surface de RIEMANN).

Soit f une fonction holomorphe définie sur un voisinage de $p \in X$. Si $\varphi : U \rightarrow V$ est une carte avec $p \in U$, alors $f \circ \varphi^{-1}$ est développable en série de LAURENT, et alors au voisinage de $z_0 = \varphi(p)$, on a

$$f(\varphi^{-1}(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

6. Par exemple, si f a un pôle en p pour une certaine carte, alors f aura un pôle en p peu importe la carte choisie.

C'est la série de LAURENT de f en p par rapport à φ . On remarquera que les c_n dépendent du choix de la carte φ . Comme dans la théorie classique, les séries de LAURENT permettent de déterminer le type de singularité en p . La singularité est effaçable si pour tout $n \in \mathbb{Z}$ strictement négatif, $c_n = 0$; p est un pôle si la suite des c_n avec n strictement négatif est non nulle à support fini; et p est essentielle sinon. Enfin, si f est méromorphe en p , on définit l'ordre de f en p par

$$\text{ord}_p(f) = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid c_n \neq 0\}.$$

Cette définition est indépendante du choix de la carte φ . Cet ordre de f en p possède les mêmes propriétés que dans le cas habituel.

On dispose sur cette théorie de l'holomorphie des théorèmes analogues à la théorie classique.

- Les points d'annulations et les pôles forment un ensemble discret. Ainsi, une fonction méromorphe non nulle définie sur une surface de RIEMANN compact a un nombre fini de zéros et de pôles.
- Soient $f, g : W \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions définies sur un ouvert W connexe de X . Si f et g coïncident sur un ensemble possédant un point d'adhérence, alors $f = g$ sur tout W .
- Si $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ est définie sur un ouvert W connexe, alors si $|f|$ atteint son maximum, f est constante. Une conséquence immédiate (sans analogue dans la théorie classique) est que si X est une surface de RIEMANN compacte, alors les seules fonctions holomorphes sur X sont constantes car X est connexe.

1.4.3 Exemples et applications

Sphère de RIEMANN. On appelle *sphère de RIEMANN* le plan complexe auquel on rajoute un point à l'infini dans toutes les directions : $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. La sphère de RIEMANN possède une structure complexe similaire à celle de \mathbb{CP}^1 . On remarque sur la sphère de RIEMANN que toute fonction méromorphe est une fonction rationnelle. De là, on montre qu'on a toujours

$$\sum_{p \in \mathbb{C}_\infty} \text{ord}_p(f) = 0.$$

Droite projective \mathbb{CP}^1 . Nous avons déjà remarqué que pour tout $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a $[z : w] = [\lambda z : \lambda w]$. Ainsi, pour construire des fonctions sur \mathbb{CP}^1 , nous avons besoin de fonction sur \mathbb{C}^2 qui seraient invariantes sous l'action de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^2 . Pour cela, on étudie des fractions rationnelles précises. En effet, si P et Q sont éléments de $\mathbb{C}[Z, W]$ homogènes tout deux de degré d , alors la fraction rationnelle $R = P/Q$ sera invariante sous l'action de \mathbb{C}^* . Ainsi la fonction R deviendra sur \mathbb{CP}^1 une fonction méromorphe. La réciproque est même vraie : toute fonction méromorphe sur \mathbb{CP}^1 est une fraction rationnelle de polynôme homogène à deux variables de même degré.

Tores complexes. Soit $\tau \in \mathbb{C}$ avec $\Im(\tau) > 0$. Soit alors $L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ et $X = \mathbb{C}/L$. Pour construire des fonctions méromorphes sur X , on peut chercher des fonctions L -périodiques (*i.e* dont les éléments de L sont tous des périodes), mais le problème est qu'une telle fonction

serait holomorphe sur X qui est compact. Il n'y a donc que des fonctions constantes dans cette direction. Une construction plus minutieuse donne le résultat suivant. Pour cela on pose pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau + 2nz)}.$$

Cette série est absolument et uniformément convergente sur tout compact de \mathbb{C} . On définit aussi pour tout $x \in \mathbb{C}$, et $z \in \mathbb{C}$,

$$\theta_x(z) = \theta\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - x\right).$$

Proposition 1.4.1. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et soit $x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d$ tel que*

$$\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)$$

soit un entier. Alors, la fonction R définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$R(z) = \frac{\prod_{i=1}^d \theta_{x_i}(z)}{\prod_{j=1}^d \theta_{y_j}(z)}$$

est une fonction méromorphe L -périodique qui induit sur \mathbb{C}/L une fonction méromorphe.

Remarques. R a des zéros simples en les points de $x_i + L$ et des pôles en les points $y_j + L$. Des résultats ultérieurs permettront de montrer que toute fonction méromorphe sur \mathbb{C}/L est de cette forme. De plus, il est possible de montrer que tout réseau de points peut se mettre sous la forme $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$.

Soit f une fonction polynomiale définissant une courbe plane affine $X \subset \mathbb{C}^2$ via l'équation $f(x, y) = 0$. Nous savons que les projections $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ en la première et la seconde coordonnée sont holomorphes. Ainsi, tout polynôme $g \in \mathbb{C}[X, Y]$ l'est aussi. On en déduit que toute fraction rationnelle $R = G/H$ est méromorphe tant que H n'est pas identiquement nul sur X . On remarque d'ailleurs que si f divise H alors, H est nulle sur X . Le théorème des zéros de HILBERT nous affirme que la réciproque est vraie lorsque f est irréductible : si H s'annule dès lors que f s'annule, alors f divise H . On peut d'ailleurs considérer que f est bien irréductible puisque nous souhaitons travailler sur une surface de RIEMANN.

Soit $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme non singulier irréductible et X le lieu de ses zéros. On peut prolonger ce résultat sur \mathbb{CP}^2 . Pour cela, on doit d'abord remarquer que \mathbb{CP}^2 est compact et donc que nous ne pouvons pas prendre de quotient de fonctions holomorphes puisque ces dernières sont toutes constantes. Encore une fois, nous considérons des polynômes $G, H \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ homogène de degré d . Alors, $R = G/H$ est bien définie partout sur \mathbb{CP}^2 (exceptés en les zéros de H). On peut d'ailleurs étendre le théorème des zéros de HILBERT.

On arrive à la conclusion que le quotient $R = G/H$ est méromorphe sur X tant que F ne divise pas H .

1.5 Holomorphie entre surfaces de RIEMANN

1.5.1 Définitions

Soient X et Y des surfaces de RIEMANN.

Définition 1.5.1. Soient $F : X \rightarrow Y$ et $p \in X$. La fonction F est dite **holomorphe** en p s'il existe une carte $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ sur X (avec $p \in U_1$) et $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ une carte sur Y telles que l'application $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ est holomorphe en $\varphi_1(p)$.

Remarques. Bien évidemment, si F est définie sur un ouvert $W \subset X$, alors on dira que F est holomorphe si elle l'est en tout point de W . On parlera plus précisément d'*application holomorphe* lorsque F est holomorphe en tout point de X .

Comme vu dans le cas d'une application holomorphe $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, F est holomorphe si est seulement si $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ l'est pour toutes cartes φ_1 et φ_2 respectivement sur X et Y . De plus, les définitions s'accordent tout à fait lorsque $Y = \mathbb{C}$.

On peut observer qu'une fonction $F : X \rightarrow Y$ holomorphe est continue (et même C^∞ via les cartes sur X et Y). De plus, les différentes compositions possibles sont compatibles avec l'holomorphie. Par exemple, si $F : X \rightarrow Y$ et $G : Y \rightarrow Z$ sont des fonctions holomorphes entre surfaces de RIEMANN, alors $G \circ F$ est holomorphe. De même, si $g : W \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe définie sur un ouvert de Y , alors $g \circ F$ est holomorphe sur $F^{-1}(W)$. C'est toujours vrai si l'on suppose uniquement g méromorphe à condition que $F(X)$ ne contienne aucun pôle de g . Dans ce cas, $g \circ F$ est méromorphe. On peut résumer ces propriétés de la manière suivante : soit $F : X \rightarrow Y$ une fonction holomorphe. Alors, pour tout ouvert $W \subset Y$, F induit un morphisme de \mathbb{C} -algèbre $F^* : \mathcal{M}_Y(W) \rightarrow \mathcal{M}_X(F^{-1}(W))$ défini pour tout $g \in \mathcal{M}_Y(W)$ par $F^*(g) = g \circ F$. Cette application définit aussi un morphisme de \mathbb{C} -algèbre $F^* : \mathcal{M}_Y(W) \rightarrow \mathcal{M}_X(F^{-1}(W))$.

Isomorphismes. On dit que deux surfaces de RIEMANN X et Y sont isomorphes s'il existe un biholomorphisme $F : X \rightarrow Y$ (F est holomorphe, bijective, et F^{-1} est holomorphe). F est alors un isomorphisme, et on parlera d'automorphisme lorsque $X = Y$. Par exemple, \mathbb{CP}^1 et \mathbb{C}_∞ sont isomorphes.

Théorèmes classiques. On retrouve dans cette troisième théorie de l'holomorphie des résultats convenus.

- $F : X \rightarrow Y$ est une application holomorphe non constante, alors F est ouverte.
- Si $F : X \rightarrow Y$ est une application holomorphe injective, alors F induit un isomorphisme entre X et $F(X)$.
- Si F, G sont deux applications holomorphes de X vers Y , et que F et G coïncident sur un ensemble possédant un point d'adhérence, alors $F = G$ sur tout X .

Théorèmes moins classiques. On énumère maintenant quelques résultats propres à la théorie.

- Soit X une surface de RIEMANN compacte, et $F : X \rightarrow Y$ une application holomorphe non constante. Alors, Y est compact, et F est surjective.
- Soit $F : X \rightarrow Y$ une application non constante entre surface de RIEMANN. Alors, pour tout $y \in Y$, $F^{-1}(\{y\})$ est discret dans X . En particulier, si X et Y sont compacts, alors $F^{-1}(\{y\})$ est non vide et fini, pour tout $y \in Y$.

1.5.2 Propriétés globales

Forme locale normale et multiplicité Soit $p \in X$ et $F : X \rightarrow Y$ une fonction holomorphe. Il existe un unique entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour toute carte $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ sur Y centrée en $F(p)$, il existe une carte $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ sur X centrée en p telle que pour tout $z \in V_1$,

$$\varphi_2(F(\varphi_1^{-1}(z))) = z^m.$$

L'entier m est appelé *multiplicité de F en p* , noté $\text{mult}_p(F)$. Puisque F est supposée non constante, on a toujours $\text{mult}_p(F) \geq 1$. Si $p \in X$ est tel que $\text{mult}_p(F) \geq 2$, on dit que p est un *point de ramification pour F* . Un point $y \in Y$ sera appelé *point de branchement pour F* si c'est l'image par F d'un point de ramification. On remarquera qu'une carte complexe en tant qu'application holomorphe est de multiplicité 1 en tout point.

Proposition 1.5.1. *On a les propriétés suivantes.*

- (i) *Soit $X \subset \mathbb{C}^2$ une courbe plane affine lisse définie par $f(x, y) = 0$ où f est une fonction polynomiale en deux variables complexes, et soit $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x$. Alors, π est ramifiée en $p \in X$ si et seulement si*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0.$$

- (ii) *Soit $X \subset \mathbb{CP}^2$ une courbe plane projective définie par $F(x, y, z) = 0$ où F est une fonction polynomiale homogène. Soit de plus $G : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$, $[x : y : z] \mapsto [x : z]$. Alors, G est ramifié en $p \in X$ si et seulement si*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0.$$

Démonstration. On montre uniquement le premier point. Notons $p = (x_0, y_0)$. Si l'on suppose que $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, alors π est en fait une carte complexe, et est donc de multiplicité 1 en p . Réciproquement, si $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$ alors nécessairement $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0$ puisque la courbe est lisse. Ainsi f est le graphe d'une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ et $f(g(y), y) = 0$ sur le voisinage U de y_0 . En dérivant, on voit dans un voisinage de y_0 que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(y)g'(y) + \frac{\partial f}{\partial y}(y) = 0.$$

Or, nos hypothèses imposent donc que $g'(y_0) = 0$. Par le critère des dérivées (**qu'il faut que je cite à un moment**), on en déduit que p est un point de ramification pour π . □

Avant de procéder à la remarque suivante, on rappelle qu'il y a une correspondance bijective entre les fonctions méromorphes $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ et les fonctions $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ non constante à ∞ . Soit donc $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe sur la surface de RIEMANN X , associée à $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Soit $p \in X$;

- si p est un zéro de f , alors $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$;
- si p est un pôle de f , alors $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$;
- si p n'est ni un zéro ni un pôle, alors $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.

Degré d'une fonction holomorphe. Soit $F : X \rightarrow Y$ une fonction holomorphe non constante entre deux surfaces de RIEMANN, et soit $y \in Y$. Alors, la quantité

$$\sum_{p \in F^{-1}(\{y\})} \text{mult}_p(F)$$

est indépendante de y . On l'appelle *degré de F* , notée $\text{deg}(F)$. On remarquera qu'une application holomorphe entre deux surfaces de RIEMANN est un isomorphisme *si et seulement si* elle est de degré 1. En conséquence, si X est compacte, et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction méromorphe avec un seul pôle simple, alors X est isomorphe à \mathbb{C}_∞ .

Somme des ordres. Retour en arrière, et nous pouvons désormais affirmer que si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction méromorphe, alors

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p(f) = 0.$$

1.5.3 Nombre d'EULER

Soit S une variété de dimension 2 compacte. On appelle *triangulation de S* toute décomposition de S de fermés tous homéomorphes à un triangle de \mathbb{R}^2 , de sorte que deux triangles soient soit disjoints, soit ne se rencontrent qu'en un seul sommet, soit ne se rencontrent que sur une seule arête. Si v désigne le nombre de sommets, e d'arêtes, et t de triangles, alors on note $\chi(S) = v - e + t$. L'intérêt de cette définition est que la quantité $\chi(S)$ est indépendante de la triangulation de S choisie. On utilisera surtout le résultat suivant.

Proposition 1.5.2. *Soit C est une variété compacte de dimension 2 orientable de genre g . Alors $\chi(C) = 2 - 2g$.*

2 Courbes algébriques

2.1 Genre d'une courbe de degré d

Nous allons dans cette sous-section démontrer le résultat suivant.

Théorème 2.1.1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène de degré d non singulier, et soit X son lieu d'annulation dans \mathbb{CP}^2 . Alors, X est une surface connexe orientable de genre*

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Démonstration. Le point intéressant ici est le genre d'une telle courbe (le reste est une propriété des surfaces de RIEMANN). Nous ne donnerons pas ici une démonstration exhaustive, mais voici l'idée. La démonstration se fait en deux temps : d'abord, toutes les courbes de degré d dans \mathbb{CP}^2 sont \mathcal{C}^∞ -difféomorphes⁷. Ainsi, il suffit de déterminer le genre d'une courbe particulière de degré d puisque le genre est invariant par homéomorphisme. Soit $X \subset \mathbb{CP}^2$ la courbe projective plane de degré d définie par $F(X, Y, Z) = X^d + Y^d + Z^d$ (appelée *courbe de FERMAT de degré d*). On pose $\pi : X \rightarrow \mathbb{CP}^1$, $[x : y : z] \mapsto [x : y]$.

- (i) Montrons que X est lisse. Si l'on cherche $p \in \mathbb{C}^3$ tel que $F(p) = 0$, on observe que nécessairement $p = (0, 0, 0)$. Or, l'origine ne peut pas être transporté dans \mathbb{CP}^2 . On en déduit que X est lisse.
- (ii) L'application π est bien définie puisque que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a que

$$\pi([\lambda x : \lambda y : \lambda z]) = [\lambda x : \lambda y] = [x : y] = \pi([x : y : z]).$$

Elle est holomorphe⁸. Pour calculer son degré, on va d'abord chercher ses points de ramification : selon la proposition 1.5.1, nous savons qu'un point $p = [x_0 : y_0 : z_0] \in X$ est de ramification pour π si et seulement si

$$\frac{\partial F}{\partial z}(p) = 0.$$

On en conclue que p est ramifié pour π si et seulement si $dz^{d-1} = 0$, i.e $z = 0$. Maintenant, pour calculer $\deg(\pi)$, on observe que

$$\pi^{-1}([-1 : 0]) = \{[-1 : 0 : z] \in \mathbb{CP}^2 \mid z^d = 1\}.$$

Cet ensemble est de cardinal d (comme ensemble de racines d -ièmes de l'unité) et que ses points sont tous de multiplicités 1 car ils sont pas des ramifications de π .

7. C'est le point le plus délicat que nous admettrons.

8. Conséquence du théorème des fonctions implicites.

- (iii) Nous avons trouvé précédemment que les points ramifiés pour π de X sont les $p \in X$ tel que $p = [x : y : 0]$. En particulier, tout élément $[x : y] \in \pi(X)$ est un branchement pour π . Ce sont les éléments $[x : y] \in \mathbb{CP}^1$ tels que $x^d + y^d = 0$. On peut alors les écrire sous la forme $[1 : y/x]$ (car si $x = 0$, automatiquement $y = 0$ mais le point “[0 : 0]” n'existe pas). Or, cela signifie que les points de branchement de π sont exactement les $[1 : w]$ tels que w est une racine d -ième de -1 . On en conclue qu'il y a exactement d branchements.
- (iv) On observe avant tout que l'on peut calculer que les multiplicités des branchements. En effet, chaque branchement a exactement un et un seul antécédent par π . On a alors que la multiplicité d'un point de branchement est exactement d puisqu'on sait que $\deg \pi = d$.

$$2g(X) - 2 = \deg(\pi)(2g(\mathbb{CP}^1) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(\pi) - 1).$$

Cela nous donne, en sachant que $g(\mathbb{CP}^1) = 0$, que

$$2g(X) - 2 = -2d + d(d - 1).$$

Ainsi, on trouve exactement que

$$g(X) = \frac{(d - 1)(d - 2)}{2}.$$

□

On termine cette sous-section avec un dernier résultat topologique.

Proposition 2.1.1. *Soit X une courbe algébrique de degré d dans \mathbb{CP}^2 , et $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Alors,*

- (i) X est connexe ;
- (ii) $\chi(X) \leq 2 - 2g$ avec égalité si et seulement si X est lisse.

Ce résultat, bien que le premier point soit intéressant, ne nous servira pas dans la suite de ce rapport.

2.1.1 Théorème de BÉZOUT

Pour les résultats ultérieurs de ce rapport, nous avons besoin de s'intéresser au “nombre” de points d'intersection de deux courbes algébriques complexes. Deux droites non parallèles s'intersectent en un unique point. De même, si une droite (courbe de degré 1) intersecte un cercle (courbe de degré 2) et n'est pas tangent au cercle, alors on observe deux points d'intersections.

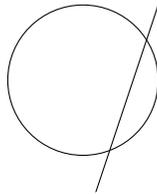


FIGURE 1 – Un cercle et une droite en positions générales s'intersectent deux fois.

Illustration. Là où nous voulons en venir est un théorème qui relie le nombre de points d'intersections aux degrés des courbes intersectées. Le résultat est en fait le suivant : le nombre d'intersections est exactement le produit des degrés des courbes (quelque soit le nombre de courbes intersectées). Sauf que nous cachons ici de la poussière sous le tapis.

En fait, nous n'avons pas défini ce qu'est le "nombre d'intersections" de deux courbes. Car dans le cas d'une droite tangente à un cercle, il n'y a qu'un seul point d'intersection, et pas deux. On a besoin de définir une multiplicité pour chaque point d'intersection, et quelque chose qui soit même compatible avec des cas particuliers⁹.

Soit maintenant C_1 et C_2 deux courbes algébriques affines de \mathbb{C}^2 définies par deux polynômes P_1 et P_2 , et soit $p \in \mathbb{C}^2$ un point. On dira que C_1 et C_2 s'intersectent *proprement* en p s'ils n'ont aucune composante (connexe) commune contenant p . On définit $\text{Int}_p(C_1 \cap C_2)$ comme une quantité vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) $\text{Int}_p(C_1 \cap C_2)$ est élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. C'est un entier naturel si les courbes s'intersectent proprement en p , et égal à ∞ si C_1 et C_2 ne s'intersectent pas proprement en p .
- (ii) $\text{Int}_p(C_1 \cap C_2) = 0$ si et seulement si $p \in C_1 \cap C_2$.
- (iii) Cette quantité est invariante par changement de coordonnées affine : si $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ est un changement de coordonnées affine, alors

$$\text{Int}_p(C_1 \cap C_2) = \text{Int}_{T(p)}(T(C_1) \cap T(C_2)).$$

- (iv) $\text{Int}_p(C_1 \cap C_2) = \text{Int}_p(C_2 \cap C_1)$.
- (v) $\text{Int}_p(C_1 \cap C_2) \geq m_p(C_1)m_p(C_2)$ où $m_p(C_k)$ désigne la multiplicité de p en tant que zéro du polynôme P_k . Il y a égalité si et seulement si C_1 et C_2 n'ont pas de droite tangente commune en p .
- (vi) Soit C la courbe déterminée par $P_1P_2 = 0$. Si D est une autre courbe algébrique affine, alors

$$\text{Int}_p(C \cap D) = \text{Int}_p(C_1 \cap D) + \text{Int}_p(C_2 \cap D).$$

- (vii) On suppose que P_1 est irréductible. Alors,

$$\text{Int}_p(C_1 \cap C_2) = \text{Int}_p(C_1 \cap E_R)$$

où E_R est une courbe définie par le polynôme $Q + RP$ avec $R \in \mathbb{C}[X, Y]$. Cette relation est indépendante de R .

9. Que dire du nombre de points d'intersection de deux droites confondues ?

Le nombre $\text{Int}_p(C_1 \cap C_2)$ est *unique* et existe. Il est en fait défini par

$$\text{Int}_p(C_1 \cap C_2) = \dim(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, p}/I(C_1, C_2))$$

où $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, p}$ est l'anneau local de \mathbb{C}^2 en p et $I(C_1, C_2)$ l'idéal déterminé par p (nous ne les définirons pas ici, et admettrons le résultat). On peut définir de la même façon la multiplicité des points d'intersections de deux courbes algébriques projectives. Nous allons enfin pouvoir énoncer un théorème convenable sur les relations entre degrés et intersections.

Théorème 2.1.2 (BÉZOUT). *Soit C_1 et C_2 deux courbes algébriques planes (i.e dans \mathbb{CP}^2) de degrés respectifs m et n . Alors,*

$$\sum_{p \in C_1 \cap C_2} \text{Int}_p(C_1 \cap C_2) = mn.$$

Avec multiplicités, les deux courbes ont exactement mn points d'intersection.

2.2 Théorème d'HARNACK

La géométrie algébrique réelle a pour objet l'étude des courbes algébriques, i.e étudier topologiquement le lieu des zéros d'un polynôme. L'interrogation majeure de cette discipline est contenue dans le XVI^e problème de HILBERT. En effet, si $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ est un polynôme en deux variables, alors le lieu d'annulation X de P définit une surface de RIEMANN dans \mathbb{C}^2 . On sait de plus que X est connexe lorsque P est irréductible. Si l'on étudie maintenant $X \cap \mathbb{R}^2$, on observe maintenant des lignes dessinant diverses formes géométriques. Par exemple, si $P = X^2 + Y^2 - 1$, alors X est le cercle unité de \mathbb{R}^2 . Mais que peut-on dire de X lorsque P est quelconque? Combien $X \cap \mathbb{R}^2$ a-t-il de composantes connexes et comment sont elles arrangées? Certains sont elles imbriquées les unes dans les autres ou sont elles éloignées les unes des autres? Là est la question de David HILBERT¹⁰ qui reste à ce jour sans réponse.

Dans la recherche d'une solution au XVI^e problème de HILBERT, une question naturelle est de se demander si l'on peut compter le nombre de composantes connexes d'une courbe algébrique dans l'espace \mathbb{RP}^2 (dans lequel il est plus facile de travailler (car il est compact) et de visualiser les résultats). En réalité, les compter est une tâche complexe dans le cas général. Le meilleur résultat dont nous disposons est dû à Axel HARNACK, qui en 1876 détermina une majoration optimale du nombre de composante connexe d'une telle courbe en fonction de son degré.

Théorème 2.2.1. *Une courbe algébrique non singulière de \mathbb{RP}^2 de degré d a au plus $g(d) + 1$ composantes connexes, où $g(d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Cette majoration est **optimale**.*

10. Plus exactement, il déclare dans son discours de 1900 qu'une "[...] étude approfondie des positions relatives des branches séparées dans le cas de leur nombre maximum me semble présenter un grand intérêt, et il en est de même de la recherche analogue relative au nombre, à la forme et à la position relative des nappes d'une surface algébrique dans l'espace."

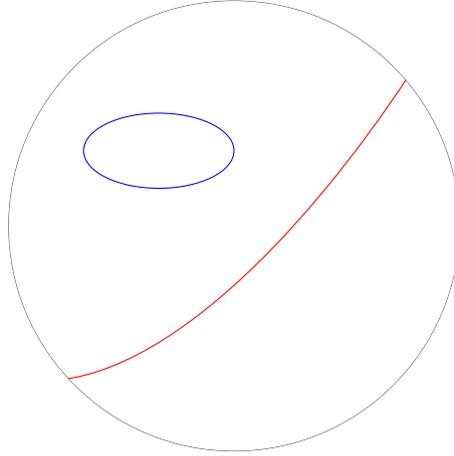


FIGURE 2 – Représentation dans \mathbb{RP}^2 d'un ovale (en bleu) et d'une pseudo-droite (en rouge).

2.2.1 Démonstration du théorème

Avant de démontrer le premier point du théorème, introduisons quelques éléments et propriétés. On appelle cercle dans \mathbb{RP}^2 l'image du cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ par une application injective. Si $S \subset \mathbb{RP}^2$ est un cercle, alors deux possibilités se présentent.

- $\mathbb{RP}^2 \setminus S$ a deux composantes connexes, l'une homéomorphe à un disque ouvert (l'intérieur), et l'autre à une bande de MÖBIUS (l'extérieur). On dit alors que S est un *ovale*.
- $\mathbb{RP}^2 \setminus S$ a une composante connexe, homéomorphe à un disque ouvert. On dit alors que S est une *pseudo-droite*.

Soit $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ la carte canonique en tant que variété réelle (on peut se restreindre à \mathbb{S}^2 au départ). Alors, $\pi^{-1}(S)$ a deux composantes connexes lorsque S est un ovale, et une seule sinon.

Proposition 2.2.1. *Soit C une courbe algébrique réelle plane non singulière de degré d .*

- *Si d est pair, alors les composantes connexes de C sont des ovals.*
- *Si d est impair, alors toutes les composantes connexes de C sont des ovals, sauf une seule qui est une pseudo-droite*

Démonstration. Soit F le polynôme homogène en trois variables de degré d définissant C . On montre d'abord que C ne possède au plus qu'une seule pseudo-droite parmi ses composantes connexes. Supposons qu'elle en possède au moins deux, et considérons-en deux. Puisque C est une courbe non singulière, ces deux pseudo-droites ne peuvent pas s'intersecter. Or, le complémentaire dans \mathbb{RP}^2 d'une de ces deux courbes est homéomorphe à \mathbb{R}^2 . L'autre courbe (considérée dans \mathbb{R}^2) est compacte. En appliquant le théorème de JORDAN, on obtient que son complémentaire a deux composantes connexes. C'est un ovale.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^2$ un chemin transverse à $\pi^{-1}(C)$ (*i.e* qu’aucune de leurs tangentes ne se confondent) et reliant deux antipodes de la sphère \mathbb{S}^2 . Soit alors K une composante connexe de C .

- Si K est un ovale, alors γ intersecte $\pi^{-1}(K)$ en un nombre pair de points.
- Si K est une pseudo-droite, alors γ intersecte $\pi^{-1}(K)$ en un nombre impair de points.

Or, en étudiant le signe de F le long de γ , on observe que C possède une pseudo-droite parmi ses composantes connexes *si et seulement si* F a des signes opposés à des points antipodaux, *si et seulement si* d est impair.

□

On peut maintenant démontrer le théorème de HARNACK. Supposons que $d > 2$ et soit C une courbe algébrique non singulière dans \mathbb{RP}^2 de degré d . On peut supposer que C est irréductible puisque $g(d_1) + 1 + g(d_2) + 1 \leq g(d_1 + d_2) + 1$ dès lors que $d_1 > 1$ ou $d_2 > 1$.

On suppose par l’absurde que C possède au moins $g(d) + 2$ composantes connexes. Si l’on note $p = g(d) + 1$, alors C a parmi ses composantes connexes p ovales $(\Omega_1, \dots, \Omega_p)$, et au moins une autre composante connexe. Choisissons $\frac{1}{2}d(d-1) - 1$ points dans C . Puisque $\frac{1}{2}d(d-1) - 1 \geq g(d) + 1$ lorsque $d > 2$, on choisit exactement un point dans chaque ovale Ω_k , et le reste dans une autre composante connexe de C . Il existe alors une courbe D de degré $d-2$ passant parmi ces $\frac{1}{2}d(d-1) - 1$ points¹¹. Puisque C est irréductible et que D est de degré $d-2 < d$, C et D n’ont aucune composante irréductible commune. Le théorème de BÉZOUT affirme donc qu’avec multiplicité, le nombre de points d’intersections n’excède pas $d(d-2)$. Si D intersecte un ovale Ω_k en un point de multiplicité 1, alors nécessairement D intersecte Ω_k en un autre point. En effet, $\mathbb{RP}^2 \setminus \Omega_k$ n’est pas connexe, donc D ne peut pas intersecter C en un seul point¹². On dénombre donc au moins $\frac{1}{2}d(d-1) - 1 + g(d) + 1 = (d-1)^2$ points d’intersections, donc strictement plus que $d(d-2)$.

Notons que nous avons seulement montrer la première partie du théorème. Il est nécessaire de démontrer que la borne proposée par A. HARNACK est optimale. Pour cela, on introduit la géométrie tropicale.

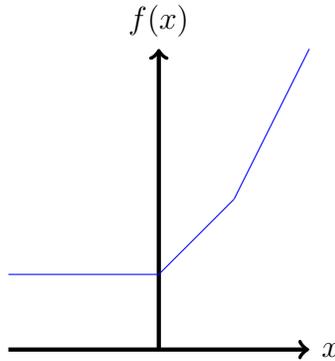
3 Géométrie tropicale

Nous allons maintenant introduire l’outil *majeur* de ce rapport, qu’est la géométrie tropicale. Ce domaine de la géométrie est relativement récent puisque sa théorie a été consolidé dans les années 90. On doit ses prémices aux travaux de Victor MASLOV, mais aussi à ceux de Maxim KONTSEVICH et Grigory MIKHALKIN. Le terme tropical n’a pour autant rien à nous rappeler de vacances au soleil, mais vient (selon la légende) de la nationalité brésilienne de Imre SIMON, pionnier des mathématiques tropicales.

La géométrie tropicale est une sorte de géométrie duale à la géométrie algébrique que nous avons étudiée jusque là. Cette géométrie s’opère dans le semi-corps $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (appelé *ensemble des nombres tropicaux*) muni d’opérations totalement différentes de notre habitude. On va définir les opérations suivantes.

11. La dimension de l’espace des courbes dans \mathbb{RP}^2 correspond à la “dimension” de l’espace des polynômes homogènes à trois variables de degré d . Cette dimension est $\frac{1}{2}(d-2)(d+1)$.

12. En quelque sorte, la courbe D doit entrer et sortir de l’ovale.

FIGURE 3 – $f(x) = “1 + 1x + 3x^2”$.

- (*Addition tropicale*). Pour tout $a, b \in \mathbb{T}$, $a \oplus b = \max(a, b)$.
- (*Multiplication tropicale*). Pour tout $a, b \in \mathbb{T}$, $a \otimes b = a + b$, avec la convention $-\infty + a = -\infty$.

L'opération \otimes est bien évidemment commutative, a pour neutre 0, et tout élément $a \in \mathbb{T}$ différent de $-\infty$ possède pour inverse l'élément $-a$. L'opération \oplus a pour neutre l'élément $-\infty$, mais aucun élément n'a d'inverse pour l'opération \oplus . La structure $(\mathbb{T}, \oplus, \otimes)$ est alors un *semi-corps*. Qu'à cela ne tienne, nous travaillerons tout de même sur \mathbb{T} . À partir de maintenant, et jusqu'à la fin de ce rapport nous n'utiliserons plus ces notations. À la place, nous noterons entre guillemets les calculs, par exemples :

$$\max(0, 1) = “0 + 1” \quad \text{et} \quad 2 + 5 = “2 \times 5”.$$

3.1 Polynômes à coefficients dans \mathbb{T}

3.1.1 ... à une variable

Avec ces nouvelles opérations, on peut s'intéresser à des fonctions polynomiales à coefficients dans \mathbb{T} . On travaillera surtout avec des fonctions polynomiales, par exemple une fonction $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ définie pour tout $x \in \mathbb{T}$ par

$$f(x) = “ \sum_{k=0}^d a_k x^k ”.$$

Moralement, un polynôme¹³ tropical est un maximum de fonctions affines, *i.e* que pour tout $x \in \mathbb{T}$,

$$f(x) = \max_{k=0}^d (a_k + kx).$$

Exemple. Ces polynômes ont clairement l'avantage d'être plus simple à étudier que les polynômes classiques (ce sont des fonctions convexes affines par morceaux).

13. Par souci de simplicité, on confondra polynôme et fonction polynomiale.

Pour parler de polynôme, on veut bien évidemment parler des racines des ces dits polynômes. Or, si l'on utilise la définition classique d'une racine en demandant qu'une racine a d'un polynôme tropical P est un point tel que $P(a) = -\infty$ (le neutre de l'addition tropicale), on rencontre un énorme problème. En effet, si on dispose d'une fonction polynomiale tropicale définie par $f(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$, alors $f(x) \geq a_0$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. Autre approche : utiliser la définition équivalente dans le cas classique où a est une racine de P , *i.e* écrire P sous la forme $P = (X - a)Q$.

Définition 3.1.1. Soit $P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$ un polynôme tropical, et $x_0 \in \mathbb{T}$. On dit que x_0 est une racine s'il existe un polynôme tropical Q tel que pour tout $x \in \mathbb{T}$,

$$P(x) = (x + x_0)Q(x).$$

Remarque. x_0 est une racine si et seulement s'il existe $i \neq j$ deux indices tel que

$$P(x_0) = a_i x_0^i = a_j x_0^j,$$

i.e que $P(x_0) = a_i + i x_0 = a_j + j x_0$. On définit la multiplicité de la racine x_0 comme le maximum des $|i - j|$ où i et j sont deux indices réalisant le maximum en x_0 . Graphiquement, une racine s'interprète comme le lieu d'un changement de pente de la fonction. Conséquence immédiate : tout polynôme tropical non constant a au moins une racine dans \mathbb{T} .

3.1.2 ... à deux variables

Comme on peut s'y attendre, on définit un polynôme en deux variables comme une fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ par

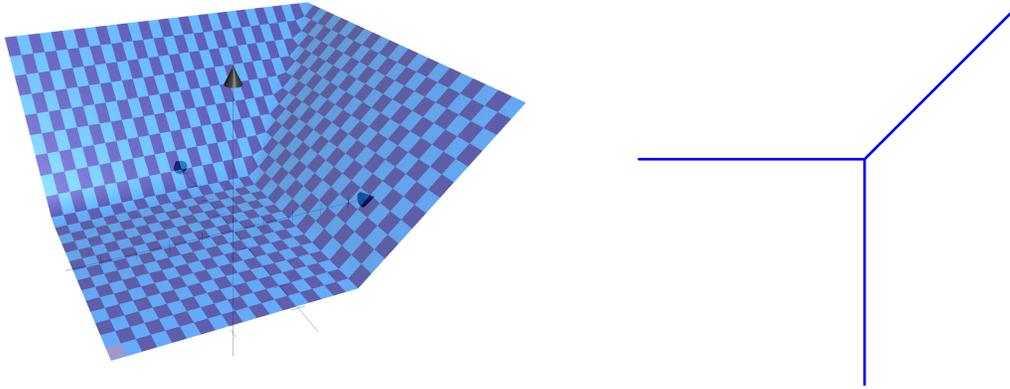
$$P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j = \max_{i,j} (a_{i,j} + ix + jy)$$

où les indices i et j sont des entiers naturels parcourant un ensemble fini. De la même manière que précédemment, on définit une racine d'un polynôme tropical en deux variables. On appellera *degré* du polynôme P le maximum des $i + j$ où $a_{i,j} \neq -\infty$.

Définition 3.1.2. Soit $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ un polynôme tropical en deux variables. Un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est dit être une racine de P s'il existe $(i, j) \neq (k, l)$ deux paires d'indices telles que

$$P(x_0, y_0) = a_{i,j} x_0^i y_0^j = a_{k,l} x_0^k y_0^l.$$

Il est équivalent de définir une racine comme un point de \mathbb{R}^2 en lequel P n'est pas différentiable. Par exemple, on observe en figure 4a que cette surface n'est pas \mathcal{C}^1 en certaines demi-droites, représentées en figure 4b. Déterminons la courbe V représentée en figure 4b en utilisant la définition. Soit $P(x, y) = x + y + 1$. Le polynôme P est défini par les trois



(a) Plan tropical d'équation $z = "x + y + 1"$. (b) Droite tropicale d'équation $"x + y + 1"$.

FIGURE 4

monômes $"x"$, $"y"$, et $"1"$. Soit alors $(x_0, y_0) \in V$ une racine tropicale de P . On a trois possibilités.

- (i) $P(x_0, y_0) = "x_0" = "y_0"$, et donc $x_0 = y_0 \geq 1$.
- (ii) $P(x_0, y_0) = "x_0" = "1"$, et donc $x_0 = 1 \geq y_0$.
- (iii) $P(x_0, y_0) = "y_0" = "1"$, et donc $y_0 = 1 \geq x_0$.

On en déduit que le point (x_0, y_0) appartient à une des trois demi-droites définies ci-dessus. On vérifie de même que ces trois demi-droites constituent l'entièreté de la courbe V . On en déduit que les racines tropicales de P sont exactement la figure 4b.

Remarques. Désignons par V l'ensemble des racines d'un polynôme tropical P . Le mérite de ce nouveau type de courbe que nous introduisons ici est qu'elles sont affines par morceaux. Une "courbe tropicale" est en fait composée de segments, de demi-droites, et de sommets qui rejoignent les segments et demi-droites (appelés arêtes). Cette terminologie vient du fait que la courbe V est un graphe¹⁴

Définition 3.1.3 (poids d'une arête). *On appelle poids d'une arête de V le plus grand pgcd des nombres $|i - j|$ et $|k - l|$ pour toutes paires (i, j) et (k, l) telles que la valeur de P sur cette arête est atteinte en les monômes de coordonnées (i, j) et (k, l) .*

Remarques. On appelle alors *courbe* tropical le graphe pondéré V .

3.1.3 Courbe duale

Dans tout corps valué, on peut définir un polygone de NEWTON associé à un polynôme. Avec ce polygone, il est possible d'étudier des propriétés d'un polynôme uniquement en observant les propriétés d'un polygone dans \mathbb{R}^2 . Nous allons définir de même le polygone de

14. Un résultat fondamental indique que les courbes tropicales sont exactement les graphes pondérés équilibrés.

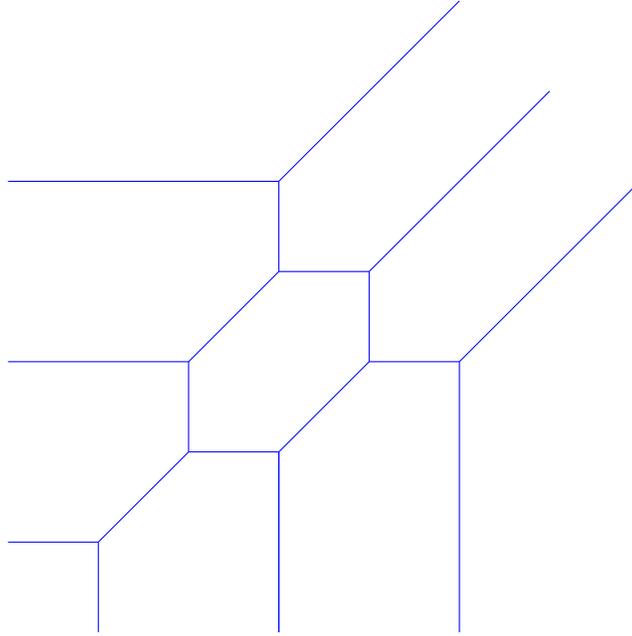


FIGURE 5 – Une cubique tropicale

NEWTON d'un polynôme tropical.

Définition 3.1.4. Soit $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ un polynôme tropical. On appelle **subdivision duale** de P (ou polygone de NEWTON) l'ensemble $\Delta(P) \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$\Delta(P) = \text{Conv}\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid a_{i,j} \neq -\infty\}.$$

Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\Delta_{(x_0, y_0)} = \text{Conv}\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid P(x_0, y_0) = a_{i,j} x_0^i y_0^j\} \subset \Delta(P).$$

Remarques. Si (x_0, y_0) est une racine de P , alors $\Delta_{(x_0, y_0)}$ ne dépend que de l'arête à laquelle elle appartient. Ainsi, si e est une arête de la courbe V telle que $(x_0, y_0) \in e$, on notera $\Delta_e = \Delta_{(x_0, y_0)}$. Les $\Delta_{(x,y)}$ forment en fait une subdivision de $\Delta(P)$, appelée **subdivision duale** de P .

Exemples. Les figures 6 et 7 sont des exemples de courbes tropicales de degré 3 ainsi que de leur subdivision duale respective.

Remarques complémentaires. On peut lire sur la subdivision duale d'une courbe tropicale des informations sur la structure de la dite courbe. Par convention, on représente toujours les points à coordonnées entières dans une subdivision duale.

- Un sommet est dual à un triangle minimal (*i.e* ne contenant strictement aucun autre triangle).



FIGURE 6 – Subdivision duale d'une cubique tropicale

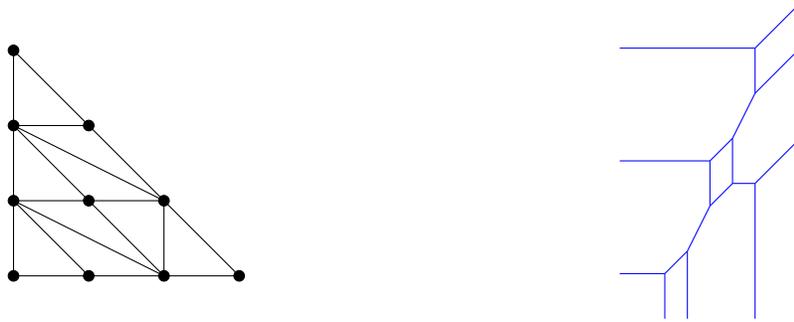


FIGURE 7 – Autre subdivision duale d'une autre cubique tropicale

- Une arête est duale à un segment reliant plusieurs points. On peut même lire le poids de l'arête sur cette division duale. En effet, une arête e a pour poids w si et seulement si

$$\text{card}(\Delta_e \cap \mathbb{Z}^2) - 1 = w.$$

Le poids d'une arête est le nombre de points que relie son segment dual, moins un.

- Une arête est orthogonale à son segment dual.

Une courbe tropicale est donnée par sa subdivision duale, à translation et longueur des arêtes près.

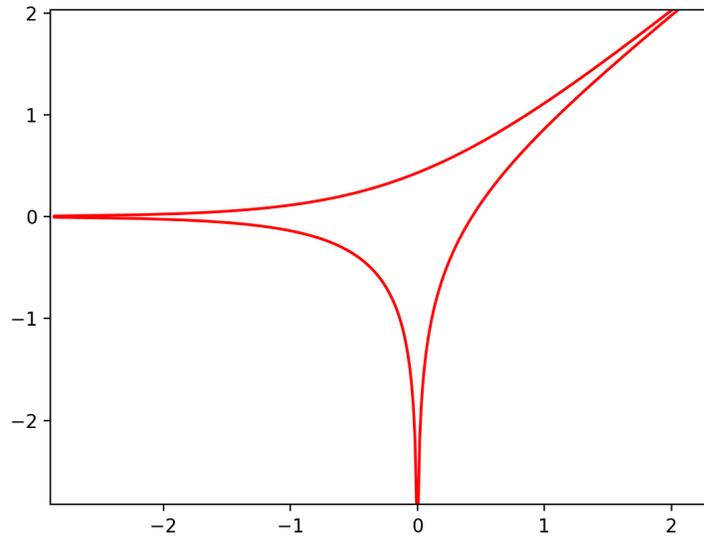
3.1.4 Amibes

Soit $t > 1$. On pose

$$L_t : \begin{cases} (\mathbb{R}^*)^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z, w) & \longmapsto (\log_t |z|, \log_t |w|). \end{cases}$$

Si $V \subset (\mathbb{R}^*)^2$, alors on définit l'amibe de V en base t comme le sous-ensemble $L_t(V) \subset \mathbb{R}^2$. On trouvera en figure 8 l'amibe en base 10 de la droite d'équation $x + y + 1$.

Étudions l'effet de la variable $t > 1$: soit C_t l'amibe en base $t > 1$ de la droite d'équation $x + y + 1 = 0$. Lorsque t augmente, les amibes se contractent (figure 9) et l'on observe que la courbe C_t se contracte en une droite tropicale (d'équation " $x + y + 0$ "). D'une droite algébrique, nous avons construit une droite tropicale. Ce fait peut être vu comme conséquence

FIGURE 8 – Amibe en base 10 de la droite d'équation $x + y + 1 = 0$

du théorème suivant. On rappelle qu'on définit la distance de HAUSDORFF comme suit : si A et B sont deux fermés bornés non vides de \mathbb{R}^2 , alors on pose

$$d(A, B) = \max \left(\sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b), \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) \right)$$

où d désigne la distance euclidienne sur \mathbb{R}^2 .

Théorème 3.1.1. Soit $(P_t(X, Y))_{t>1} = \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j}(t) X^i Y^j \right)_{t>1}$ une famille de polynômes tels que leurs coefficients soient fonctions de $t > 1$, $\alpha_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Soit de plus $(\beta_{i,j})_{i,j}$ une famille d'éléments de \mathbb{T} , et $(\gamma_{i,j})_{i,j}$ de \mathbb{C}^* . On suppose que pour tous indices i, j , on a

$$\alpha_{i,j}(t) \sim_{t \rightarrow \infty} \gamma_{i,j} t^{\beta_{i,j}}.$$

Pour tout $t > 1$, on note \mathcal{C}_t le lieu des zéros du polynôme algébrique P_t . Alors, les amibes en base $t > 1$, $L_t(\mathcal{C}_t)$ convergent sur tout compact pour la distance de HAUSDORFF vers la courbe tropicale définie par le polynôme tropical

$$P_{\text{trop}}(x, y) = \sum_{i,j} \beta_{i,j} x^i y^j.$$

Remarque. Ce théorème expose une forte dualité entre géométrie algébrique et tropicale. Nous cherchons surtout un lien inverse : peut-on construire des courbes algébriques à par-

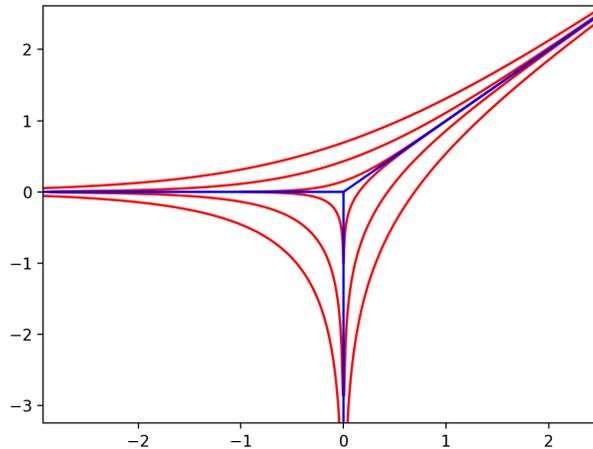


FIGURE 9 – En bleue, la droite tropicale d'équation “ $x + y = 0$ ”. En rouge, les amibes de l'extérieur vers l'intérieur en base e , 5, et 10 de la droite d'équation $x + y = 1$.

tir de courbes tropicales? Bien évidemment, ce lien doit nous permettre de construire des courbes algébriques maximales de tout degré pour terminer la démonstration du théorème de HARNACK.

3.2 Patchwork

3.2.1 Définitions

Définissons désormais ce qu'est une courbe non-singulière dans le cas tropical.

Définition 3.2.1. Une courbe tropicale dans \mathbb{R}^2 est dite non singulière lorsque sa subdivision duale est uniquement composée de triangle d'aire euclidienne $\frac{1}{2}$.

Il est équivalent de demander que le nombre de sommets de la courbe tropicale soit le double de l'aire euclidienne de $\Delta(P)$.

Définition 3.2.2 (twist-admissible). Soit C une courbe tropicale non singulière. Une famille T de segments de C est dite être “**twist-admissible**” si pour tout cycle γ de C , si e_1, \dots, e_k désignent les éléments de $\gamma \cap T$, et (u_i, v_i) est un vecteur d'entiers premiers entre eux dans la direction de e_i ($1 \leq i \leq k$),

$$\sum_{i=1}^k (u_i, v_i) \equiv 0 \pmod{2}.$$

3.2.2 Méthode

Soit C un courbe tropicale non singulière. On choisit d'abord une famille T "twist-admissible" (nous détaillerons plus tard l'importance du choix de T). À chaque sommet de C , on dessine trois arcs comme dans l'exemple suivant.

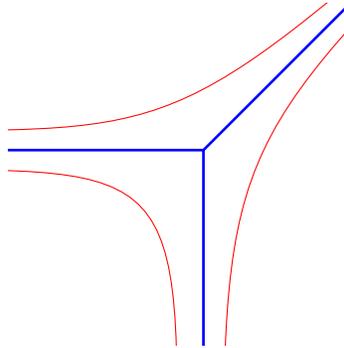
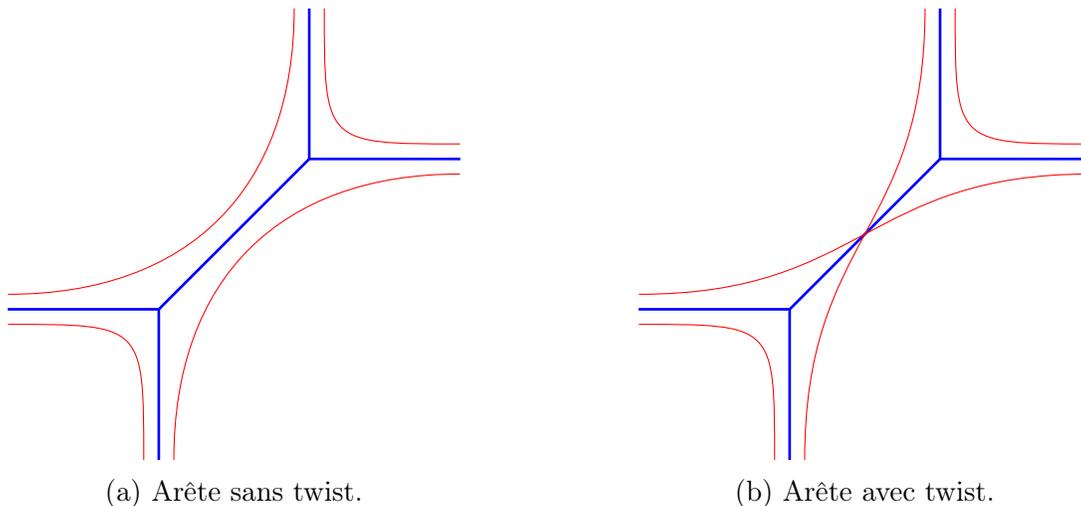


FIGURE 10

On relie ensuite ces arcs de la manière suivante : si deux arcs se rejoignent autour d'une arête "twist-admissible", on croise les arcs. Sinon, on les relie sans passer par l'arête.



(a) Arête sans twist.

(b) Arête avec twist.

FIGURE 11

On a dessiné "autour" de C une amibe. Notons \mathcal{A} cette amibe. On choisit arbitrairement une composante connexe de \mathcal{A} et on lui associe une paire de signes. On attribue ensuite de proche en proche des paires de signes à chaque composante connexe. On procède pour cela de la même manière : deux composantes connexes ont entre elles une certaine arête e . Si (u, v) désigne une paire d'entiers premiers entre eux dans la direction de e , alors les paires de signes des deux différentes composantes connexes diffèrent par un facteur¹⁵ $((-1)^u, (-1)^v)$.

Enfin, on transforme l'amibe en courbe algébrique. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ désigne la paire de signe d'une composante connexe, on fait passer la dite composante connexe par l'application

15. Cette règle est cohérente grâce à la condition de twist-admissibilité.

$(x, y) \mapsto (\varepsilon_1 e^x, \varepsilon_2 e^y)$. L'union des images des composantes connexes forment alors une courbe (pas vraiment algébrique) qui dessine l'arrangement d'une courbe algébrique.

3.2.3 Construction de courbes maximales

Définition 3.2.3. Soit C une courbe tropicale, et T une famille d'arêtes "twist-admissible" de C . On dit que T est de **type I** si tout cycle de C contient un nombre pair d'éléments de T . On dira de plus que T est **maximal** si pour toute arête $e \in T$, $C \setminus \{e\}$ n'est pas connexe, ou s'il existe $e' \in T$ tel que $C \setminus \{e\}$ et $C \setminus \{e'\}$ sont connexes, mais $C \setminus \{e, e'\}$ ne l'est pas.

Exemple. Une famille vide est non seulement de type I, mais aussi maximale.

On arrive enfin à démontrer la dernière partie du théorème de HARNACK : il existe pour chaque degré des courbes algébriques réelles maximales. L'introduction de familles d'arêtes "twist-admissibles" maximales permet de préciser la qualité des courbes convergentes. Ce théorème dû à Bertrand Haas¹⁶ est le suivant.

Théorème 3.2.1. ??

Soit C une courbe tropicale non singulière, et T une famille d'arêtes "twist-admissible" de C . Soit $(C_t)_{t>1}$ une famille de courbes algébriques réelles convergeant vers C au sens du théorème 3.1.1. Alors, les courbes C_t sont toutes maximales à partir d'un certain $t_0 > 1$ si et seulement si T est maximale.

En réalité, on a déterminé là des courbes maximales dans \mathbb{R}^2 . Pour rappel, le théorème de HARNACK s'applique dans \mathbb{RP}^2 . Cet espace étant identifié à un disque de \mathbb{R}^2 , où les bords se rejoignent par identification des antipodes. Notons $P = \sum_{i+j=0}^d a_{i,j} X^i Y^j$ un polynôme (algébrique) dont la courbe algébrique associée est maximale de degré d . On pose alors

$$Q(X, Y, Z) = \sum_{i+j=0}^d a_{i,j} X^i Y^j Z^{d-i-j}$$

l'homogénéisé de P . Notons C le lieu d'annulation de P dans \mathbb{R}^2 et Γ celui de Q dans \mathbb{RP}^2 . On remarque que

$$\Gamma = \{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid Q(x, y, z) = 0\} = \{[x : y : 1] \in \mathbb{RP}^2 \mid (x, y) \in \Gamma\}.$$

En fait, on a la carte affine $[x : y : z] \mapsto (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$ sur $\{[x : y : z] \in \mathbb{RP}^2 \mid z \neq 0\}$, ce qui permet de transporter la courbe algébrique de P .

16. dans sa thèse produite en 1997.

3.3 Note historique

Axel HARNACK, dans la démonstration de son théorème en 1876 propose déjà une construction de courbes maximales pour tout degré¹⁷. La méthode du patchworking est plus récente, et n'est originellement pas formulé dans le cadre de la géométrie tropicale. Elle est inventé par le mathématicien russe Oleg VIRO, et lui permet de classifier toutes les courbes algébriques planes de degré 7 dans \mathbb{RP}^2 .

Le patchworking permettra plus tard à Oleg VIRO et Ilia ITENBERG de générer des contre-exemples à la conjecture de RAGSDALE ([ItVir]). Dans une courbe algébrique dans \mathbb{RP}^2 , on appelle ovale paire (*resp.* impair) tout ovale positionné dans un nombre paire (*resp.* impair) d'ovales. Si une courbe de degré pair $m = 2k$ contient p ovales pairs et n impairs, alors Virginia RAGSDALE avait conjecturé que

$$p \leq \frac{3k(k-1)}{2} + 1, \quad n \leq \frac{3k(k-1)}{2}.$$

Une version plus faible de la conjecture de RAGSDALE a néanmoins été démontré par Ivan PETROVSKY.

Enfin, on notera l'apparition récente de la géométrie tropicale dans les domaines suivants.

- Calcul de plus courte distance dans un graphe.
- En théorie des enchères : il apparaît dans les calculs de Paul KLEMPERER produits pour la banque d'Angleterre lors de la crise financière de 2007 une droite tropicale.
- Yoshinori SHIOZAWA a déterminé que la théorie de l'avantage comparatif de David RICARDO pouvait être interprété dans la théorie tropicale.
- Plus généralement, la géométrie tropicale s'applique dans des problèmes d'optimisations.
- Les mathématiques tropicales ont été utilisées en théorie de la criticalité auto-organisée

Références

- [Brug] Erwan BRUGALLÉ, *Un peu de géométrie tropicale*.
<https://arxiv.org/abs/0911.2203>
- [BIMS] Erwan BRUGALLÉ, Ilia ITENBERG, Grigory MIKHALKIN, Kristin SHAW.
<https://arxiv.org/abs/1502.05950>
- [BCR] Jacek BOCHNAK, Michel COSTE, Marie-Françoise ROY, *Real algebraic geometry*, volume 36, chapitre 13.
- [Mir] Rick MIRANDA, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate studies in mathematics volume 5, chapitre 1 & 2.
- [BCR] Ricardo BENEDETTI, Jean-Jacques RISLER, *Real algebraic and semi algebraic-sets*, 1997, chapitre 5.

17. Remarquons que choisir la famille vide comme twist-admissible dans le patchworking produit exactement les courbes de HARNACK.

- [ItVir] Ilya ITENBERG, Oleg VIRO, *Patchworking algebraic curves disproves the RAGSDALE conjecture*, 1996.
- [Haa] B. HAAS, *Real algebraic curves and combinatorial construction*, thèse doctorale, université de Strasbourg, 1997