Université de Rennes 1

HOLO

THÉORIE DE L'HOLOMORPHIE

Dérivation sur $\mathbb{C}$, séries entières, intégrale complexe, théorème intégral de Cauchy, théorie de l'holomorphie, fonctions méromorphes et théorie des résidus.

Auteur
Anna Lenzhen

Notes de cours
Victor Lecerf

2020–2021

Table des matières

Chapitre 1

Dérivabilité complexe

1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite dérivable (ou $\mathbb{C}$-dérivable) en $c \in \mathbb{C}$ si le taux d'accroissement*

$$\frac{f(z) - f(c)}{z - c}$$

admet une limite lorsque z tend vers c. On note dans cette limite $f'(c)$ lorsqu'elle existe.

Exemples.

— Les fonctions constantes sont dérivables en tout point.

— Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$. La fonction f n'est dérivable en aucun point. En effet, pour tout $z, c \in \mathbb{C}$, si $z - c \in \mathbb{R}$, alors

$$\frac{f(z) - f(c)}{z - c} = 1,$$

mais si $z - c \in i\mathbb{R}$, alors

$$\frac{f(z) - f(c)}{z - c} = -1.$$

— Les fonctions $z \mapsto \Re(z)$, $z \mapsto \Im(z)$, $z \mapsto |z|$ ne sont dérivables en aucun point.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ est dérivable.[1]

Théorème 1.1.1. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable en un point $c \in \mathbb{C}$. Alors, f est continue en c.*

1. La fonction dérivée et son calcul sont les mêmes que dans le cas réel.

Convention. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. On pose $u = \Re(f)$ et $v = \Im(f)$, de sorte que $f = u + iv$. On peut alors voir u et v comme des fonctions de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + iy \in D\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *via* l'isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x + iy. \end{array}$$

Proposition 1.1.1 (équations de Cauchy-Riemann)**.** *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$, $c \in D$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable en $\mathbb{C}$. On pose $u = \Re f$ et $v = \Im f$, et $c = a + ib$. Alors, les dérivées partielles de u et v par rapport à x et y existent en c et vérifient*

$$u_x(c) = v_y(c) \text{ et } u_y(c) = -v_x(c).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(c+h) + iv(c+h) - u(c) - iv(c)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(c+h) - u(c)}{h} + i \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{v(c+h) - v(c)}{h} \\ &= u_x(c) + iv_x(c). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+ih) - f(c)}{i} h \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(c+ih) + iv(c+ih) - u(c) - iv(c)}{h} \\ &= -i \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(c+ih) - u(c)}{h} + \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{v(c+ih) - v(c)}{h} \\ &= -iu_y(c) + v_y(c). \end{aligned}$$

□

Lemme 1.1.1 (lien avec la différentiabilité)**.** *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La matrice A définit une application $\mathbb{R}$-linéaire $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\, T(x + iy) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x + a_{1,2}y \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y \end{pmatrix}$$

en confondant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ avec $(x, y) = x + iy$. Alors, T est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $a_{1,1} = a_{2,2}$ et $a_{1,2} = -a_{2,1}$.

Théorème 1.1.2. *Soient D un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow C$, et $c = x_0 + iy_0 \in D$. On note $u = \Re(f)$ et $v = \Im(f)$, et $f_{\mathbb{R}} : D_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application induite de $D_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Sont équivalents :*

(i) La fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en c.

(ii) La fonction $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable en (x_0, y_0) et la différentielle $df_{\mathbb{R}}(x_0, y_0)$ correspond à une application $\mathbb{C}$-linéaire.

(iii) La fonction $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable en (x_0, y_0) et satisfait les équations de CAUCHY-RIEMANN :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Démonstration. — $(i) \implies (ii)$. Si f est dérivable en c, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - hf'(c)}{h}. = 0$$

□

Théorème 1.1.3. *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ \vdots \\ u_n(x, y) \end{pmatrix}.$$

telle que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_i}{\partial y}$ existent sur D et y sont continues. Alors, f est différentiable en tout point de D.

Corollaire 1.1.1 (condition suffisante de $\mathbb{C}$-dérivabilité)**.** *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une application définie sur un ouvert D de $\mathbb{C}$. Si $f_{\mathbb{R}}$ satisfait les hypothèses du théorème précédent avec $n = 2$, et si f satisfait les équations de CAUCHY-RIEMANN, alors f est $\mathbb{C}$-dérivable.*

1.2 Fonctions harmoniques

Définition 1.2.1. *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite harmonique si elle satisfait l'équation de LAPLACE, $\Delta u = 0$.*

Remarque. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\mathbb{C}$-dérivable. Soit u et v ses parties réelles et imaginaires vu comme des application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Alors, si u et v admettent des dérivées partielles secondes, u et v sont harmoniques. On vérifie cela en utilisant le théorème de SCHWARTZ.

1.3 Fonctions holomorphes

Définition 1.3.1. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe en un point $c \in D$ si elle est $\mathbb{C}$-dérivable sur un voisinage de $\mathbb{C}$. Elle est holomorphe sur D si elle est holomorphe en tout point de D.*

Notation. On note $H(D)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur D.

Exemple. La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto x^3y^2 + ix^2y^3$ n'est nulle part holomorphe.

Proposition 1.3.1. *Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes sur D et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a les résultats suivants.*

(i) La fonction $f + \lambda g$ est holomorphe, et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$.

(ii) La fonction fg est holomorphe, et $(fg)' = f'g + fg'$.

(iii) Si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est holormorphe et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(iv) Si $f(D) \subset D'$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et si g est une fonction holomorphe sur D', alors $g \circ f$ est holomorphe sur D, et $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.

Théorème 1.3.1. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Alors, f est holomorphe de dérivée nulle si et seulement si f est localement constante.*

Démonstration. Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, on remarque que $u_x = u_y = 0$ et $v_x = v_y = 0$. Ainsi, u et v sont constantes, donc f aussi. $\square$

Lemme 1.3.1. *Soit T l'application du lemme 1.1.1. Alors, il existe λ et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $h \in \mathbb{C}$,*

$$T(h) = \lambda h + \mu \overline{h}.$$

Il suffit pour cela de poser $\lambda = \frac{1}{2}(T(i) - iT(i))$ et $\mu = \frac{1}{2}(T(1) + iT(i))$.

Définition 1.3.2 (dérivées partielles)**.** *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ différentiable en $c \in D$. Pour tout $h \in \mathbb{C}$, on pose*

$$Tf(c)(h) = \begin{pmatrix} u_x(c) & u_y(c) \\ v_x(c) & v_y(c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re(h) \\ \Im(h) \end{pmatrix}.$$

On définit de plus

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c) = f_x(c) = Tf(c)(1) = u_x(c) + iv_x(c),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(c) = f_y(c) = Tf(c)(i) = u_y(c) + iv_y(c),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(c) = f_z(c) = \lambda = \frac{1}{2}(f_x(c) - if_y(c)),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(c) = f_{\overline{z}}(c) = \mu = \frac{1}{2}(f_x(c) + if_y(c)).$$

Les équations de Cauchy-Riemann *deviennent alors*

$$if_x = f_y.$$

Remarque. Avec cette notation, on remarque que si f est holomorphe en un point $c \in D$, alors

$$f'(c) = \frac{\partial f}{\partial z}(c) = f_x(c) = -if_y(c)$$

ce qui en terme d'opérateurs différentiels par

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Théorème 1.3.2. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-différentiable sur D. Alors, f est holomorphe si et seulement si :*

$$\forall c \in D,\ f_{\overline{z}}(c) = 0.$$

De même, la fonction $\overline{f} = u - iv$ est holomorphe si et seulement si $u_x = -v_y$ et $u_y = v_x$, si et seulement si

$$f_z = 0.$$

Exercice. Montrer que $\overline{f}'(c) = \overline{f_{\overline{z}}}(c)$.

1.4 Conservation des angles

1.4.1 Angles et holomorphie

Soit $w = u + iv$, et $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On munit $\mathbb{C}$ du produit scalaire

$$\langle\, w \,|\, z \,\rangle = ux + vy = \Re(w\overline{z}).$$

En particulier, ce produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall w, z \in \mathbb{C},\ |\langle\, w \,|\, z \,\rangle| \leq |w||z|.$$

Pour $w, z \in \mathbb{C}$, on appelle *mesure angulaire*, ou *angle* entre w et z l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle\, w \,|\, z \,\rangle}{|w||z|}.$$

On note alors $\theta = \angle(w, z)$.

Définition 1.4.1 (application conservant les angles)**.** *Une application $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-linéaire et injective* ***conserve les angles*** *si :*

$$\forall w, z \in \mathbb{C},\ \angle(T(w), T(z)) = \angle(w, z).$$

Lemme 1.4.1. *Soit $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire injective, et de la forme*

$$T : z \longmapsto \lambda z + \mu \overline{h}.$$

Alors, T conserve les angles si et seulement si une et une seule de ces conditions est vérifiée :

(i) $\lambda = 0$.

(ii) $\mu = 0$.

Définition 1.4.2. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Si $f_{\mathbb{R}}$ est différentiable en un point $c \in D$, on dit que f conserve les angles en c si $df_{\mathbb{R}}(c)$ conserve les angles.*

Proposition 1.4.1. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe en un point $c \in D$, et tel que $f'(c) \neq 0$. Alors, f conserve les angles en c. De même, si $\overline{f}$ est holomorphe en c et $\overline{f}'(c) \neq 0$, alors f conserve les angles en c.*

Remarque. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *anti-holomorphe* si $\overline{f}$ est holomorphe. En fait, les seuls applications qui préservent les angles sont les fonctions holomorphes et antiholomorphes dont les dérivées ne s'annulent pas.

Théorème 1.4.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit $f = u + iv : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une application telle que u_x, u_y, v_x, et v_y sont continues. Sont équivalents,*

(i) f est holomorphe sur D et f' ne s'annule pas ***ou*** *(exclusif) f est antiholomorphe et $\left(\overline{f}\right)'$ ne s'annule pas.*

(ii) f conserve les angles en c.

1.4.2 Point de vu géométrique sur la conservation des angles

Soit D un ouvert $\mathbb{C}$, et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit $a < b$ des réels, et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto x(t) + iy(t)$. L'application γ est différentiable en $t_0 \in]a, b[$ si $x'(t_0)$ et $y'(t_0)$ existent. On a alors $\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$. Soit $c = (x_0, y_0) \in D_{\mathbb{R}}$, point en lequel on suppose $f_{\mathbb{R}}$ différentiable. Soit $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

l'application $\mathbb{R}$-linéaire qui correspond à $df_{\mathbb{R}}(c)$. On suppose de plus que $y'(t_0) = x_0 + iy_0$. On a alors pour tout $t \in [a, b]$,

$$u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t)),$$

et la dérivée

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = u_x(c)x'(t_0) + u_y(c)y'(t_0) + iv_x(c)x'(t_0)y'(t_0) = T(\gamma'(t_0)).$$

1.5 Applications biholomorphes

Définition 1.5.1. *Soient D et D' deux ouverts de $\mathbb{C}$, et $f : D \longrightarrow D'$. L'application f est dite **biholomorphe** si f est bijective, et f et f^{-1} sont holomorphes.*

Remarque. En fait, il suffit que f soit holomorphe et bijective pour qu'elle soit biholomorphe.

Exemple. À toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

telle que $(c, d) \neq (0, 0)$, on lui associe l'application $h_A : z \longmapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\}$, dont la dérivée est pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\}$,

$$h'_A(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}.$$

On remarque alors que h_A est constante *si et seulement si* $\det A = 0$. On ne considèrera donc que les matrices de $GL_2(\mathbb{C})$. On remarque plusieurs propriétés.

(i) $GL_2(\mathbb{C})$, muni du produit matriciel, est un groupe.

(ii) Les matrices $A \in GL_2(\mathbb{C})$ telles que $h_A = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ sont les multiples non nuls de I_2.

(iii) Pour tout $A, B \in GL_2(\mathbb{C})$, on a $h_{AB} = h_A \circ h_B$.

Retournons donc à nos fonction biholomorphes. Soit $A \in GL_2(\mathbb{C})$. Si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

alors $h_A(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, h_A est clairement un biholomorphisme.

1.6 Automorphismes

Définition 1.6.1. *Soit $f : D \longrightarrow D'$ un biholomorphisme. On dit que f est un automorphisme de D lorsque $D = D'$. On note $\mathrm{Aut}(D)$ l'ensemble des automorphismes de D.*

Remarques et exemples.

— $(\mathrm{Aut}(D), \circ)$ est un groupe.

— Les applications de la forme $z \longmapsto az + b$ sont des automorphismes de $\mathbb{C}$.

— *Automorphismes de* $\mathbb{H}$. On rappelle la notation $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im(z) > 0\}$. De plus, on note $GL_2^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminant strictement positif. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{R}).$$

On a après conjugaison du dénominateur, pour tout $z = x + iy \in \mathcal{H}$,

$$h_A(z) = \frac{(ax+b)(cx+d) + acy^2 + i(ad - bc)y}{(cx+d)^2 + c^2y^2}.$$

On remarque alors que $\Im(h_A(z)) > 0$. Ainsi, h_A à valeurs dans $\mathbb{H}$. Or, nous avons montré que pour toute matrice de $GL_2^+(\mathbb{R})$, h_A est un biholomorphisme, et donc *a fortiori* dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Enfin, puisque que deux matrices colinéaires définissent la même application, on peut déduire que l'application

$$\begin{array}{ccc} SL_2^+(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \\ A & \longmapsto & h_A \end{array}$$

est un morphisme de groupes injectif. Il est même surjectif, ce qui démontré tard.

Chapitre 2

Développement en série entière

2.1 Rappels et compléments sur les types de convergence

2.1.1 Types de convergence sur les suites de fonctions

Soit $X \subset \mathbb{C}$.

Convergence simple

Définition 2.1.1 (convergence simple)**.** *Soit $A \subset \mathbb{C}$, et $(f_n)_n \in \mathscr{F}(A, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* ***simplement*** *sur A si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Remarque.

— Cette convergence est celle de la topologie produit.

— La convergence simple ne converse pas la continuité. Voir par exemple la suite $(x \longmapsto x^n)_n$ sur $A = [0, 1]$.

Convergence uniforme

Définition 2.1.2 (convergence uniforme)**.** *Soit $A \subset X$. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_n \in \mathscr{F}(X, C)^{\mathbb{N}}$ converge* ***uniformément*** *sur A vers $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On note pour tout $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $\|f\|_A = \sup_{x\in A} |f(x)|$. C'est une semi-norme sur l'espace des fonctions $X \longrightarrow \mathbb{C}$ bornées sur A.

Remarque. Ainsi, $(f_n)_n$ converge vers f sur A *si et seulement si* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0$.

Convergence localement uniforme

Définition 2.1.3 (converge localement uniforme)**.** *Une suite de fonction* $(f_n)_n \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ *converge* ***localement uniformément*** *sur* X *vers une fonction* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$*, si pour tout* $x \in Xn$ *il existe un voisinage* U_x *de* x *dans* X *tel que* $\left(f_{n|_{U_x}}\right)_n$ *converge uniformément vers* $f_{|_{U_x}}$.

Convergence sur tout compact

Définition 2.1.4 (convergence sur tout compact)**.** *Une suite de fonction* $(f_n)_n \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ *converge* ***sur tout compact*** *de* X *si... elle converge uniformément sur tout compact de* X.

Remarque. Cette convergence est équivalente à la convergence localement uniforme si X est localement compact (par exemple, lorsque X est un ouvert).

2.1.2 Critères de convergence

Définition 2.1.5. *Soit* $X \subset \mathbb{C}$ *et* $(f_n)_n \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions. Soit* $A \subset X$*. On dit que la suite* $(f_n)_n$ *est de* Cauchy *sur* A *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, \, \|f_p - f_q\|_A \leq \varepsilon.$$

Théorème 2.1.1. *Soit* $X \subset \mathbb{C}$ *et* $(f_n)_n \in \mathscr{F}(X, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions. Soit* $A \subset X$*. La suite* $(f_n)_n$ *est de* Cauchy *sur* A *si et seulement si elle converge uniformément sur* A.

2.2 Séries entières

Définition 2.2.1 (série entière)**.** *Soit* $c \in \mathbb{C}$*. On appelle* ***série entière*** *centrée en* c *toute série entière de terme générale* $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \, z \mapsto a_n(z-c)^n$*, où* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une suite de complexes.*

Notation. On la note[1] $\sum a_n(z-c)^n$.

Définition 2.2.2. *Une série entière centrée en* c *est dite convergente si elle converge en au moins un autre point que* c.

1. de manière abusive

Lemme 2.2.1 (Abel)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $s > 0$ tel que $(a_n s^n)_n$ soit bornée. Alors, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\mathcal{B}(0, s)$.*

Démonstration. Soit M un majorant de $(a_n s^n)_n$. Soit $r \in]0, s[$. Alors, pour tout $z \in \mathcal{B}(0, r)$,

$$|a_n z^n| < |a_n|\ s^n \left(\frac{r}{s}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Puisque $r/s \in]0, 1[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\mathcal{B}(0, s)$.

□

Corollaire 2.2.1. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Si $\sum a_n z^n$ est une série entière convergeant z_0, alors la série converge normalement sur $\mathcal{B}(0, |z_0|)$.*

Démonstration. Appliquer le lemme d'Abel avec $s = |z_0|$ et $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n||z_0|^n$.

□

Théorème 2.2.1. *Soit $\sum a_n(z - c)^n$ une série entière centrée en un point $c \in \mathbb{C}$. Soit*

$$R = \sup \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n t^n| < \infty \right\}.$$

Alors,

(i) $\sum a_n(z - c)^n$ converge normalement sur $\mathcal{B}(c, R)$...

(ii) ...mais diverge grossièrement en tout point de $\mathbb{C}\backslash\mathcal{B}_f(c, R)$.

Démonstration. (i) Application du lemme d'Abel.

(ii) Utiliser la définition de R.

□

Remarque. Sur le disque $D(c, R)$, il n'y a pas de résultat général, ni sur le lieu de convergence, ni sur le mode de convergence.

Définition 2.2.3. *Soit $\sum a_n(z - c)^n$ une série entière centrée en un point $c \in \mathbb{C}$. On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n(z - c)^n$ la quantité*

$$R = \sup \left\{ t \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n t^n| < \infty \right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Théorème 2.2.2 (Cauchy-Hadamard)**.** *Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n(z - c)^n$. Alors,*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Théorème 2.2.3 (règle de D'ALEMBERT)**.** *Soit* $\sum a_n(z-c)^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \neq 0$. *On suppose que la suite* $(a_n)_n$ *ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors,*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Exemples.

— La série géométrique $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1, et diverge sur le disque unité. Sa somme est la fonction $\mathcal{B}(0,1) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1-z}$.

— La série entière $\sum n^{-n} z^n$ a un rayon de convergence infini (règle d'HADAMARD)

— La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini (règle de D'ALEMBERT), et converge normalement vers l'exponentielle [2]

2.2.1 Holomorphie des séries entières

Lemme 2.2.2. *Soit* $\sum a_n(z-c)^n$ *une série entière centrée en* $c \in \mathbb{C}$, *de rayon de convergence* $R > 0$. *Alors, la série dériv"ée* $\sum n a_n (z-c)^{n-1}$ *et la série primitive* $\sum \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1}$ *ont aussi* R *pour rayon de convergence.*

Proposition 2.2.1. *Si la série entière* $\sum a_n(z-c)^n$ *a un rayon de converge* $R > 0$, *alors sa somme* f *est infiniment* $\mathbb{C}$*-dérivable dans* $\mathcal{B}(c,R)$. *De plus :*

$$\forall k \in \mathbb{N},\, \forall z \in \mathcal{B}(c,R),\; f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-c)^{n-k}.$$

Démonstration. Montrons ce résultat pour $c = 0$ et $k = 1$. Soit $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ pour tout $z \in \mathcal{B}(0,R)$. Selon le lemme précédent, g est bien défini. Montrons alors que f est bien $\mathbb{C}$-dérivable et que $f' = g$. Soit $b \in \mathcal{B}(0,R)$, alors,

$$\begin{aligned} f(z) - f(b) &= \sum_{n=1} a_n (z^n - b^n) \\ &= (z-b) \sum_{n=1} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^j b^{n-1-j} \right) \end{aligned}$$

Soit alors $f_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} z^j b^{n-1-j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathcal{B}(0,R)$. Montrons que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathcal{B}(0,R)$. Soit $r \in \mathcal{B}(0,R)$ avec $r > |b|$. On a $\|f_n(z)\|_{\mathcal{B}(0,R)} \leq n|a_n|r^{n-1}$. Or, $\sum n|a_n|r^{n-1}$ converge, donc $\sum f_n$ converge normalement dans $\mathcal{B}(0,R)$. Soit h sa somme. Alors, h est continue. Ainsi, on a

$$f(z) - f(b) = h(z)(z-b).$$

2. On a même tendance à définir ainsi l'exponentielle, plutôt que de passer par une équation différentielle.

On en déduit le résultat.

□

Théorème 2.2.4 (principe des zéros isolés)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière convergente non identiquement nulle, de somme f. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $\mathcal{B}(0,\delta)\backslash\{0\}$.*

Démonstration. Soit f la somme d'une série entière non identiquement nulle. Soit

$$K = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \neq 0\}.$$

Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum a_{n+K} z^n$ ont même rayon de convergence noté R. Soit g la somme de cette seconde série. Alors, g est holomorphe donc continue sur $\mathcal{B}(0,R)$. On a $g(0) = a_K \neq 0$. Par continuité, on peut trouver $\delta \in]0,R[$ tel que g ne s'annule pas $\mathcal{B}(0,\delta)$. On conclue avec le fait que $f(z) = z^K g(z)$.

□

2.2.2 Exemples de fonctions holomorphes

L'exponentielle

Comme dit précédemment, l'exponentielle est la somme de la série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$, de rayon de convergence infini.

- Elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et vérifie $\exp' = \exp$.
- Elle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, et vérifie $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.
- Si $G \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe, alors, pour tout fonction holomorphe $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, et tout $b \in \mathbb{C}$,

$$f' = bf \iff \exists a \in \mathbb{C},\, \forall z \in G,\, f(z) = ae^{bz}.$$

- Pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, $e^{z+w} = e^z e^w$.
- La section $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective, $2\pi i$-périodique.

Définition 2.2.4. *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est entière si elle est holomorphe.*

Théorème 2.2.5 (petit théorème de Picard)**.** *Pour toute fonction entière $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ non constante, il existe au plus un point de $\mathbb{C}$ n'ayant pas d'antécédent par f.*

Corollaire 2.2.2. *Si deux séries entières coïncident sur un ensemble avec un point d'accumulation, alors elles sont égales.*

Cosinus et sinus

Les parties paires et impaires, cos et sin sont bien définies et holomorphes sur $\mathbb{C}$, et sont surjectives[3]. Elles vérifient les relations classiques, et sont 2π-périodique.

3. Leurs modules ne sont donc plus bornés, contrairement au cas réel.

Fonctions logarithmes

Définition 2.2.5. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle fonction logarithme sur D toute inverse à droite de l'exponentielle.*

Remarque. L'exponentielle sur $\mathbb{C}$ est inversible à droite puisqu'elle est surjective, et il existe une infinité de tels inverses.

Exemple. La fonction $h : \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x+iy \longmapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i \arctan\frac{y}{x}$ est un logarithme sur $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re(z) > 0\}$.

Proposition 2.2.2. *On a sur les logarithmes les propriétés suivantes.*

(i) L'exponentielle ne s'annulant, on ne peut définir de logarithme en 0.

(ii) Il existe un unique logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, car $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection. Autrement dit, la restriction d'un logarithme à $\mathbb{R}_+^*$ ne peut être que le logarithme népérien $\ln$.

(iii) Soit $\ell : D \longrightarrow \mathbb{C}$ un logarithme. Alors, pour tout $z \in D$,

$$\Re(\ell(z)) = \ln(z) \quad \textit{et} \quad \Im(\ell(z)) = \arg z \mod 2\pi.$$

Remarque. Ainsi, deux logarithmes diffèrent d'un multiple de $2\pi i$.

Théorème 2.2.6. *Soit $D \subset \mathbb{C}^*$ un ouvert. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors, si f est un logarithme, elle est holomorphe sur D, et $f'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in D$.*

Démonstration. Soit $z_0 \in D$, et $h \in \mathbb{C}^*$ tel que $z_0 + h \in D$. On a

$$e^{f(z_0+h)-f(z_0)} = \frac{z_0+h}{z_0} = 1 + \frac{h}{z_0}.$$

Notons $w(h) = f(z_0+h) - f(z_0)$. Par $\mathbb{C}$-dérivabilité de l'exponentielle, il existe $\varepsilon : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, et telle que

$$e^{w(h)} - e^0 = (1+\varepsilon(h))w(h).$$

On a donc

$$w(h) = \frac{e^{w(h)}-1}{1+\varepsilon(h)} = \frac{h}{z_0(1+\varepsilon(h))},$$

d'où le résultat lorsque $h \to 0$.

□

Remarque. Soit $\mathbb{C}^- = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ le plan complexe privé de la demie droite des réels négatifs. On appelle *branche principale* du logarithme la fonction $\log : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \ln|z| + i \arg|z|$.

Les fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $\ell : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction logarithme. On définit la fonction puissance $p_\alpha : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{\alpha \ell(z)}$. Elle est holomorphe sur D et est telle que pour tout $z \in D$, $p'_\alpha(z) = \alpha p_{\alpha-1}(z)$. Si on considère la branche principale du logarithme, on a par exemple $p_i(i) = i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Fonction zêta de Riemann

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto n^z = e^{n \ln z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Proposition 2.2.3. *Soit $\varepsilon > 0$. Alors, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ converge uniformément dans*

$$U_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re(z) \geq 1 + \varepsilon\},$$

et normalement dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Re(z) > 1\}$.

Démonstration. Critère de Riemann par comparaison série-intégrale.

□

Chapitre 3

Intégration sur les chemins de $\mathbb{C}$

3.1 Intégration sur les chemins de $\mathbb{R}$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. On note $I = [a, b]$. On commence par intégrer des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur des intervalles de $\mathbb{R}$.

Lemme 3.1.1. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holormorphe, et $\gamma : I \longrightarrow D$ une fonction dérivable. Alors, $f \circ \gamma$ est dérivable, et*

$$(f \circ \gamma)'(t) : f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

pour tout $t \in I$.

Théorème 3.1.1 (changement de variable en dimension 1)**.** *Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit $\varphi : J \longrightarrow I$ une fonction dérivable à dérivée continue. Alors, pour tout $a, b \in J$,*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t.$$

3.2 Intégration sur les chemins de $\mathbb{C}$

Définition 3.2.1. *Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$. On appelle* ***chemin paramétré*** *toute application $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Si γ est continument dérivable, on définit* ***l'intégrale de f selon le chemin*** *γ par*

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Plus généralement, si γ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et que l'on peut écrire décomposer I en k intervalles $J_1, \ldots, J_k$, tels que $\gamma_m = \gamma_{|J_m}$ est continument dérivable pour tout $m \in [\![1, k]\!]$, alors on définit

$$\int_\gamma f(z) \ \mathrm{d}z = \sum_{m=1}^{k} \int_{\gamma_m} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Notation. Pour simplifier les notations et les énoncés, on note $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$.

3.2.1 Indépendance de paramétrisation

Définition 3.2.2. *Deux chemins paramétrés $\gamma_1 : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : J \longrightarrow J$ sont dits équivalents s'il existe $\alpha : J \longrightarrow I$ une bijection dérivable, de dérivée continue et strictement positive, telle que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$. Les classes d'équivalences sont appelés les* ***chemins orientés****.*

Théorème 3.2.1 (indépendance de paramétrisation)**.** *Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins paramétrés équivalents, alors*

$$\int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Ainsi, si l'on note Γ la classe d'équivalence de γ_1 et de γ_2, on peut poser

$$\int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Proposition 3.2.1. *On conserve les propriétés classiques de l'intégrales.*

(i) Soit Γ un chemin orienté, f et g des fonctions continues définies sur l'image de Γ, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\int_\Gamma (f + \lambda g)(z) \, \mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z + \lambda \int_\Gamma g(z) \, \mathrm{d}z.$$

(ii) Soit Γ et Γ' deux chemins orientés, et tels que l'origine de Γ' coïncide avec la fin de Γ. Soit f une fonction continue sur les images des deux chemins. Alors,

$$\int_{\Gamma + \Gamma'} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z + \int_{\Gamma'} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

(iii) Soit Γ un chemin orienté, et Γ^- le chemin parcouru dans le sens opposé. Alors,

$$\int_{\Gamma^-} f(z) \, \mathrm{d}z = - \int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z.$$

Remarque. En général,

$$\Re\left(\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z \right) \neq \int_\gamma \Re(f(z)) \, \mathrm{d}z.$$

Théorème 3.2.2 (formule de transformation)**.** *Soient D_1 et D_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$. Soit $g : D_1 \longrightarrow D_2$ une fonction holomorphe telle que g' soit continue. Soit Γ_1 un chemin orienté dans D_1 et $\Gamma_2 = g \circ \Gamma_1$ son image par g dans D_2. Soit enfin $f : D_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur l'image de Γ_2. Alors,*

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_1} f(g(z))g'(z)\, dz.$$

Définition 3.2.3. *Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin paramétré continuement dérivable. On décompose $\gamma = x + iy$. On appelle longueur de γ la quantité*

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Remarque. Plus généralement lorsque γ est définie sur segment $[a,b]$ quelconque, on trouve une bijection $\alpha : [a,b] \longrightarrow [0,1]$ continument dérivable de dérivée strictement positive, pour se ramener à un chemin défini sur $[0,1]$. On remarque de plus que la longueur d'un chemin orienté est bien définie car elle ne dépend pas de son représentant dans une classe d'équivalence. Enfin, si $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ est un chemin continuement dérivable par morceaux, alors on définit

$$L([\gamma]) = \sum_{i=1}^{k} L(\gamma_i).$$

Proposition 3.2.2 (majoration standard)**.** *Soit Γ un chemin orienté dans $\mathbb{C}$, et f une fonciton continue sur l'image de Γ. Alors,*

$$\left| \int_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq \|f\|_\Gamma \, L(\Gamma)$$

où $\|f\|_\Gamma$ désigne la norme infinie de f sur l'image de $\mathbb{C}$.

3.2.2 Intégrales et passage à la limite

Théorème 3.2.3. *Soit Γ un chemin orienté dans $\mathbb{C}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction continues définies sur l'image de Γ, à valeurs complexes. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur l'image de Γ, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)\, \mathrm{d}z$$

existe et alors,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)\, \mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z.$$

3.2.3 Indépendance vis-à-vis des chemins et primitives

Le problème qui va nous intéresser dans cette section est de savoir à quelle condition sur une fonction l'intégrale sur un chemin ne dépend que du point de départ et d'arrivée. En physique, on parlerait de forces conservatives.

Définition 3.2.4. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. On dit que f est intégrable sur D si elle admet une primitive*

Proposition 3.2.3. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Alors, f est intégrable sur D si et seulement si pour tout chemin orienté fermé Γ (dont le point de départ est aussi celui d'arrivé),*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

3.3 Théorème de CAUCHY dans le cas des ouverts étoilés

3.3.1 Énoncé "faible"

Nous allons démontrer ici un théorème de CAUCHY qui affirme que toute fonction holomorphe sur un ensemble étoilé est intégrgable. Le travail principal est dans le lemme de GOURSAT. Si z_1, z_2, z_3 sont trois points non alignés de $\mathbb{C}$, alors on appelle triangle (délimité par les points z_1, z_2, z_3) la partie bornée délimitée $[z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$.

Lemme 3.3.1 (GOURSAT)**.** *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $T \subset D$ un triangle. Alors,*

$$\int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Démonstration. Voir TD.

□

Théorème 3.3.1 (CAUCHY)**.** *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe étoilé en un point $c \in D$, et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors, f est intégrable sur D et la fonction*

$$F : \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\int_{[c,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \end{array} \right.$$

est une primitive de f. En particulier, pour tout chemin orienté Γ fermé dans D,

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in D$. Pour tout $z \in D$, on a

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[c,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{[c,z_0]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Alors, en remarquant que $\int_{[z_0,z]} \mathrm{d}\zeta = z - z_0$,

$$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{z - z_0}\right| \int_{[z_0,z]} f(\zeta) - f(z_0)\,\mathrm{d}\zeta \leq \|f - f(z_0)\|_{[z_0,z]} \xrightarrow[z \to z_0]{} 0.$$

On en déduit que F est $\mathbb{C}$-dérivable et que. $F' = f$. On en conclut que f est intégrable.

□

Exercice. Soit $c \in \mathbb{C}$, et $r > 0$. Montrer que si $z_0 \in \mathbb{C}$, alors,

$$\int_{\partial\mathcal{B}(c,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

vaut 0 si $z_0 \notin \mathcal{B}_f(c,r)$, et $2\pi i$ si $z_0 \in \mathcal{B}(r,c)$.

3.3.2 Énoncé “renforcé”

On étudie maintenant des versions plus fortes du lemme de GOURSAT et du théorème de CAUCHY.

Lemme 3.3.2 (GOURSAT renforcé). *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, et $c \in D$. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur $D\backslash\{c\}$. Alors, pour tout triangle $T \subset D$,*

$$\int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Théorème 3.3.2. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, et $c \in D$. On suppose D connexe étoilé en c. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue continue, holomorphe sur $D\backslash\{c\}$. Alors, f est intégrable dans D.*

Théorème 3.3.3 (formule de CAUCHY pour les disques). *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $c \in D$, $B = \mathcal{B}(c,r)$ avec $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_f(c,r) \subset D$. Alors, pour tout $z \in B$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in B$. On pose pour tout $z \in D$,

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

C'est une fonction. continue sur D et holomorphe sur $D \backslash \{z_0\}$. Soit $s > r$ tel que $\mathcal{B}(c, s) \subset D$. Par le théorème de CAUCHY (3.3.2), g est intégrable sur $\mathcal{B}(c, s)$. Puisque ∂B est un chemin fermé contenu dans $\mathcal{B}(c, s)$,

$$\int_{\partial B} g(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta = 0.$$

On en déduit alors que

$$\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \, \mathrm{d}\zeta = f(z_0) \int_{\partial B} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

□

Remarque. Sous les hypothèses du théorème précédent avec $z = c$,

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(c + re^{it}) \, \mathrm{d}t.$$

Corollaire 3.3.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f : S \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $c \in D$ et $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_f(c, r) \subset D$. Alors, pour tout $z \in \mathcal{B}(c, r)$, on a*

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\partial \mathcal{B}(c,r)} \, .$$

Démonstration. On paramétrice $\partial \mathcal{B}(c, r)$ par $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto c + re^{it}$. On a $\gamma'(t) = ire^{it}$, et par la formule intégrale de CAUCHY,

$$|f(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{it})}{c + e^{it} - z} \, \mathrm{d}t \right| \leq \|f\|_{\partial \mathcal{B}(c,r)} \sup_{\zeta \in \partial \mathcal{B}(c,r)} \left| \frac{r}{\zeta - z} \right| = \|f\|_{\partial B(c,r)} \frac{r}{r - |z|}.$$

Or, les f^k sont holomorphes pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc on peut remplacer f par f^k dans l'inégalité. On en déduit que

$$|f(z)| \leq \|f\|_{\partial B(c,r)} \left(\frac{r}{r - |z|} \right)^{1/k}.$$

Et lorsque $k \to \infty$, on obtient l'inégalité.

□

Chapitre 4

Développements en séries entières et propriétés des fonctions holomorphes

4.1 Développements en séries entières

Définition 4.1.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. Soit enfin $c \in D$. La fonction f est dite être* ***développable en série entière*** *au voisinage de c s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n(z-c)^n$ convergeant sur $\mathcal{B}(c,r)$, dont la somme coïncide avec f sur $\mathcal{B}(c,r)$.*

Remarque. Si f est développable en série entière, on a $f^{(k)}(c) = k!a_n$.

Proposition 4.1.1. *Soit Γ une chemin orienté fermé, et soit $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On définit l'application $F : \mathbb{C}\backslash\Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$ par*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Alors pour tout $c \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$, F est développable en série entière au voisinage de c, $\sum a_n(z-c)^n$ où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Théorème 4.1.1. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, et $c \in D$. Alors, f est développable en série entière au voisinage de c. Plus précisément, pour tout disque $\mathcal{B}(c,r)$ inclus dans D et pour tout $z \in \mathcal{B}(c,r)$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \quad \textit{où pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Corollaire 4.1.1. *Les fonctions holomorphe sur un ouvert sont $\mathbb{C}$-infiniment dérivables.*

Théorème 4.1.2. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, $c \in D$, et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $D \backslash \{c\}$. Sont équivalents.*

(i) f *se prolonge en une fonction holomorphe* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$.

(ii) f *se prolonge en une fonction continue sur* D.

(iii) f *est bornée au voisinage de* c.

(iv) $\lim_{z \to c}(z-c)f(z) = 0$.

Démonstration. Les implications $(i) \implies (ii), \ldots, (iii) \implies (iv)$ sont évidentes, reste donc à montrer l'implication $(iv) \implies (i)$. On suppose que $(z-c)f(z) \xrightarrow[z \to c]{} 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $c = 0$. On définit la fonction $h : D \longrightarrow \mathbb{C}$ par $h(z) = z^2 f(z)$ pour tout $z \neq 0$, et $h(0) = 0$. Il est immédiat que h est holomorphe sur $D \backslash \{0\}$ et qu'au voisinage de 0,

$$\frac{h(z) - h(0)}{z} = zf(z) \xrightarrow[z \to 0]{} 0.$$

ce qui montre que h est holomorphe sur tout D, et donc développable en série entière au voisinage de tout point de D. En particulier en 0, puisque $h(0) = h'(0) = 0$, on peut écrire que pour tout $z \in D$,

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_k z^k.$$

Soit alors $F : D \backslash \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{h(z)}{z^2}$. Au voisinage de 0, on a

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+2} z^k.$$

On en déduit que F est holomorphe et que cette fonction coïncide avec f sur $D \backslash \{0\}$: F est un prolongement holomorphe de f.

□

Théorème 4.1.3 (d'égalité)**.** *Soit D un ouvert non-vide connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes. Sont équivalents.*

(i) $f = g$.

(ii) L'ensemble

$$S = \{z \in D \mid \ f(z) = g(z)\}$$

a un point d'accumulation dans D.

(iii) Il existe $c \in D$ *tel que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c)$.

Démonstration. — $(i) \implies (ii)$. Évident.

— $(ii) \implies (iii)$. Soit $c \in S$ un point d'accumulation de S, et soit $h = f - g$. Alors, h est holomorphe donc développable en série entière au voisinage de c. On écrit $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-$

$c)^n$ au voisinage de c. Cette série entière s'annulant sur un ensemble de points d'accumulation c, le théorème des zéros isolés affirment que $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Corollaire 4.1.2. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors, pour tout $a \in \mathbb{C}$, l'ensemble $f^{-1}(a)$ est discret.*

Corollaire 4.1.3. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\varphi]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction fonction continue. Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe tel que $]a, b[\subset D$. Alors, il existe au plus une fonction holomorphe $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f_{]a,b[} = \varphi$.*

4.2 Propriétés majeures des fonctions holomorphes

4.2.1 Équivalences des théorèmes

Définition 4.2.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que f est localement intégrable si pour tout $z \in D$, et pour tout voisinage ouvert $U_z \subset D$ tel que $f_{|U_z}$ est intégrable sur U_z.*

Théorème 4.2.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Sont équivalents.*

(i) *f est holomorphe sur D.*

(ii) *Pour tout triangle $T \subset D$,*

$$\int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

(iii) *f est localement intégrable dans D.*

(iv) *Pour tout disque ouvert B tel que $\overline{B} \subset D$ et tout $z \in B$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$

(v) *f est développable en séries entières au voisinage de c pour tout $c \in D$.*

Démonstration. La plupart des implications ont déjà été (ou partiellement) faites.

— $(i) \implies (ii)$. Lemme de Goursat.

— $(ii) \implies (iii)$. Lorsque D est étoilé, c'est le théorème de Cauchy. Dans le cas général, on couvre D par des ouverts étoilés. On peut alors conclure que f est localement intégrable D.

— $(iii) \implies (i)$.

— $(i) \implies (iv)$. Formule intégrale de Cauchy pour les disques.

— $(iv) \implies (v)$. Lemme de développabilité.

— $(v) \implies (i)$. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ sur une boule $\mathcal{B}(c, r)$, alors f est holomorphe sur $\mathcal{B}(c, r)$, et donc au voisinage de tout point de D.

□

Corollaire 4.2.1 (holomorphie des intégrales). *Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un segment, et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit enfin $g : \gamma(I) \times D$ une fonction continue telle que $g(w, \cdot)$ soit holomorphe pour tout $w \in \gamma(I)$. Alors, la fonction*

$$\begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\int_\gamma g(\zeta, z)\, \mathrm{d}\zeta \end{array}$$

est holomorphe sur D.

Démonstration. Il suffit de vérifier que pour tout triangle $T \subset D$, $\int_{\partial T} h(z)\, \mathrm{d}z = 0$. Puisque g est continue sur $\gamma(I) \times D$, et $g(w, \cdot)$ est holomorphe pour tout $w \in \gamma(I)$, le théorème de Fubini et le lemme de Goursat permettent d'affirmer que

$$\int_{\partial T} h(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\partial T} \int_\gamma g(\zeta, z)\, \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}z = \int_\gamma \underbrace{\int_{\partial T} g(\zeta, z)\, \mathrm{d}z}_{=0} \mathrm{d}\zeta.$$

□

4.2.2 Inégalités de Cauchy pour les dérivées et conséquences

Proposition 4.2.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit de plus $c \in D$ et $r > 0$ tels que $\mathcal{B}_f(c, r) \subset D$. Alors, pour tout $k \in N$ et tout $z \in \mathcal{B}(c, r)$,*

$$\left| f^{(k)}(z) \right| \leq k! \frac{r}{d_z^{k+1}} \|f\|_{\partial B}$$

où $d_z = d(z, \partial B)$.

Proposition 4.2.2. *Soit $\sum a_n (z - c)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f sa somme. On pose pour tout $r \in]0, R[$,*

$$M(r) = \sup_{z \in \partial\mathcal{B}(c,r)} |f(z)|.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n| = \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right| \leq \frac{r}{r^{n+1}} M(r) \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

□

Théorème 4.2.2 (formule de GUTZMER)**.** *Soit $\sum a_n(z-c)^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Soit f sa somme et $r \in]0,R[$. On a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f\left(c+re^{it}\right)\right|^2 \mathrm{d}t \leq M(r)^2.$$

Démonstration. Le principe de la démonstration est d'écrire que $|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)}$ pour tout $z \in \mathcal{B}(c,r)$.

□

Corollaire 4.2.2. *Soit $\sum a_n(z-c)^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et f sa somme. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $r \in]0,R[$ tels que $|a_m|r^m = M(r)$. Alors, pour tout $z \in \mathcal{B}(c,r)$,*

$$f(z) = a_m(z-c)^m.$$

Théorème 4.2.3 (principe du maximum)**.** *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'il eciste $c \in D$ et U un voisinage de c dans D tel que $|f(c)| = \|f\|_U$. Alors, f est constante sur D.*

Démonstration. Au voisinage de c, on a

$$f(z) = \sum_{n=0} a_n(z-c)^n.$$

On en déduit que $|a_0| = |f(c)| = \|f\|_U$. Soit alors $r>0$ tel que $\mathcal{B}(c,r) \subset U$. On a $M(r) \leq a_0$, et donc d'après la formule de GUTZMER, f est constante à a_0 sur $\mathcal{B}(c,r)$. Par le théorème d'égalité, f est aussi constante à a_0 sur D.

□

Avant d'énoncer le théorème suivant, on rappelle qu'une fonction holormophe sur le plan complexe tout entier est dite *entière*.

Théorème 4.2.4 (Liouville)**.** *Tout fonction entière bornée est constante.*

Démonstration. On a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (rayon de convergence infini). Soit $M>0$ un majorant de $|f|$. Pour tout $r>0$,

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□

Conséquence. Il n'existe pas de fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \longrightarrow \Delta$. En particulier, il n'existe pas de biholomorphisme entre Δ et $\mathbb{C}$, ou entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{C}$.

4.2.3 Théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème de Louiville va en fait nous permettre de montrer ce théorème. Pour cela, on démontre le lemme de croissance.

Lemme 4.2.1 (de croissance). *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_z X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe $R > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| geq \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq 2|a_n||z|^n.$$

De plus, si $n > 0$, alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{|z|^k}{|P(z)|} = 0.$$

Démonstration. Si $n = 0$, l'énoncé est trivial. On suppose $n \geq 1$, et on pose $R(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|a_n||z|^n - R(z) \leq |P(z)| \leq |a_n||z|^n + R(z).$$

Or si $|z| \geq 1$, alors $|z|^k \leq |z|^{n-1}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, et donc $R(z) \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| z^{n-1}$. Il suffit alors de poser

$$R = \max\left\{1, \frac{2}{|a_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right\}.$$

□

Théorème 4.2.5 (fondamental de l'algèbre). *Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.*

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Si P n'avait pas de racine, la fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{P(z)}$ serait bien définie et holomorphe. Or, le lemme de croissance assurerait que cette fonction est bornée, ce qui est absurde.

□

4.2.4 Théorème de convergence de Weierstrass

Théorème 4.2.6. *Soit D un ouvert de C et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes de D dans $\mathbb{C}$. On suppose que $(f_n)_n$ convergence localement uniformément vers une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ sur D. Alors*

(i) f est holomorphe sur D ;

(ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge localement uniformément vers $f^{(k)}$ sur D.

Démonstration. (i) La fonction f est continue sur D par convergence localement uniforme des f_n. Soit $T \subset D$ un triangle. Alors,

$$\int_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial T} \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial T} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

d'après le lemme de Goursat. On en déduit que f est holomorphe.

(ii) Il suffit de montrer le résultat pour $k = 1$, le reste viendra par récurrence. Soit $c \in D$ et $r > 0$ tel que $B := \mathcal{B}(c, 2r) \subset D$. Pour tout $z \in \mathcal{B}(c, r)$,

$$(f_n' - f')(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Une majoration standard indique alors que

$$|(f_n' - f')(z)| \leq \|f_n - f\|_{\partial B} \frac{2r}{\min_{\zeta\in\partial B} |\zeta - z|^2}.$$

Puisque pour tout $z \in \mathcal{B}(c, r)$ et tout $\zeta \in \partial B$, $|\zeta - z| \geq r$, on a $\min_{\zeta\in\partial B} |\zeta - z|^2 > r^2$, et

$$\left\|f_n' - f'\right\|_{\mathcal{B}(c,r)} \leq \frac{2}{r} \|f_n - f\|_{\partial B}.$$

□

4.2.5 Théorème des applications ouvertes

Définition 4.2.2. *Soient X et Y des espaces topologiques. Un application $f : X \longrightarrow Y$ est dite* ***ouverte*** *si pour tout ouvert U de X, $f(U)$ est un ouvert de Y.*

Théorème 4.2.7 (d'existence de zéros)**.** *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $B := \mathcal{B}(c, r) \subset D$ une boule telle que $\overline{B} \subset D$. Soit alors $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Si*

$$\min_{z\in\partial B} > |f(c)|,$$

alors f a un zéro dans B.

Démonstration. Supposons que f ne s'annule pas dans B. On remarque de par l'inégalité que f ne s'annule pas non plus sur $\overline{B}$, et donc par continuité ne s'annule pas dans un voisinage de $\overline{B}$. On définit alors $g = \frac{1}{f} : U \longrightarrow \mathbb{C}$, qui est une fonction holomorphe sur U. Mais alors,

$$g(c) > \max_{z\in\partial B} |g(z)|.$$

Or, le corollaire 3.3.1 affirme que par holomorphie de g,

$$|g(c)| \leq \max_{z\in\partial B} |g(z)|.$$

□

Théorème 4.2.8 (des applications ouvertes). *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Alors, toute application holomorphe de D dans $\mathbb{C}$ non constante est ouverte.*

Démonstration. Soit $U \subset D$ un ouvert de D, et $c \in U$. Il nous suffit de montrer que $f(U)$ contient une boule centrée en $f(c)$. Puisque f n'est pas constante, et d'après le théorème d'égalité, il existe une boule $V \subset U$ centrée en c telle que $f(c) \neq f(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \partial V$. On pose

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{\zeta \in \partial V} |f(c) - f(\zeta)|$$

qui est une quantité strictement positive puisque $f(c) - f$ est continue et que ∂V est compacte. On pose $B = \mathcal{B}(f(c), \delta)$, et on va montrer que $B \subset f(U)$. Soit $b \in B$, et $g = f - b$. On a

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{\zeta \in \partial V} |f(\zeta) - b| & = & \min\limits_{\zeta \in \partial V} |(f\zeta) - f(c) + f(c) - b| \\ & \geq & \min\limits_{\zeta \in \partial V} |f(\zeta) - f(c)| - |f(c) - b| \\ & \geq & 2\delta - \delta \\ & \geq & \delta > |f(c) - b| = |g(c)|. \end{array}$$

On en déduit que g a un zéro dans V, donc qu'il existe $z \in V$ tel que $f(z) = b$. Ainsi, $B \subset f(V) \subset f(U)$. $\square$

Chapitre 5

Théorie des résidus

5.1 Singularités

Définition 5.1.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $c \in D$, $f : D\backslash\{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Le point c est dit être une* ***singularité isolée*** *de f. On en distingue trois types.*

— *La singularité isolée c est dit être* ***effaçable*** *(ou apparente) si f est prolongeable en une fonction holomorphe sur D.*

— *La singularité isolée c est dite être un* ***pôle*** *si elle n'est pas effaçable, et qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, telle que la fonction $z \longmapsto (z-c)^n f(z)$ peut être prolongée en une fonction holomorphe D.*

— *La singularité isolée c est dit être* ***essentielle*** *si elle n'est ni effaçable ni un pôle.*

Exemples.

— La fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$ possède une singularité effaçable en 0.

— La fonction $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{1}{z}$ possède un pôle en 0.

— La fonction $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ possède une singularité essentielle en 0.

5.1.1 Singularités effaçables

Proposition 5.1.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $c \in D$. Soit $f : D\backslash\{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si f est bornée sur $U\backslash\{c\}$, où $U \subset D$ est un voisinage, alors c est une singularité effaçable.*

Démonstration. Appliquer le théorème de prolongement de Riemann. $\square$

5.1.2 Pôles

Définition 5.1.2 (ordre d'un pôle). *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $c \in D$, $f : D\backslash\{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Si c est un pôle, on définit* ***l'ordre du pôle*** *c comme étant la quantité*

$$m = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists M > 0,\, \exists U \in \mathcal{V}(c),\, \forall z \in U \cap D\backslash\{c\},\, |(z-c)^n f(z)| \leq M\} \geq 1.$$

Lorsque $m = 1$, on dit que c est un pôle ***simple****.*

Théorème 5.1.1. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction holomorphe sur $D\backslash\{c\}$. Sont équivalents.*

(i) Le point c est un pôle d'ordre m.

(ii) Il existe une fonction $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $g(c) \neq 0$, et pour tout $z \in D\backslash\{c\}$,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^m}.$$

(iii) Il existe un voisinage $U \subset D$ de c et une fonction holomorphe $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ qui ne s'annule pas sur $U\backslash\{c\}$ et a un zéro d'ordre m en c, et telle que

$$f = \frac{1}{h} \text{ sur } D\backslash\{c\}.$$

(iv) Au voisinage de c,

$$f(z) = \Theta_{z\to c}\left(\frac{1}{(z-c)^m}\right).$$

Définition 5.1.3. *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, $c \in D$, et $f : D\backslash\{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$. Si $\lim_{z\to c} |f(z)| = \infty$, alors on note*

$$\lim_{z\to c} f(z) = \infty.$$

Proposition 5.1.2. *Soit $f : D\backslash\{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors, c est un pôle si et seulement si*

$$\lim_{z\to c} f(z) = \infty.$$

Démonstration. Si c est un pôle, c'est évident. Réciproquement, on suppose que $\lim_{z\to c} f(z) = \infty$. Soit $B = \mathcal{B}(c,r) \subset D$ une boule telle que f ne s'annule pas sur $\mathcal{B}\backslash\{c\}$. On définit $h : B\backslash\{c\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$. On remarque que h est holomorphe sur $B\backslash\{c\}$ et que $\lim_{z\to c} h(z) = 0$. Alors, h se prolonge en une fonction holomorphe sur B (qu'on note encore h) et telle que $h(0) = 0$. En particulier, c'est une zéro de h, et l'on conclut avec le troisième point du théorème 5.1.1.

□

Théorème 5.1.2 (développement au voisinage des pôles)**.** *Soit $f : D\backslash\{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que c est un pôle d'ordre m. Alors, il existe des uniques nombres complexes $b_1, \ldots, b_m$ (avec $b_m \neq 0$) et une unique fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur D tels que pour tout $z \in D\backslash\{c\}$,*

$$f(z) = \tilde{f}(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{(z-c)^k}.$$

5.1.3 Singularités essentielles

Une conséquence des résultats précédents est qu'une singularité isolée c d'une fonction holomorphe $f : D\backslash\{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$ est essentielle si f n'est pas bornée au voisinage de c, et que $\lim_{z\to c} |f| \neq \infty$.

Théorème 5.1.3 (des singularités essentielles)**.** *Soit $f : D\backslash\{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors, f a une singularité essentielle en c si et seulement si pour tout voisinage U de c dans D, $f(U\backslash\{c\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Le sens $(ii) \implies (i)$ est donné par la remarque précédente. Supposons maintenant qu'il existe une voisinage U de c dans D tel que $f(U\backslash\{c\})$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Alors, il existe $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tel que

$$\mathcal{B}(a, r) \cap (U\backslash\{c\}) = \varnothing.$$

Alors, la fonction la fonction $g = \frac{1}{f-a}$ est holomorphe sur $U\backslash\{c\}$ et est bornée au voisinage de c. De plus, $|g(z)| < \frac{1}{r}$ pour tout $z \in U\backslash\{c\}$. On en déduit que c est une singularité effaçable de g. Mais alors, $f = \frac{1}{g} + c$ a une singularité effaçable en c si $g(c) \neq 0$ et un pôle en c si $g(c) = 0$. On en déduit que c n'est pas une singularité essentielle de f.

□

Conséquence. D'après ce théorème et le théorème de l'application ouverte, si c est une singularité essentielle, alors pour tout voisinage U de c dans D, $f(U\backslash\{c\})$ est un ouvert dense dans $\mathbb{C}$. On verra en fait que $f(U\backslash\{c\})$ est exactement $\mathbb{C}$, ou $\mathbb{C}$ privé d'un point.

5.2 Fonctions méromorphes

Définition 5.2.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite être* ***méromorphe*** *sur D s'il existe un sous-ensemble discret $P(f) \subset D$ tel que f est holomorphe sur $D\backslash P(f)$ et f a un pôle en tout point de $P(f)$.*

Exemples.

- Toute fonction holomorphe sur D est méromorphe sur D avec $P(f) = \varnothing$.
- Toute fonction rationnelle est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

5.2.1 Logarithmes d'applications holomorphes

Définition 5.2.2. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe. On dit qu'une fonction holomorphe $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est un* ***logarithme de*** f *si pour tout $z \in D$, $e^{g(z)} = f(z)$.*

Remarque. Si g est un logarithme de f, alors $g' = \frac{f'}{f}$.

Théorème 5.2.1. *Soit D un ouvert étoilé en $c \in D$, et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que pour tout $z \in D$, $f(z) \neq 0$. Alors, f admet pour logarithme une fonction g définie pour tout $z \in D$ par*

$$g(z) = b + \int_{[c,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, \mathrm{d}\zeta,$$

où b est un antécédent de $f(c)$ par exp.

Remarques.

— Sous les mêmes hypothèses, pour tout $z \in D$,

$$f(z) = f(c) \exp\left(\int_{[c,z]} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta \right).$$

— Au lieu du segment $[c, z]$, on peut choisir un chemin quelconque reliant c à z.

Proposition 5.2.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin paramétré fermé, et $c \in \mathbb{C} \backslash \gamma(I)$. Alors,*

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - c} \, \mathrm{d}\zeta \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

Définition 5.2.3. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin paramétré fermé. Pour tout $c \in \mathbb{C} \backslash \gamma(I)$, on appelle* ***indice de*** c ***par rapport à*** γ *la quantité*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - c},$$

qui est un entier relatif en vertu de la proposition précédente.

Remarques. L'indice de c par rapport à γ correspond graphiquement aux nombres de tours (dans le sens trigonométrique) qu'effectue le lacet γ autour du point c. Ainsi, la fonction Ind_γ est localement constante sur $\mathbb{C} \backslash \gamma(I)$, et est compatible avec l'opération de renversement d'un lacet :

pour tout $z \in \mathbb{C} \backslash \gamma(I)$, $\operatorname{Ind}_{\gamma^-}(z) = -\operatorname{Ind}_\gamma(z)$.

Définition 5.2.4. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet sur $\mathbb{C}$. On définit*

$$\operatorname{Int}(\gamma) = \{a \in \mathbb{C} \backslash \gamma(I) \mid \operatorname{Ind}_\gamma(a) \neq 0\},$$

et

$$\operatorname{Ext}(\gamma) = \{a \in \mathbb{C} \backslash \gamma(I) \mid \operatorname{Ind}_\gamma(a) = 0\}.$$

Remarques.

— On a la partition

$$\mathbb{C} = \operatorname{Int}(\gamma) \sqcup \gamma(I) \sqcup \operatorname{Ext}(\gamma).$$

— L'ensemble $\operatorname{Ext}(\gamma)$ est toujours la composante non bornée de $\mathbb{C} \backslash \gamma(I)$. En effet, on observe que

$$\int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0.$$

Puisque $\operatorname{Ind}_\gamma$ est à valeurs entières, on en déduit que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$ pour $|z|$ assez grand.

Lemme 5.2.1. *Soit $\gamma : I \longrightarrow$ un lacet, et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $g : D \times D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie pour tout $(w, z) \in D \times D$ par*

$$g(w, z) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & si \quad w \neq z, \\ f'(z) & si \quad w = z. \end{cases}$$

Alors, la fonction $h : D \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $z \in D$ par

$$h(z) = \int_\gamma g(\zeta, z) \mathrm{d}\zeta$$

est holomorphe sur D.

Théorème 5.2.2 (Cauchy). *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soit $\gamma : I \longrightarrow D$. Sont équivalents.*

(i) Pour tout fonction holomorphe $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

(ii) Pour tout fonction holomorphe $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $a \in D \backslash \gamma(I)$,

$$f(a) \operatorname{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, \mathrm{d}z.$$

(iii) $\operatorname{Int}(\gamma) \subset D$.

5.3 Résidus

5.3.1 Théorème des résidus

Définition 5.3.1. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $c \in D$, et $f : D\backslash\{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(c,r) \subset D$. Alors, on définit*

$$\operatorname{Res}_c(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{B}(c,r)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

*Cette quantité, appelée **résidu de f en** c est bien définie et ne dépend pas de r.*

Remarque. Pour montrer que cette définition ne dépend pas de r, il conviendrait de s'intéresser aux séries de Laurent.

Exemple. Si $f : D\backslash\{c\} \longrightarrow \mathbb{C}$ a un pôle d'ordre m en c, alors on peut écrire pour tout $z \in D\backslash\{c\}$,

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \tilde{f}(z)$$

où $\tilde{f} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe (donc d'intégrale nulle sur le chemin fermé $\partial\mathcal{B}(c,r)$). Puisque pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{\partial\mathcal{B}(c,r)} (z-c)^k\,\mathrm{d}z = \delta_{-1,k},$$

on en déduit que

$$\operatorname{Res}_c f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{B}(c,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1}.$$

Théorème 5.3.1 (des résidus)**.** *Soit D un ouvert connexe, et $\gamma : I \longrightarrow D$ un lacet tel que $\operatorname{Int}(\gamma) \subset D$. Soit alors $S \subset D\backslash\gamma(I)$ un ensemble fini, et $f : D\backslash S \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors,*

$$\sum_{c\in S\cap\operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{Ind}_\gamma(c)\operatorname{Res}_c f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

5.3.2 Régles de calcul de résidus

— Soient f et g des fonctions holomorphes sur $D\backslash\{c\}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\operatorname{Res}_c(f+\lambda g) = \operatorname{Res}_c f + \lambda\operatorname{Res}_c g.$$

— Si c est un pôle simple de f, alors f s'écrit, pour tout $z \in D\backslash\{c\}$,

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-c} + \tilde{f}(z)$$

où $\tilde{f}$ est holomorphe sur un voisinage de c. Alors, $\operatorname{Res}_c f = a_{-1}$. Pour déterminer ce coefficient, on calcule $\lim_{z \to c}(z-c)f(z)$.

— Soient g et h des fonctions holomorphes sur un voisinage de c, telles que $g(c) \neq 0$, $h(c) = 0$, et $h'(c) \neq 0$. Alors, $f = \frac{g}{h}$ a un pôle simple en c tel que

$$\operatorname{Res}_c f = \frac{g(c)}{h'(c)}.$$

— Si c est un pôle d'ordre m de f, on peut écrire pour un certain $r > 0$ et tout $z \in \mathcal{B}(c,r)\backslash\{c\}$,

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-c)^k.$$

On pose $g(z) = (z-c)^m f(z)$. Cette fonction se prolonge au voisinage de c en une fonction holomorphe (qu'on note encore g), telle que

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-c)^k$$

avec $b_k = a_{k-m}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\operatorname{Res}_c f = \frac{g^{(m-1)}(c)}{(m-1)!} = a_{-1}.$$

— Soit g, h deux fonctions holomorphes sur un voisinage de c. On suppose que g a un zéro d'ordre m en c. Soit $f = h\frac{g'}{g}$. Alors,

$$\operatorname{Res}_c f = mh(c).$$

— Soit g, h deux fonctions holomorphes sur un voisinage de c. On suppose que g a un pôle d'ordre m en c. Soit $f = h\frac{g'}{g}$. Alors,

$$\operatorname{Res}_c f = -mh(c).$$

5.4 Comptage de zéros et de pôles

Définition 5.4.1. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet. On dit que γ est **simple** s'il est d'intérieur non vide et $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 1$ pour tout $z \in \operatorname{Int}(z)$.*

Dans ce qui suit, on supposera toujours que les fonctions holomorphes n'ont pas de singularités apparentes, quitte à les prolonger en ces points.

Théorème 5.4.1 (de comptage)**.** *Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe sur D avec un nombre fini de zéros et de pôles. Soit $\gamma : I \longrightarrow D$ un lacet simple avec $\operatorname{Int}(\gamma) \subset D$, ne passant par aucun zéro ou pôle de f. On note Z_f l'ensemble des zéros de f, et P_f l'ensemble des pôles de f. Alors,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \mathrm{card}(Z_f \cap \mathrm{Int}(\gamma)) - \mathrm{card}(P_f \cap \mathrm{Int}(\gamma))$$

où les zéros et les pôles sont comptés avec multiplicités.

Démonstration. Utiliser les règles de calculs.

□

Théorème 5.4.2 (Rouché)**.** *Soient f et g deux applications holomorphes sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$. Soit $\gamma : I \longrightarrow D$ un lacet simple tel que $\mathrm{Int}(\gamma) \subset D$. On suppose que pour tout $z \in \gamma(I)$,*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|.$$

Alors, f et g ont le même nombre de zéros à l'intérieur de $\gamma(I)$.