

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE RENNES
&
UNIVERSITÉ DE LILLE

MÉMOIRE

THÉORIE DE HODGE DES MATROÏDES

AUTEUR
VICTOR LECERF

ENCADRANT
AMAËL BROUSTET



2023–2024

Table des matières

Table des matières	3
Introduction	5
1 Variétés toriques et éventails	7
1.1 Cônes	7
1.2 Éventails	7
1.2.1 Éventails et leurs constructions	7
1.2.2 Variété torique associée à un éventail	10
1.2.3 Correspondance entre les variétés toriques et les éventails	12
2 Matroïdes	13
2.1 Différentes définitions	13
2.1.1 Définition par les clos	13
2.1.2 Définition par les indépendants (et les bases)	14
2.1.3 Définition par la fonction rang	16
2.1.4 Définition par l'opérateur de clôture	17
2.1.5 Circuits	18
2.2 Constructions associées	18
2.2.1 Somme directe	18
2.2.2 Restriction, contraction, suppression	18
2.3 Polynôme caractéristique	19
2.4 Fonction de MÖBIUS d'un matroïde	20
2.5 Relations de HODGE-RIEMANN pour les matroïdes	21
2.5.1 Anneau de CHOW et énoncé	21
3 Construction sur les ensembles finis et leurs parties	25
3.1 Constructions vectorielles associées	25
3.2 Drapeaux de parties	26
3.3 Complexes et éventails de BERGMAN	27
3.4 Clos des matroïdes	29
3.5 Étoile d'un cône	31
4 Anneau de CHOW	33
4.1 Fonctions linéaires par morceaux	33
4.1.1 Définitions	33
4.1.2 Tirés en arrière	34
4.1.3 Cônes amples et nef	35
4.1.4 Cônes amples et nef d'éventails d'ordres filtrés de matroïdes	38
4.1.5 Matroïde simplifié	38

4.2	Homologie et cohomologie	42
4.2.1	Poids de MINKOWSKI	42
4.2.2	Anneau de CHOW d'un éventail	43
4.2.3	Anneau de CHOW d'un matroïde	46
4.2.4	Équivalences de CHOW	49
4.3	Dualité de POINCARÉ	50
4.3.1	Anneau de CHOW de $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$	50
4.3.2	Tiré en arrière sur l'anneau de CHOW et morphisme de GYSIN	52
4.3.3	Isomorphismes pertinents	55
4.3.4	Les anneaux de CHOW de matroïdes filtrés vérifient la dualité de POINCARÉ	60
5	Dernière ligne droite	65
5.1	Propriété de LEFSCHETZ difficile et relations de HODGE-RIEMANN	65
5.1.1	Dualité de POINCARÉ, propriétés HL et HR	65
5.1.2	Propriétés HL et HR après tensorisation	68
5.1.3	Retour sur les cônes amples et nef	68
5.2	Démonstration du théorème principal	70
5.2.1	Le retournement matroïdal préserve les relations de HODGE-RIEMANN pour certaines classes amples	70
5.2.2	Fin de la démonstration	78
	Bibliographie	81
	Index	83

Introduction

En 1935, Hassler WHITNEY publie un article ([Whi35]) dans lequel il donne un cadre abstrait à la combinatoire des familles libres de vecteurs et propose la définition d'un matroïde (qui correspond ici à la définition 2.1.14). Cette classe d'objets est flexible, tant elle admet des différentes définitions équivalents qu'on proposera dans ce mémoire. On observera aussi que tout graphe définit un matroïde, et donc les généralise. À ce titre, on remarquera que tout matroïde admet un polynôme caractéristique qui généralise le principe du polynôme chromatique d'un graphe. En 2012, J. HUH démontre dans [Huh12] que la suite des valeurs absolues des coefficients du polynôme chromatique est log-concave. Or, il est à l'époque déjà conjecturé que ce résultat est vrai pour tout polynôme caractéristique d'un matroïde. Là est la prouesse que proposent K. ADIPRASITO, J. HUH, et E. KATZ dans [AHK18] : *via* des généralisations et des parallèles avec d'autres théories, ils construisent une théorie de HODGE permettant entre autres de démontrer la conjecture pour les matroïdes.

Ce mémoire a pour but de présenter une théorie de HODGE pour les matroïdes — ainsi que de démontrer sa validité, telle qu'elle est présentée dans [AHK18]. On cherche pour cela à construire un anneau de CHOW pour les matroïdes, ce qui permet au minimum d'énoncer le résultat. Cependant, le théorème ne pouvant être démontré directement (ou ne serait-ce par récurrence sur le rang du matroïde), on introduit les filtres sur l'ensemble des clos propres non vides d'un matroïdes. À un filtre sur un matroïde, on associe un anneau de CHOW qui généralise le précédent. La démonstration par récurrence est alors envisageable, cette fois-ci sur le rang du matroïde et le cardinal du filtre avec l'ordre lexicographique.

Dans le premier chapitre, on s'intéresse à la théorie des cônes (rationnels polyédraux fortement convexes) et des éventails. Ces objets ont permis historiquement de formaliser le concept de variété torique, grâce à M. DEMAZURE dans [Dem70] qui avait défini les éventails de manière abstraite, puis le schéma associé à un éventail. Dans ce mémoire, nous présenterons des éventails particuliers appelés *éventails de BERGMAN* qui joueront le rôle d'intermédiaire pour démontrer le résultat par récurrence. Notre chapitre en la matière s'intéresse s'inspire fortement de la présentation de la théorie des éventails et des variétés toriques de *Introduction to Toric Varieties* de W. FULTON ([Ful93]).

On présente dans le deuxième chapitre l'objet principal de ce mémoire. Les matroïdes constituent une classe d'objets de nature combinatoire permettant de généraliser plusieurs type d'objets et ainsi reliant des thématiques *a priori* peu liées. On présente d'abord ses différentes définitions (clos, parties indépendants, bases, fonction de rang, opérateur de clôture, circuits) en montrant les liens entre elles, mais en les admettant. Ces matroïdes sont sujets à des constructions possibles comme la somme directe, mais aussi à trois opérations les diminuants (restriction, contraction, suppression) dont on se servira le long de ce mémoire. On introduit ensuite le polynôme caractéristique d'un matroïde, observant qu'il généralise le polynôme chromatique d'un graphe. On observe ensuite un

lien naturel entre le dit polynôme et la fonction de MÖBIUS du poset des clos propres non vides du matroïde. On peut alors définir l'anneau de CHOW d'un matroïde et énoncer la théorie de HODGE associée.

Au troisième chapitre, on introduit les objets principaux de la démonstration : après une introduction sur des constructions sur espaces vectoriels de dimensions finies, on s'intéresse à des drapeaux de parties d'un ensemble. On définit alors la compatibilité qui permet de construire des complexes simpliciaux et des éventails, en particulier l'éventail de BERGMAN qui est central dans ce mémoire.

Dans le quatrième chapitre, on commence par définir les fonctions linéaires par morceaux sur le support d'un éventail, puis le A^1 d'un éventail (qui plus tard sera la composante de degré 1 de l'anneau de CHOW). On peut alors définir quelques applications utiles par la suite, ainsi que les cônes amples et neufs qui sont compatibles avec les dites applications. On montre ensuite que dans le cas où l'éventail étudié provient d'un matroïde filtré, son A^1 ne dépend que de sa géométrie combinatoire, *i.e* $\bar{M}$ le matroïde simplifié obtenu à partir du matroïde M . S'en suit quelques observations sur les poids de MIN-KOWSKI et les équivalences de CHOW. On définit alors dans un cadre général l'anneau de CHOW d'un matroïde filtré et l'on observe que cette définition est cohérente avec d'autres définitions des anneaux de CHOW. On peut alors commencer à démontrer le premier point de la théorie de HODGE, *i.e* que l'anneau de CHOW d'un matroïde filtré vérifie la dualité de POINCARÉ en dimension un de moins que le rang du matroïde. Pour cela, on présente plusieurs lemmes et résultats intermédiaires utilisant des applications remarquables comme les morphismes de GYSIN. On démontre ensuite la dualité de POINCARÉ par récurrence lexicographique sur le rang du matroïde et le cardinal du filtre.

Dans le cinquième et dernier chapitre, on donne un cadre général à l'existence d'une théorie de HODGE sur une algèbre. On montre ensuite que les propriétés de LEFSCHETZ difficiles et les relations de HODGE-RIEMANN (les deuxièmes et troisièmes points de la théorie de HODGE) passent bien aux produits tensoriels, puis on lie ces propriétés abstraites au cas des anneaux de CHOW d'éventails et aux cônes amples et neufs. Enfin, il reste à montrer que le retournement matroïdal (défini au chapitre 4) se comporte bien avec la théorie de HODGE. On achève alors ce mémoire en rassemblant les différents résultats énoncés dans les cinq chapitres pour démontrer le théorème principal par récurrence lexicographique.

Chapitre 1

Variétés toriques et éventails

1.1 Cônes

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Définition 1.1.1. Un cône est une partie C de E telle que pour $x \in C$ et $\lambda \geq 0$, λx est aussi élément de C . On parle plus précisément de cône convexe si pour tous $x, y \in C$ et $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda x + \mu y$ est toujours dans C .

Remarque 1.1.2. Une cône C de E est convexe si et seulement si $C + C \subseteq C$.

Définition 1.1.3. Soit C un cône de E . Le cône C est dit polyédral s'il est l'enveloppe conique d'un nombre fini de vecteurs, i.e il existe $e_1, \dots, e_k \in E$ des vecteurs tels que

$$C = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0\}.$$

Remarque 1.1.4. On peut proposer d'autres définitions équivalentes.

— Un cône C est polyédral s'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq 0\}.$$

— (WEYL, 1935) Un cône est polyédral s'il est intersection d'un nombre fini de demi-espaces contenant tous 0 dans leur frontière.

Notation 1.1.5 (enveloppe conique). Si $e_1, \dots, e_k \in E$, on note

$$\text{cône}(e_1, \dots, e_k) = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0\}.$$

1.2 Éventails

1.2.1 Éventails et leurs constructions

Soit N un réseau, i.e un $\mathbb{Z}$ -module libre de rang n , de sorte que N soit isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. On travaille alors sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Définition 1.2.1. Un cône polyédral est dit rationnel fortement convexe s'il est engendré par un nombre fini de vecteurs de $\mathbf{N}$ (polyédral et rationnel) et s'il ne contient aucune droite passant par l'origine (fortement convexe).

Remarque 1.2.2. Le terme *rationnel* dépend donc du réseau étudié. Par exemple, deux réseaux de rang n dans $\mathbb{R}^n$ donnent, une fois $\mathbb{Z}$ -tensorisés avec $\mathbb{R}$, le même espace vectoriel ($\mathbb{R}^n$), mais le mot *rationnel* dans $\mathbb{R}^n$ pourra prendre des sens différents.

Convention

Désormais et sauf mention contraire, le mot *cône* désignera un cône polyédral rationnel fortement convexe.

Définition 1.2.3. Soit σ un cône de N . On appelle dimension de σ la dimension de $\mathbb{R}\sigma = \sigma + (-\sigma)$, l'espace engendré par σ .

Remarque 1.2.4. Si un cône est engendré par une famille libre de vecteur, alors la dimension de σ est le cardinal de la dite famille libre.

Le cône est dans la théorie des éventails une brique élémentaire dans une construction plus grande, tel le polyèdre et les complexes polyédraux. La définition sera donc analogue. Il est nécessaire avant tout de définir la notion de *face*.

Définition 1.2.5. Soit σ un cône. Une partie τ de σ est dit être une face de σ si τ est l'intersection de σ avec un hyperplan portant σ , i.e s'il existe $u \in \sigma^\vee = \{u \in \mathbf{N}_\mathbb{R}^* \mid \forall v \in \sigma, \langle u, v \rangle \geq 0\}$ tel que

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \{v \in \sigma \mid \langle u, v \rangle = 0\}.$$

Remarque 1.2.6. Un cône de $\sigma \in \Delta$ est une face de lui-même.

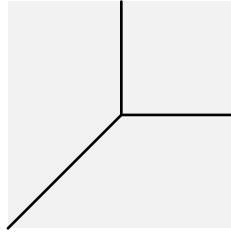
Remarque 1.2.7. Il est évident qu'on attend d'une face d'un cône d'être aussi un cône, ainsi que d'autres propriétés. On les résume ici.

- Toute face d'un cône est un cône.
- Toute intersection de faces d'un même cône est une face.
- Une face d'une face est une face.

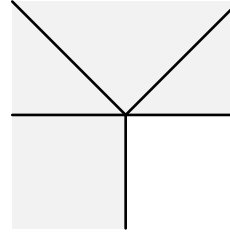
Remarque 1.2.8. Si σ est un cône de dimension k , on appelle *facette* toute face de dimension $k - 1$.

Définition 1.2.9. Un éventail Δ de $\mathbf{N}$ est un ensemble de cône de $\mathbf{N}_\mathbb{R}$ tel que

- (i) si $\sigma \in \Delta$, alors toute face de σ est élément de Δ ;
- (ii) si $\sigma, \tau \in \Delta$, alors $\sigma \cap \tau$ est une face de σ et τ .



(a) Exemple d'éventail dans $\mathbb{R}^2$ décrit en exemple 1.2.12. Cet éventail contient l'origine, les trois demi-droites, et les trois régions du plans délimités par les paires de demi-droites.



(b) Un autre éventail de $\mathbb{R}^2$.

FIGURE 1.1 – Exemples d'éventails dans $\mathbb{R}^2$.

Notation 1.2.10. Étant donné un éventail Δ , on note $|\Delta|$ son *support*, i.e sa réalisation géométrique

$$|\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma \subseteq \mathbb{N}_{\mathbb{R}}.$$

Remarque 1.2.11. Un éventail Δ est dit *complet* si sa réalisation géométrique englobe l'espace vectoriel entier, i.e si

$$|\Delta| = \mathbb{N}_{\mathbb{R}}.$$

L'éventail de l'exemple 1.2.12 est complet, tandis que celui de l'exemple 1.2.13 est incomplet.

Exemple 1.2.12. On considère en figure 1.1a l'éventail de $\mathbb{Z}^2$ dont cônes les cônes maximaux sont $\text{cône}(e_1, e_2)$, $\text{cône}(e_1, -e_1 - e_2)$, et $\text{cône}(e_2, -e_1 - e_2)$. C'est un éventail complet.

Exemple 1.2.13. On peut considérer l'exemple dessiné en 1.1b. Remarquer que le cadran inférieur droit n'est pas un cône de l'éventail. De plus, le cône ne contient à proprement parler la droite portée par e_1 (l'axe de l'abscisse dans le plan) mais plutôt les demi-droites portées par e_1 et $-e_2$.

Définition 1.2.14. Un sous-éventail d'un éventail Σ est une partie de Σ qui est elle-même un éventail.

Définition 1.2.15 (produit d'éventails). Soit $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}'$ des $\mathbb{Z}$ -modules libres de rangs finis, et Σ et Σ' des éventails respectivement sur $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}'$. On définit le produit des éventails

$$\{\sigma \times \sigma' \mid (\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma'\}.$$

Notation 1.2.16. On note abusivement cet éventail $\Sigma \times \Sigma'$.

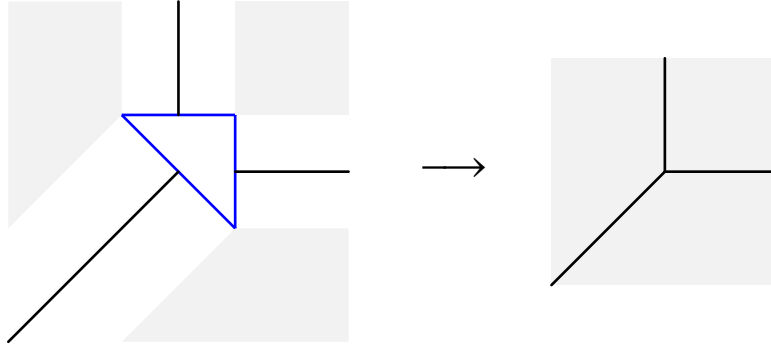


FIGURE 1.2 – Construction de l'éventail normal du simplexe de dimension 2 (exemple 1.2.19).

Définition 1.2.17 (éventail normal d'un polytope). Soit P un polytope dans l'espace $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ et soit F une face de P . On définit le cône normal à F par

$$C_F = \{w \in \mathbf{N}_{\mathbb{R}}^* \mid \forall x \in F, \forall y \in P, \langle w, y \rangle \leq \langle w, x \rangle\}.$$

C'est l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ maximisés sur F . On définit alors l'éventail normal de P comme étant l'éventail des cônes $(C_F)_F$ où F parcourt l'ensemble des faces de P .

Remarque 1.2.18. L'éventail normal d'un polytope est complet.

Exemple 1.2.19. On a représenté en figure 1.2 les cônes normaux (ceux de dimension 1 en noir, ceux de dimension deux en gris) du simplexe de dimension 2 (en bleu), puis l'éventail obtenu ensuite.

Remarque 1.2.20. Étant donné un éventail de $\mathbf{N}$, on appelle *rayon* toute face de dimension 1 (les demies-droites). Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{N}$, alors par définition d'un éventail de $\mathbf{N}$, chaque rayon est porté dans $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ par un vecteur à coordonnées entières dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. En particulier, chaque rayon est porté par un unique vecteur de $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ à coordonnées entières et premières dans leur ensemble. Ce vecteur est appelé *générateur primitif* du rayon.

1.2.2 Variété torique associée à un éventail

On considère $\mathbf{M} = \text{Hom}(\mathbf{N}, \mathbb{Z})$ le $\mathbb{Z}$ -module des applications $\mathbb{Z}$ -linéaires sur $\mathbf{N}$, i.e le dual de $\mathbf{N}$. C'est aussi un réseau, et de même rang que $\mathbf{N}$ (pour les mêmes raisons que le dual d'un espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à son dual). On note alors

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{array}{l} \mathbf{M} \times \mathbf{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ (\varphi, x) \longmapsto \varphi(x) \end{array}$$

la paire duale canonique.

Notation 1.2.21. Étant donné un semi-groupe G , on considère son algèbre associée $\mathbb{K}[G]$ définie comme la $\mathbb{K}$ -algèbre dont une base est $(\chi^g)_{g \in G}$, où χ vérifie $\chi^{g+h} = \chi^g \chi^h$ pour tous $g, h \in G$.

Notation 1.2.22. Si σ est un cône de $\mathbf{N}$, on pose

$$\sigma^\vee = \{u \in \mathbf{M}_{\mathbb{R}} \mid \forall v \in \sigma, \langle u, v \rangle \geq 0\}$$

le cône dual de $\mathbf{N}$. C'est en fait un cône de $\mathbf{M}$. Il donne lieu à un semi-groupe

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap \mathbf{M} = \{u \in \mathbf{M} \mid \forall v \in \sigma, \langle u, v \rangle \geq 0\}.$$

Ce semi-groupe est de type fini. On peut alors considérer son algèbre associée $\mathbb{K}[S_\sigma]$.

Définition 1.2.23 (variété affine associée à un cône de $\mathbf{N}$). Soit σ un cône de $\mathbf{N}$. On définit la variété affine correspondant à σ par

$$\mathcal{U}_\sigma = \text{Spec}(S_\sigma).$$

Remarque 1.2.24. Soit Δ un éventail de $\mathbf{N}$, et $\sigma, \tau \in \Delta$. Si σ est une face de τ , alors $\mathbb{K}[S_\tau]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}[S_\sigma]$. Or, la contravariance du foncteur spectre inverse les flèches, de sorte que l'inclusion " $\sigma \subseteq \tau$ " induit une application $\mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_\tau$. On a même mieux : par définition, on peut trouver $u \in S_\tau$ de sorte que $\sigma = \tau \cap u^\perp$. Ainsi,

$$\mathcal{U}_\sigma \cong \{x \in \mathcal{U}_\tau \mid u(x) \neq 0\}.$$

On peut donc voir $\mathcal{U}_\sigma$ comme un ouvert principal de $\mathcal{U}_\tau$.

Définition 1.2.25. Soit Δ un éventail de $\mathbf{N}$. On note $X(\Delta)$ la variété dont $(\mathcal{U}_\sigma)_{\sigma \in \Delta}$ obtenue après identifications des ouverts selon la remarque précédente : si $\sigma, \tau \in \Delta$, on identifie $\mathcal{U}_{\sigma \cap \tau}$ à un ouvert principal de $\mathcal{U}_\sigma$ et $\mathcal{U}_\tau$.

Remarque 1.2.26. Une telle variété est dite *torique*, i.e une variété contenant un ouvert dense isomorphe à un tore (i.e un ouvert de la forme $(\mathbb{K}^*)^n$), et tel que l'action du tore sur lui-même se prolonge à toute la variété en une action algébrique. Les deux remarques suivantes justifient cette appellation.

Exemple 1.2.27. Soit $\Sigma = \{\{0\}\}$ un éventail de $\mathbf{N}$, où $\mathbf{N}$ est de rang n . Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbf{N}$. Ainsi, le semi-groupe associé est $\mathbf{M}$ tout entier. Or, $\mathbf{M}$ est généré (en tant que semi-groupe) par $\pm e_1^*, \dots, \pm e_n^*$. On en déduit que

$$\mathbb{K}[\mathbf{M}] = \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}].$$

La variété associée est affine, et est exactement

$$\mathcal{U}_{\{0\}} = (\mathbb{K}^*)^n.$$

Remarque 1.2.28. Le cône trivial $\{0\}$ étant face de tout cône et en vertu de la remarque 1.2.24, toute variété associée à un éventail contient un ouvert isomorphe à un tore.

Exemple 1.2.29. Soit encore $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbf{N}$. Soit σ le cône de $\mathbf{N}$ engendré par $e_1, \dots, e_n$. Alors, on remarque (en le regardant droit dans les yeux) que S_σ est le cône de $\mathbf{M}$ engendré par $e_1^*, \dots, e_n^*$. On en déduit que $\mathbb{K}[S_\sigma] = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathcal{U}_\sigma = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$.

Exemple 1.2.30. Si Σ est l'éventail de l'exemple 1.2.12, alors $X(\Sigma) = \mathbb{P}^2$. Plus généralement, si $n \geq 1$, $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^n$, et $e_0 = -e_1 - \dots - e_n$, alors l'éventail de $\mathbb{R}^n$ dont les cônes maximaux sont les cônes $(e_i)_{i \in I}$ pour I parcourant les parties de $\llbracket 0, n \rrbracket$ a pour variété torique associée $X(\Sigma) = \mathbb{P}^n$.

1.2.3 Correspondance entre les variétés toriques et les éventails

On a vu dans la sous-section précédente qu'un éventail donnait lieu à une variété dite torique. L'inverse est en fait vrai : toute variété normale séparée X contenant un tore $\mathbb{T}^n$ comme sous-variété ouverte dense peut être notée $X(\Delta)$ pour un unique Δ .

Remarque 1.2.31. Soit Σ et Σ' deux éventails respectifs de $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}'$. Alors, si $\Sigma \times \Sigma'$ désigne l'éventail produit des deux,

$$X(\Sigma \times \Sigma') \cong X(\Sigma) \times X(\Sigma').$$

Remarque 1.2.32. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une variété torique est compacte pour la topologie classique *si et seulement si* son éventail est complet.

Chapitre 2

Matroïdes

On s'intéresse dans ce chapitre aux matroïdes, et aux liens entre ses définitions. La plus intéressante dans ce mémoire sera la définition par les clos (définition 2.1.1) qui permet de construire l'anneau de CHOW dans le chapitre 4.

Notation 2.0.1. Dans ce chapitre, E désigne sauf mention contraire un ensemble fini.

2.1 Différentes définitions

2.1.1 Définition par les clos

Définition 2.1.1. Un matroïde $M = (E, \mathcal{L}_M)$ sur E est l'ensemble E muni d'un ensemble de parties de E , appelés clos (ou flats en anglais) tel que

- (i) si $F_1, F_2 \in \mathcal{L}_M$, alors $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{L}_M$;
- (ii) si $F \in \mathcal{L}_M$, alors tout $x \in E \setminus F$ est contenu dans un unique clos couvrant F (i.e un clos minimal pour l'inclusion parmi les clos de M contenant strictement F);
- (iii) l'ensemble entier E est élément de $\mathcal{L}_M$ (propriété d'échange);
- (iv) l'ensemble vide $\emptyset$ est élément de $\mathcal{L}_M$.

Remarque 2.1.2. La quatrième condition est souvent donnée comme une propriété supplémentaire des matroïdes, qui sont alors définis avec les trois premières propriétés. Un matroïde vérifiant la quatrième condition est dit *sans boucle*. On supposera tous les matroïdes tels.

Exemple 2.1.3. Les parties de E , $M = \mathcal{P}(E)$, est un matroïde appelé *matroïde booléen*.

Exemple 2.1.4. Soit $E = G$ un graphe (ici E est l'ensemble de ses arêtes). On considère l'ensemble $\mathcal{L}_M$ des parties F de G telles qu'il n'y a pas d'arête dans $E \setminus F$ dont les sommets sont reliés par un chemin dans F . C'est un matroïde sur E , dit *graphique*.

Exemple 2.1.5 (matroïde uniforme). Soit $m \leq n$ où $n = \text{card } E$. On appelle *matroïde uniforme* le matroïde $U_{m,n}$ sur E dont l'ensemble des clos est

$$\mathcal{L}_{U_{m,n}} = \{S \in \mathcal{P}(E) \mid \text{card } S < m\} \cup \{E\}.$$

Notation 2.1.6. Si M est un matroïde, $\mathcal{L}_M$ est un poset avec l'ordre induit par l'inclusion, et où $F \wedge G = F \cap G$ et $F \vee G$ est le plus petit matroïde contenant $F \cup G$. On l'appelle *treillis des clos de M* .

Remarque 2.1.7. Ce treillis des clos admet un unique élément minimal, appelé *ensemble de toutes les boucles*, qu'on a en fait supposé vide. Il admet aussi un unique élément maximal, i.e E .

Définition-proposition 2.1.8. Soit M un matroïde. Le treillis $\mathcal{L}_M$ est gradué, i.e toute chaîne de clos maximale a la même longueur, appelée *rang de M* .

Démonstration. C'est un résultat de la théorie des treillis. Soit un treillis $(\mathcal{L}, \leq, \wedge, \vee)$ qui vérifie la propriété suivante : "si pour tout $x, y \in \mathcal{L}$, x et y recouvre $x \cap y$, alors $x \vee y$ recouvre x et y ". Alors, le treillis $\mathcal{L}$ est gradué. Ce résultat est démontré dans [Sta99, page 102].

□

Définition 2.1.9. Une géométrie projective (P, L) est un ensemble P muni d'un ensemble de parties L , appelés droites telles que

- (i) deux points distincts de P sont contenus dans exactement une droite (notée xy);
- (ii) toute droite contient strictement plus de deux points;
- (iii) si $x, y, z, w \in P$ sont des points distincts, non trois à trois colinéaires, alors si la droite xy intersecte zw , la droite xz intersecte yw .

Remarque 2.1.10. Les espaces projectifs issus d'espaces vectoriels sont évidemment des exemples de géométrie projective.

Définition 2.1.11. Si P est une géométrie projective, une partie Q de P est dit être un sous-espace de P si pour tout $x, y \in Q$, la droite xy est contenue dans Q .

Remarque 2.1.12. Une géométrie projective admet une structure naturelle de matroïde en considérant l'ensemble de ses sous-espaces comme clos. L'intersection d'une géométrie projective avec n'importe laquelle de ses parties finies hérite à son tour d'une structure de matroïde.

Définition 2.1.13. Soit k un corps. Un matroïde M est dit être réalisable sur k si M peut être construit comme le matroïde d'une partie finie d'un espace projectif sur k , i.e comme une partie finie d'un $\mathbb{P}(V)$ où V est un k -espace vectoriel.

2.1.2 Définition par les indépendants (et les bases)

On propose une définition équivalente d'un matroïde en fonction de ses parties indépendantes.

Définition 2.1.14. Un matroïde M sur E est un ensemble de parties $\mathcal{I}$ appelées parties indépendantes telles que

- (i) l'ensemble vide $\emptyset$ est indépendant ;
- (ii) si $A \subseteq B$ sont des parties de E et B est indépendante, alors A est indépendante ;
- (iii) si A et B sont des parties indépendantes de E telles que $\text{card } A < \text{card } B$, alors il existe $b \in B$ tel que $A \cup \{b\}$ est une partie indépendante vérifiant $\text{card}(A \cup \{b\}) > \text{card } A$.
- (iv) tout singleton de E est indépendant.

Remarque 2.1.15. La condition d'être *sans boucle* (que l'on suppose acquise pour tout matroïde) correspond à la quatrième condition ci-dessus.

Exemple 2.1.16 (matroïde uniforme, encore). Le matroïde uniforme $U_{m,n}$ (vu en exemple 2.1.5) est le matroïde sur E (de cardinal n) dont l'ensemble des parties libres est

$$\mathcal{I}_{U_{m,n}} = \{I \in \mathcal{P}(E) \mid \text{card } I \leq m\}.$$

Pour montrer que les deux notions de matroïdes présentées sont équivalentes, on définit le rang d'une partie de E . Cette définition nous permettra de passer d'une définition à l'autre.

Définition 2.1.17. Soit M un matroïde (défini tel qu'en définition 2.1.14) et S une partie de E . On appelle rang de S le cardinal de toute partie indépendante maximale de S , noté $\text{rg}_M(S)$.

Remarque 2.1.18. On appelle alors rang de M le rang de E . Une fois l'équivalence des définitions démontrée, on verra que ce rang est le même que celui de la définition 2.1.8.

On établit l'équivalence entre les deux définitions.

Définition 2.1.19. Soit M un matroïde selon la définition 2.1.14. Alors, un clos de M est défini comme une partie F de E maximale parmi les éléments de même rang de M .

Remarque 2.1.20. Cette définition permet de passer d'un matroïde défini en termes de parties indépendantes en un matroïde défini en termes de clos. On fera le chemin inverse plus tard avec la fonction rang (voir le théorème 2.1.33).

On décrit ci-après d'autres exemples déjà abordés de matroïdes mais cette fois-ci décrits par leurs parties indépendantes.

Exemple 2.1.21. Soit G un graphe fini et E l'ensemble de ses arêtes. On définit une structure de matroïde sur M en déclarant indépendantes les parties de E sans circuit (au sens des graphes). Dans l'équivalence *matroïdes de parties closes* et *matroïdes de parties indépendantes*, cette définition correspond à la définition des matroïdes graphiques (voir exemple 2.1.4). Le matroïde associé à G sera naturellement sans boucle *si et seulement si* G l'est.

Exemple 2.1.22. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E une partie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une partie indépendante est simplement défini comme une partie libre. Cela définit un matroïde réalisable sur k .

Remarque 2.1.23 (définition d'un matroïdes par la description de ses bases). Puisque qu'une partie d'une partie indépendante est indépendante, il suffit de connaître les familles indépendantes *maximales*. De telles parties du matroïde sont appelées les *bases*.

Remarque 2.1.24. La description d'un matroïde en terme de ses bases rend certaines définitions plus commodes.

Définition 2.1.25. Un matroïde M est la donnée d'un couple $(E, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$, appelée ensemble des bases, est un ensemble non vide parties de E tel que si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, alors pour tout $x \in B_1 \setminus B_2$, il existe $y \in B_2 \setminus B_1$ tel que $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Remarque 2.1.26. Les bases permettent de définir facilement le *dual* d'un matroïde : étant donné un matroïde M dont on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases, le *dual* de M (noté M^*) est le matroïde sur E dont une base est $\mathcal{B}^* = \{E \setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$.

Exemple 2.1.27 (matroïde uniforme). Le matroïde uniforme $U_{m,n}$ a pour ensemble l'ensemble des parties de E de cardinal m .

2.1.3 Définition par la fonction rang

On a vu dans lors de l'étude des définitions d'un matroïde en fonction de ses clos et de ses parties indépendantes la notion de rang. Cette fonction de rang émule la fonction de rang sur les familles de vecteur d'un espace vectoriel. En fait, cette même fonction caractérise le matroïde dont elle provient.

Définition 2.1.28. Un matroïde est un couple (E, rg) où E est un ensemble fini et $\text{rg} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction (dite de rang) telle que

- (i) pour tout partie A de E , $\text{rg}(A) \leq \text{card } A$;
- (ii) la fonction rang rg est croissante pour l'inclusion;
- (iii) pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$ non vide,

$$\text{rg}(A \cup B) + \text{rg}(A \cap B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B);$$

- (iv) pour tout $x \in E$, $\text{rg}(\{x\}) = 1$

Notation 2.1.29. On note $\text{rg}(M) := \text{rg}(E)$ le rang du matroïde M .

Remarque 2.1.30. Le matroïde uniforme $U_{m,n}$ a pour fonction rang

$$\text{rg}_{U_{m,n}} : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow \mathbb{N} \\ S & \longmapsto \min(\text{card } S, m) \end{cases}.$$

Remarque 2.1.31. La quatrième condition correspond à être *sans boucle*. Elle implique d'ailleurs que l'ensemble vide est la seule partie de rang nul.

Remarque 2.1.32. Les quatre définitions proposées de matroïdes sont équivalentes, ce qu'on admet dans le cadre de ce mémoire. On peut utiliser le théorème suivant comme dictionnaire pour travailler avec les différentes notions.

Théorème 2.1.33. Soit M un matroïde sur E de fonction rang rg .

- Une partie F de E est un clos de M si et seulement si elle est maximale parmi les parties de même rang, i.e si pour tout $x \in E \setminus F$, $\text{rg}(F \cup \{x\}) > \text{rg}(F)$.
- Une partie A de E est indépendante si et seulement si $\text{rg } A = \text{card } A$.
- Une partie de B de E est une base si et seulement si $\text{card } B = \text{rg}(B) = \text{rg}(M)$.

2.1.4 Définition par l'opérateur de clôture

Définition 2.1.34. Soit M un matroïde sur E et X une partie de E . On appelle clôture de X le plus petit clos de M contenant X , i.e

$$\text{cl}(X) = \bigcap_{\substack{F \in \mathcal{L}_M \\ X \subseteq F}} F.$$

Cette application est appelée *opérateur de clôture* de M .

Remarque 2.1.35. En termes de rang, la clôture d'une partie X est exactement

$$\text{cl}(X) = \{x \in E \mid \text{rg}(X \cup \{x\}) = \text{rg}(X)\}.$$

En particulier,

$$\text{rg}(X) = \text{rg}(\text{cl}(X)).$$

Proposition 2.1.36. L'opérateur de clôture d'un matroïde sans boucle vérifie les propriétés suivantes.

- (i) Si $X \subseteq E$, alors $X \subseteq \text{cl}(X)$.
- (ii) L'opérateur de clôture est croissant pour l'inclusion.
- (iii) Pour tout $X \subseteq E$, $\text{cl}(\text{cl}(X)) = \text{cl}(X)$.
- (iv) Si $X \subseteq E$, $x \in X$, et $y \in \text{cl}(X \cup \{x\}) \setminus \text{cl}(X)$, alors $x \in \text{cl}(X \cup \{y\})$.
- (v) L'opérateur de clôture vérifie $\text{cl}(\emptyset) = \emptyset$.

Remarque 2.1.37 (importante, mais pas pour ce mémoire). L'opérateur de clôture *détermine* le matroïde. On peut montrer qu'un opérateur vérifiant les cinq propriétés de la proposition précédente est un opérateur de clôture d'un matroïde.

Définition 2.1.38. Soit M un matroïde sur E et $X, Y \subseteq E$. On dit que X engendre Y si $Y \subseteq \text{cl}(X)$.

Remarque 2.1.39. On peut passer facilement d'une définition à l'autre d'un matroïde avec les observations suivantes. Soit $X \subseteq E$.

- La partie X est close si et seulement si $\text{cl}(X) = X$.

- La partie X est une base *si et seulement si* elle est indépendante et génératrice de X .
- La partie X est une base *si et seulement si* elle est génératrice de X et minimale parmi les générateurs de X .

2.1.5 Circuits

Étant donné un matroïde M sur E , on appelle partie *dépendante* toute partie de E qui n'est pas indépendante.

Définition 2.1.40. Soit M un matroïde. On appelle circuit de M toute partie non vide dépendante minimale.

Remarque 2.1.41. Une *boucle* est un circuit de cardinal 1. On a supposé dans ce mémoire que tous les matroïdes en étaient dépourvus.

Remarque 2.1.42. Les circuits caractérisent les matroïdes de par certaines de leurs propriétés. Nous n'utiliserons ni ces propriétés ni ce fait dans ce mémoire.

2.2 Constructions associées

2.2.1 Somme directe

Définition-proposition 2.2.1 (somme directe). Soient E_1 et E_2 des ensembles finis d'intersection vide. Soit alors M_1 et M_2 des matroïdes respectivement sur E_1 et E_2 . On définit la somme directe de M_1 et M_2 comme le matroïde sur $E_1 \cup E_2$

$$M_1 \oplus M_2 = \{F_1 \cup F_2 \mid (F_1, F_2) \in M_1 \times M_2\}.$$

Démonstration. □

2.2.2 Restriction, contraction, suppression

Définition 2.2.2 ([Eur23]). Soit M un matroïde sur E et A une partie de E . On définit les matroïdes

- (restriction). La restriction de M à A est le matroïde M^A sur A définit par la fonction rang $\text{rg}_{M^A} = \text{rg}_M|_{\mathcal{P}(A)}$

$$\text{rg}_{M^A} : \begin{cases} \mathcal{P}(A) & \longrightarrow \mathbb{N} \\ S & \longmapsto \text{rg}_M(S) \end{cases}.$$

- (contraction). La contraction de M à A est le matroïde M_A sur $E \setminus A$ définit par la fonction rang rg_{M_A}

$$\text{rg}_{M_A} : \begin{cases} \mathcal{P}(E \setminus A) & \longrightarrow \mathbb{N} \\ S & \longmapsto \text{rg}_M(S \cup A) - \text{rg}_M(A) \end{cases}.$$

- (suppression). La suppression $M \setminus A$ est le matroïde de restriction de M à $E \setminus A$ (et est donc un matroïde sur A).

Remarque 2.2.3. La restriction et la contraction d'un matroïde par une partie de E est souvent difficile à décrire en termes de clos. Elle est cependant plus commode lorsque l'on restreint ou contracte par un clos. Si M est un matroïde sur E et F en est un clos, alors

$$\mathcal{L}_{M^F} = \{G \mid G \in \mathcal{L}_M, G \subseteq F\} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{M_F} = \{G \setminus F \mid G \in \mathcal{L}_M, F \subseteq G\}.$$

On dispose d'un résultat similaire lorsque A est un singleton.

Proposition 2.2.4. Soit M un matroïde sur E et $e \in M$. On a

$$M \setminus \{e\} = \{F \setminus e \mid F \in M\}$$

et

$$M_{\{e\}} = \{F \setminus e \mid F \in M, e \in F\}.$$

2.3 Polynôme caractéristique

On introduit le polynôme caractéristique d'un matroïde qui généralise le principe du polynôme chromatique d'un graphe.

Étant donné un graphe G , on note $\chi_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à un entier $k \geq 0$ lui associe le nombre de coloriage à k couleurs sur le graphe G . Un résultat classique est que cette fonction est interpolée par un unique polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, qu'on note toujours $\chi_G \in \mathbb{Z}[X]$. On peut remarquer par exemple que le théorème des quatre couleurs se reformule ainsi : pour tout graphe planaire sans boucle G , $\chi_G(4) > 0$. On pourra se référer à [GR01, 15.8] pour plus de détails sur le polynôme chromatique.

Définition-proposition 2.3.1. Soit M un matroïde. Le polynôme caractéristique d'un matroïde M est le polynôme $\chi_M \in \mathbb{Z}[X]$ défini récursivement par les relation suivantes.

- (i) Si M est le matroïde de rang 0 sur un singleton, alors $\chi_M = 0$.
- (ii) Si M est le matroïde de rang 1 sur un singleton, alors $\chi_M = X - 1$.
- (iii) (relation de suppression-contraction). Si M n'est pas décomposable en somme directe de matroïdes, alors pour tout élément $e \in E$,

$$\chi_M = \chi_{M \setminus \{e\}} - \chi_{M_{\{e\}}}.$$

- (iv) Si M est décomposable en somme directe $M = M_1 \oplus M_2$, alors

$$\chi_M = \chi_{M_1} \chi_{M_2}.$$

Remarque 2.3.2. Grâce à la fonction de MöBIUS sur les ensembles partiellement ordonnés, on peut montrer que le polynôme caractéristique est bien défini *via* les quatre axiomes détaillés ci-avant.

Remarque 2.3.3. On peut montrer par récurrence sur le cardinal de E que $\chi_M(1) = 0$: si $\text{card } E = 1$, alors M est de rang 0 ou 1 et donc $\chi_M \in \{0, X - 1\}$. Soit ensuite $n \geq 2$ et

supposons que $\chi_M(1) = 0$ pour tout matroïde M sur un ensemble de cardinal $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit alors M un matroïde sur E de cardinal n .

- Si $M = M_1 \oplus M_2$ avec M_1 sur E_1 et M_2 sur E_2 avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, alors $\chi_M(1) = \chi_{M_1}(1)\chi_{M_2}(1) = 0$ puisque $\text{card } E_1, \text{card } E_2 < n$.
- Si M n'est pas décomposable en somme directe, on choisit $e \in E$, et alors

$$\chi_M(1) = \chi_{M \setminus \{e\}}(1) - \chi_{M|_{\{e\}}}(1) = 0.$$

Ainsi, on peut considérer le polynôme $\chi_M/(X-1) \in \mathbb{Z}[X]$. On note $\bar{\chi}_M := \chi_M/(X-1)$ ce polynôme appelé *caractéristique réduit*.

Théorème 2.3.4. *La suite des valeurs absolues des coefficients du polynôme caractéristique d'un matroïde est log-concave, i.e si cette suite est notée $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ alors pour tout $i \geq 0$,*

$$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}.$$

Remarque 2.3.5. Si G est un graphe de polynôme chromatique χ_G , et si M désigne son matroïde graphique associé,

$$\chi_G = X^{n_G} \chi_M$$

où n_G est le nombre de composantes connexes de G .

2.4 Fonction de Möbius d'un matroïde

Si M est un matroïde, on a considéré en sous-section 2.1.1 le treillis $\mathcal{L}_M$ de ses clos. C'est en fait un poset lorsqu'il est muni de l'inclusion ensembliste. On peut alors s'intéresser à sa fonction de Möbius. On propose un court rappel en la matière.

Définition-proposition 2.4.1. *Soit $(\mathcal{L}, \leq)$ un poset (fini). Il existe une unique fonction $\mu_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que*

- pour tous $x, y \in \mathcal{L}$ tels que $x \not\leq y$, alors $\mu_{\mathcal{L}}(x, y) = 0$;
- pour tout $x \in \mathcal{L}$, $\mu_{\mathcal{L}}(x, x) = 1$;
- pour tout $x, y \in \mathcal{L}$ tels que $x < y$,

$$\mu_{\mathcal{L}}(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu_{\mathcal{L}}(x, z),$$

appelé fonction de Möbius.

Démonstration. Admis. □

Notation 2.4.2. Si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_M$ est le poset d'un matroïde, on note simplement μ_M plutôt que $\mu_{\mathcal{L}_M}$.

Remarque 2.4.3. Les fonctions de MÖBIUS de matroïdes ne sont pas quelconques dans la classe des fonctions de MÖBIUS des posets. Ils vérifient par exemple le théorème de ROTA : si F et G sont des clos de M tels que $F \subseteq G$, alors

$$(-1)^{\text{rg}_M(G) - \text{rg}_M(F)} \mu_M(F, G) > 0.$$

Théorème 2.4.4 (WEISNER). Soit F un clos de M et $i \in F$. Si $F_1, \dots, F_m$ sont exactement les clos de M couverts par F et ne contenant pas i , alors

$$\mu_M(\emptyset, F) = - \sum_{j=1}^m \mu_M(\emptyset, F_j).$$

Remarque 2.4.5. Si M n'est pas supposé sans boucle, on remplace l'ensemble vide par l'ensemble des circuits, et la formule reste valide pour peu que i ne soit pas un circuit.

Proposition 2.4.6. Le polynôme caractéristique vérifie l'égalité

$$\chi_M(X) = \sum_{F \in \mathcal{L}_M} \mu_M(\emptyset, F) X^{\text{rg}_M(E) - \text{rg}_M(F)}.$$

Remarque 2.4.7. Cette égalité fait à son tour apparaître le fait que $\chi_M(1) = 0$. En effet,

$$\chi_M(1) = \sum_{F \in \mathcal{L}_M} \mu_M(\emptyset, F) = \sum_{F \subsetneq E} \mu_M(\emptyset, F) + \mu_M(\emptyset, E) = 0.$$

Remarque 2.4.8. Selon le théorème de ROTA énoncé en remarque 2.4.3, la suite des coefficients du polynôme caractéristique est alternée. Il en est de même pour le polynôme caractéristique réduit.

2.5 Relations de HODGE-RIEMANN pour les matroïdes

2.5.1 Anneau de CHOW et énoncé

On considère toujours un ensemble fini E sur lequel on définira des matroïdes.

Définition 2.5.1. Soit M un matroïde (sans boucle) sur E . On considère une algèbre de polynômes en autant de variables que de clos propres non vides de M ,

$$S^*(M) = \mathbb{R}[(X_F)_{F \in M \setminus \{\emptyset, E\}}].$$

L'anneau de CHOW de M est l'anneau $A^*(M)_{\mathbb{R}}$, quotient de $S^*(M)$ par les idéaux de $S^*(M)$ générés par les formes linéaires

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{L}_M^* \\ i_1 \in F}} X_F - \sum_{\substack{G \in \mathcal{L}_M^* \\ i_2 \in G}} X_G$$

et les monômes quadratiques

$$X_F X_G$$

pour tout F et G clos de M propres non vides incomparables. On note x_i l'image de X_i dans le quotient.

Remarque 2.5.2. Ces deux anneaux sont des $\mathbb{R}$ -algèbres graduées. On notera respectivement $S^i(M)$ et $A^i(M)_{\mathbb{R}}$ les composantes de degré i dans ces algèbres.

Proposition 2.5.3. Soit $d = \text{rg}(M) - 1$. Il existe un isomorphisme linéaire

$$\deg : A^d(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant

$$\deg(x_{F_1} \cdots x_{F_d}) = 1$$

pour toute chaîne maximal de clos propres non vides $F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_d$.

Ce résultat est démontré plus tard, voir définition 4.2.29.

Définition 2.5.4. On définit l'application bilinéaire $P(M)$

$$P : \begin{array}{c} A^*(M)_{\mathbb{R}} \times A^{d-*}(M)_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \deg(xy) \end{array}.$$

Définition 2.5.5. Une fonction $c : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ est dite strictement sous-modulaire si

$$c(\emptyset) = c(E) = 0$$

et si pour tous $I, J \subseteq E$ incomparables,

$$c(I) + c(J) > c(I \cap J) + c(I \cup J).$$

Notation 2.5.6. On notera plutôt c_I que $c(I)$ pour tout $I \in \mathcal{P}(E)$.

Remarque 2.5.7. De telles fonctions existent : par exemple si $c_I = \text{card}(I) \text{card}(E \setminus I)$.

Remarque 2.5.8. Une telle fonction définit un élément de $A^1(M)_{\mathbb{R}}$, i.e

$$L(c) = \sum_F c_F x_F,$$

la somme portant sur les clos de F . Cet élément de $A^1(M)$ permet de définir par multiplication une application linéaire

$$\left| \begin{array}{ccc} A^*(M)_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & A^{*+1}(M)_{\mathbb{R}} \\ x & \longmapsto & L(c)x \end{array} \right.$$

On peut alors énoncer le résultat principal de ce mémoire, que nous démontrerons.

Théorème 2.5.9 (relations de HODGE-RIEMANN). *Soit M un matroïde sans boucle, $d = \text{rg}(M) - 1$, et $q \leq d/2$ un entier positif.*

(i) (Dualité de POINCARÉ). *Le produit dans $A^*(M)_{\mathbb{R}}$ définit une forme bilinéaire non dégénérée*

$$P : \left| \begin{array}{ccc} A^q(M)_{\mathbb{R}} \times A^{d-q}(M)_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \deg(xy) \end{array} \right.$$

(ii) (LEFSCHETZ difficile). *La multiplication par $L(c)$ définit un isomorphisme*

$$\left| \begin{array}{ccc} A^q(M)_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & A^{d-q}(M)_{\mathbb{R}} \\ x & \longmapsto & L(c)^{d-2q}x \end{array} \right.$$

(iii) (Relations de HODGE-RIEMANN). *La forme bilinéaire symétrique*

$$\left| \begin{array}{ccc} A^q(M)_{\mathbb{R}} \times A^q(M)_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (-1)^q P(x_1, L(c)^{d-2q}x_2) \end{array} \right.$$

est définie positive sur le noyau de l'application linéaire de multiplication

$$\left| \begin{array}{ccc} A^q(M)_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & A^{d-q+1}(M)_{\mathbb{R}} \\ x & \longmapsto & L(c)^{d-2q+1}x \end{array} \right.$$

Chapitre 3

Construction sur les ensembles finis et leurs parties

On construit dans ce chapitre les outils vectoriels et combinatoires élémentaires nécessaires à la construction de la démonstration du théorème principal.

3.1 Constructions vectorielles associées

Soit E un ensemble fini de cardinal $n+1$ (très souvent $\llbracket 0, n \rrbracket$). On note $\mathbb{Z}^E$ le $\mathbb{Z}$ -module libre de rang $n+1$, donc la base canonique est $(e_i)_{i \in E}$. On étend cette notation en écrivant $e_I = \sum_{i \in I} e_i$ pour toute partie I de E avec la convention $e_\emptyset = 0$. On associe à E deux $\mathbb{Z}$ -modules libres $\mathbf{N}_E = \mathbb{Z}^E / \mathbb{Z}e_E$ et $\mathbf{M}_E = e_E^\perp \subseteq \mathbb{Z}^E$, où le produit scalaire est le produit scalaire canonique associée à la base $(e_i)_{i \in E}$. En particulier, on a une paire duale grâce au produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{N}_E \times \mathbf{M}_E \rightarrow \mathbb{Z}.$$

On peut par ailleurs chacun leur associer un espace vectoriel réel, *i.e*

$$\mathbf{N}_{E, \mathbb{R}} = \mathbf{N}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{E, \mathbb{R}} = \mathbf{M}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Puisque $\mathbf{N}_E$ et $\mathbf{M}_E$ se plongent respectivement dans $\mathbf{N}_{E, \mathbb{R}}$ et $\mathbf{M}_{E, \mathbb{R}}$, on conserve les notations e_i et e_I dans ces espaces vectoriels.

On observe ensuite quelques propriétés de ces espaces ainsi que les relations qu'ils les relient.

Remarque 3.1.1. Si $i_0 \in E$, la famille $(e_i - e_{i_0})_{i \neq i_0}$ est une base de $\mathbf{M}_E$.

Remarque 3.1.2. Si F est une partie non vide de E , on peut considérer $\mathbf{N}_F$ et $\mathbf{M}_F$ comme décrit plus haut et l'on dispose d'une application linéaire *surjective*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}_E & \longrightarrow & \mathbf{N}_F \\ e_I & \longmapsto & e_{I \cap F} \end{array} \right.$$

De même, on dispose d'une application linéaire *injective*

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{M}_F & \longrightarrow & \mathbf{M}_E \\ e_i - e_j & \longmapsto & e_i - e_j \end{array} \right.$$

(cette application est bien définie selon la remarque précédente).

Remarque 3.1.3. Dans l'espace $\mathbf{M}_E$, on peut remarquer que $e_F^\perp = e_{F \setminus E}^\perp$. On a justement un isomorphisme

$$e_F^\perp = e_{E \setminus F}^\perp \cong \mathbf{M}_F \oplus \mathbf{M}_{F \setminus E}.$$

De manière duale, on a un isomorphisme sur le quotient

$$\mathbf{N}_E / \mathbb{Z}e_F = \mathbf{N}_E / \mathbb{Z}e_{E \setminus F} \cong \mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E \setminus F}.$$

Cet isomorphisme envoie e_I sur $e_{I \cap F} \oplus e_{I \setminus F}$.

Remarque 3.1.4. Si E_1 et E_2 sont deux ensembles finis et $\pi : E_1 \rightarrow E_2$ est une application, il existe un morphisme associé

$$\pi_{\mathbf{N}} : \begin{cases} \mathbf{N}_{E_2} & \longrightarrow & \mathbf{N}_{E_1} \\ e_I & \longmapsto & e_{\pi^{-1}(I)} \end{cases}$$

ainsi qu'un morphisme dual

$$\pi_{\mathbf{M}} : \begin{cases} \mathbf{M}_{E_1} & \longrightarrow & \mathbf{M}_{E_2} \\ e_i - e_j & \longmapsto & e_{\pi(i)} - e_{\pi(j)} \end{cases}.$$

On peut remarquer que lorsque π est surjectif, $\pi_{\mathbf{N}}$ est injectif tandis que $\pi_{\mathbf{M}}$ est surjective.

3.2 Drapeaux de parties

Notation 3.2.1. On note $\mathcal{P}^*(E)$ le poset des parties propres et non vides de E , i.e

$$\mathcal{P}^*(E) = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}.$$

Dans cette sous-section, on travaille avec un drapeau

$$\mathcal{F} = (F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_\ell) \subseteq \mathcal{P}^*(E).$$

On note $\min \mathcal{F}$ l'intersection des F_i . Si le drapeau $\mathcal{F}$ est vide, ce minimum est E tout entier.

Définition 3.2.2. Si I est une partie non vide de $\min \mathcal{F}$, on dit que I est compatible avec le drapeau $\mathcal{F}$ dans E , ce que l'on note $I < \mathcal{F}$.

Notation 3.2.3. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des drapeaux sur $\mathcal{P}^*(E)$, on dit que $\mathcal{F}$ est inclus dans $\mathcal{G}$ si $\mathcal{F}$ est inclus dans $\mathcal{G}$ en tant qu'ensembles de parties de E . On note cela $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Remarque 3.2.4. L'ensemble des couples compatibles de E forment un poset avec la relation $\leq$ définie par

$$(I < \mathcal{F}) \leq (J < \mathcal{G}) \iff I \subseteq J \text{ et } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}.$$

Remarque 3.2.5. Toute paire compatible maximale $I < \mathcal{F}$ correspond à une base de $\mathbf{N}_E$, i.e

$$(e_i)_{i \in I} \cup (e_F)_{F \in \mathcal{F}}.$$

Pour montrer cela, on peut observer que si $I < \mathcal{F}$ est une paire compatible maximale, alors $\mathcal{F} = (F_1 \cap \dots \cap \mathcal{F}_\ell)$ avec $\text{card } F_{k+1} = \text{card } F_k + 1$ (si ce n'était pas le cas, on pourrait intercaler une partie de E entre F_k et F_{k+1} et trouver une paire compatible strictement plus grande), $\text{card } I = \text{card min } \mathcal{F} - 1$, et $\text{card } F_\ell = \text{card } E - 1 = n$. Ainsi, la matrice de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{N}_E$ à $(e_i)_{i \in I} \cup (e_F)_{F \in \mathcal{F}}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots & 1 & \ddots & & 1 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant clairement inversible, on obtient le résultat.

3.3 Complexes et éventails de BERGMAN

Si $I < \mathcal{F}$ est une paire compatible dans E , on peut lui associer deux polyèdres.

Définition 3.3.1. Soit $I < \mathcal{F}$ une paire compatible dans E . On définit

$$\Delta_{I < \mathcal{F}} = \text{conv}(\{e_i \mid i \in I\} \cup \{e_F \mid F \in \mathcal{F}\}) \subseteq N_{E, \mathbb{R}}$$

et

$$\sigma_{I < \mathcal{F}} = \text{cône}(\{e_i \mid i \in I\} \cup \{e_F \mid F \in \mathcal{F}\}) \subseteq N_{E, \mathbb{R}}$$

Remarque 3.3.2. On a remarqué que les couples compatibles maximaux donnent lieu à des bases de $\mathbf{N}_E$. Ainsi, le polytope $\Delta_{I < \mathcal{F}}$ est un simplexe puisque $n + 1$ non contenus dans un même hyperplan engendrent un simplexe de dimension n . De plus, $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ est unimodulaire puisque qu'alors c'est un cône engendré par des éléments d'une base de $\mathbf{N}_E$.

Remarque 3.3.3. Si $I = \{i\}$ est un singleton compatible avec un drapeau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}^*(E)$,

$$\Delta_{\{i\} < \mathcal{F}} = \Delta_{\emptyset < \{\{i\}\} \cup \mathcal{F}}$$

et

$$\sigma_{\{i\} < \mathcal{F}} = \sigma_{\emptyset < \{\{i\}\} \cup \mathcal{F}}$$

où $\{\{i\}\} \cup \mathcal{F}$ est le drapeau $\mathcal{F}$ augmenté avec le singleton $\{i\}$ en première position.

Remarque 3.3.4 (rappel). On rappelle étant donné deux espaces topologiques X et Y , on peut définir le joint $X \star Y$, qui consiste à construire les segments entre les points de X et Y . En particulier si X et Y sont des parties d'un espace euclidien

$$X \star Y = \{tx + (1 - t)y \mid (x, y, t) \in X \times Y \times [0, 1]\}.$$

Dans le cadre de l'étude des simplexes, on peut remarquer que le joint de deux simplexes est aussi un simplexe.

Remarque 3.3.5. Toute partie propre de E est compatible avec le drapeau vide, et l'ensemble vide est compatible avec tout drapeau de $\mathcal{P}^*(E)$. On peut alors décomposer $\Delta_{I<\mathcal{F}}$ de la manière suivante :

$$\Delta_{I<\mathcal{F}} = \Delta_{I<\emptyset} \star \Delta_{\emptyset<\mathcal{F}}.$$

On peut en dire autant de $\sigma_{I<\mathcal{F}}$ qui se décompose ainsi :

$$\sigma_{I<\mathcal{F}} = \sigma_{I<\emptyset} + \sigma_{\emptyset<\mathcal{F}}.$$

Remarque 3.3.6. L'ensemble des simplexes de la forme $\Delta_{I<\mathcal{F}}$ est en fait un complexe simplicial puisque l'on peut montrer que si $(I, \mathcal{F})$ et $(J, \mathcal{G})$ sont des couples compatibles tels que $\text{card } I \neq 1$ et $\text{card } J \neq 1$, alors

$$\Delta_{I<\mathcal{F}} \cap \Delta_{J<\mathcal{G}} = \Delta_{I \cap J, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}}.$$

Si I ou J est de cardinal 1, il suffit d'utiliser la remarque 3.3.3 pour se ramener à un autre drapeau et utiliser la formule ci-dessus.

Définition 3.3.7. Une partie $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*(E)$ est dit être un filtre si pour tout $F, G \in \mathcal{P}^*(E)$ tels que $F \subseteq G$ et $F \in \mathcal{P}$, alors $G \in \mathcal{P}$.

Définition 3.3.8. Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*(E)$ un filtre. On définit l'ensemble de simplexes

$$\Delta_{\mathcal{P}} = \{\Delta_{I<\mathcal{F}} \mid I \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{P}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}\}$$

appelé complexe de BERGMAN. On lui associe aussi l'éventail de BERGMAN, qui est l'ensemble des cônes simpliciaux

$$\Sigma_{\mathcal{P}} = \{\sigma_{I<\mathcal{F}} \mid I \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{P}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}\}.$$

Remarque 3.3.9. Comme la définition le laisse entendre, le complexe de BERGMAN est un complexe simplicial. En effet, l'on dispose de $\Delta_{I<\mathcal{F}}$ et $\Delta_{J<\mathcal{G}}$ des couples compatibles avec $I, J \notin \mathcal{P}$ et $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}$ tels que I et J ne sont pas de cardinal 1, alors selon la remarque 3.3.6, leur intersection n'est autre que $\Delta_{I \cap J, \mathcal{F} \cap \mathcal{G}}$ qui vérifie $I \cap J \notin \mathcal{P}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}$. De plus, si $(I, \mathcal{F})$ est un couple compatible tel que $I \notin \mathcal{P}$ et $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$, alors considérer une face de $\Delta_{I<\mathcal{F}}$ revient à considérer l'enveloppe convexe d'une partie de $\{e_i \mid i \in I\} \cup \{e_F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Notons I' la partie des indices de I en jeu et $\mathcal{F}'$ le drapeau des indices. Puisque $I' \subseteq I$, que I n'est pas élément de $\mathcal{P}$ et que $\mathcal{P}$ est un filtre, il apparait que I' n'est pas non plus élément de $\mathcal{P}$. De plus, $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$.

Exemple 3.3.10. Si $\mathcal{P} = \emptyset$, $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est l'éventail normal du simplexe standard de dimension n .

Exemple 3.3.11. Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*(E)$, alors $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est l'éventail normal du permutoèdre de dimension n

$$\Pi_n = \text{conv}(\{(\sigma(0), \dots, \sigma(n)) \mid \sigma \in \mathcal{S}(\llbracket 0, n \rrbracket)\}).$$

Les observations des deux derniers exemple cherchant à réaliser les éventails de BERGMAN sont unifiés dans la proposition suivante, qui justifie l'appellation de $\Sigma_{\mathcal{P}}$.

Proposition 3.3.12. *Pour tout filtre $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}^*(E)$, $\Sigma_{\mathcal{P}}$ est l'éventail normal d'un polytope.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\Sigma_{\mathcal{P}}$ peut être obtenu à partir de $\Sigma_{\emptyset}$ via une suite de subdivisions stellaires. Cela signifiera qu'un polytope d'éventail normal $\Sigma_{\mathcal{P}}$ peut être obtenu en tronquant plusieurs fois les faces du simplexe standard de dimension n .

Soit donc

$$\emptyset, \dots, \mathcal{P}_-, \mathcal{P}_+, \dots, \mathcal{P}$$

une suite de filtre où l'on ajoute un sous-ensemble à la fois. En particulier, on note $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- \cup \{Z\}$. On a donc une suite de modifications qui interpolent entre $\Sigma_{\emptyset}$ et $\Sigma_{\mathcal{P}}$

$$\Sigma_{\emptyset} \rightsquigarrow \dots \Sigma_{\mathcal{P}_-} \rightsquigarrow \Sigma_{\mathcal{P}_+} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \Sigma_{\mathcal{P}},$$

la modification $\Sigma_{\mathcal{P}_-} \rightsquigarrow \Sigma_{\mathcal{P}_+}$ consistant à remplacer les cônes de la forme $\sigma_{Z < \mathcal{F}}$ avec ceux de la forme $\sigma_{\emptyset < Z} + \sigma_{I < \mathcal{F}}$ où $I \subsetneq Z$. Cette modification n'est autre que la sous-division stellaire de $\Sigma_{\mathcal{P}_-}$ par rapport au cône $\sigma_{Z < \emptyset}$. Or, une sous-division stellaire de l'éventail normal d'un polytope est l'éventail normal d'un polytope. Le résultat est donc montré par récurrence puisque $\Sigma_{\emptyset}$ est l'éventail normal du simplexe de dimension n . $\square$

3.4 Clos des matroïdes

Soit M un matroïde de rang $d + 1$. On note $\mathcal{L}_M^*$ le poset de ses clos propres non vides. Si $F \in \mathcal{L}_M^*$, on note M^F la restriction de M à F et M_F la contraction de M à F . Le matroïde M^F est un matroïde sans boucle sur F de rang $\text{rg}_M(F)$, tandis que M_F est un matroïde sans boucle sur $E \setminus F$ de rang $\text{crg}_M(F)$. On dispose par ailleurs d'injections

$$i^F : \begin{array}{c} \mathcal{L}_{M^F}^* \longrightarrow \mathcal{L}_M^* \\ G \longmapsto G \end{array} \quad \text{et} \quad i_F : \begin{array}{c} \mathcal{L}_{M_F}^* \longrightarrow \mathcal{L}_M^* \\ G \longmapsto G \cup F \end{array}.$$

La seconde injection permet d'identifier les clos de M_F avec les clos de M contenant F . De plus, si $A \subseteq \mathcal{L}_M^*$, on note

$$A^F = (i^F)^{-1}(A) \quad \text{et} \quad A_F = (i_F)^{-1}(A).$$

On considère dans toute cette section un drapeau d'éléments de $\mathcal{L}_M^*$, $\mathcal{F} = (F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_\ell) \subseteq \mathcal{L}_M^*$. On note $\min \mathcal{F}$ comme nous l'avons fait pour les drapeaux de parties d'un ensemble. La notion de compatibilité doit cependant être affinée.

Définition 3.4.1. *Une partie I de $\min \mathcal{F}$ est dite compatible avec $\mathcal{F}$ dans M , noté $I <_M \mathcal{F}$, si $\text{card } I < \text{rg}_M(\min \mathcal{F})$.*

Remarque 3.4.2. À tout couple compatible $I <_M \mathcal{F}$ dans M peut être associé le cône

$$\sigma_{I <_M \mathcal{F}} = \text{cône}(\{e_i \mid i \in I\} \cup \{e_F \mid F \in \mathcal{F}\}).$$

Puisque tout drapeau de clos propres non vides est de longueur au plus d , ce cône est au plus de dimension d . Une réciproque partielle existe : tout cône de la forme $\sigma_{I<_M \mathcal{F}}$ est contenu dans un cône de dimension d de la forme $\sigma_{I'<_M \mathcal{F}'}$. Il suffit pour cela de prendre I' comme un sous-ensemble maximal parmi ceux contenant I , et $\mathcal{F}'$ un drapeau maximal parmi ceux contenant $\mathcal{F}$ et compatible avec I' dans M .

Remarque 3.4.3. Toute partie de E de cardinal inférieur au égal à d est compatible dans M avec le drapeau vide, et l'ensemble vide est compatible dans M avec tout drapeau de clos propres non vides. On a donc

$$\Delta_{I<_M \mathcal{F}} = \Delta_{I<_M \emptyset} \star \Delta_{\emptyset<_M \mathcal{F}} \quad \text{et} \quad \sigma_{I<_M \mathcal{F}} = \sigma_{I<_M \emptyset} + \sigma_{\emptyset<_M \mathcal{F}}.$$

De plus, l'ensemble de toute les couples compatibles dans M forment un complexe simplicial puisque

$$\Delta_{I<_M \mathcal{F}} \cap \Delta_{J<_M \mathcal{G}} = \Delta_{I \cap J <_M \mathcal{F} \cap \mathcal{G}}.$$

Définition 3.4.4. Une partie $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_M^*$ est dit être un filtre de M si pour tout $F, G \in \mathcal{L}_M^*$ tels que $F \subseteq G$ et $F \in \mathcal{P}$, alors $G \in \mathcal{P}$.

Notation 3.4.5. Si $\mathcal{P}$ est un filtre de M , on note $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{E\}$.

Définition 3.4.6. Soit $\mathcal{P}$ un filtre de $\mathcal{L}_M^*$. L'éventail de BERGMAN est l'ensemble de cônes

$$\Sigma_{M, \mathcal{P}} = \{\sigma_{I<_M \mathcal{F}} \mid \text{cl}(I) \in \mathcal{P}(E) \setminus \widehat{\mathcal{P}} \text{ et } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}\}.$$

On définit de même l'éventail de BERGMAN réduit comme l'ensemble de cônes

$$\widetilde{\Sigma}_{M, \mathcal{P}} = \{\sigma_{I<_M \mathcal{F}} \mid \text{cl}(I) \in \mathcal{P}(E) \setminus \widehat{\mathcal{P}} \text{ et } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}\}.$$

Remarque 3.4.7. Si $\mathcal{P} = \mathcal{L}_M^*$, on note simplement Σ_M et $\widetilde{\Sigma}_M$

Exemple 3.4.8. Si $\mathcal{P} = \mathcal{L}_M^*$, $\Sigma_M = \Sigma_{M, \mathcal{L}_M^*} = \widetilde{\Sigma}_{M, \mathcal{L}_M^*}$ est la sous-division fine de l'espace linéaire tropical de M (voir [AK06]).

Exemple 3.4.9. Si $\mathcal{P} = \emptyset$, $\widetilde{\Sigma}_{M, \emptyset}$ est le squelette de dimension d de l'éventail normal du simplexe Δ_n , tandis que $\Sigma_{M, \emptyset}$ est l'éventail dont les cônes maximaux sont les $\sigma_{F<_M \emptyset}$ où F parcourt l'ensemble des clos de M de rang d .

Proposition 3.4.10. L'ensemble $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ est un sous-éventail de l'éventail normal d'un certain polytope.

Démonstration. Par définition d'un filtre, toute face d'un cône de $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ est dans $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$. Il suffit donc de montrer que $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ est contenu dans l'éventail normal d'un polytope. Dans ce but, on introduit la notation suivante : on note $\widehat{\mathcal{P}}$ l'ensemble des parties propres non vides de E contenant un clos élément de $\mathcal{P}$, i.e le filtre de $\mathcal{P}^*(E)$ généré par $\mathcal{P}$.

Remarquons que si la clôture dans M d'une partie quelconque $I \subseteq E$ n'est pas élément de $\widehat{\mathcal{P}}$, alors I ne contient aucun clos de l'ordre $\mathcal{P}$. On peut donc en conclure que $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ est

contenu dans $\Sigma_{\tilde{\mathcal{P}}}$. Autrement dit : si $\sigma_{I <_M \mathcal{F}} \in \Sigma_{M, \mathcal{P}}$, alors I est tel que sa clôture dans M n'est pas élément de $\widehat{\mathcal{P}}$. On en déduit que I non plus n'est pas élément de $\mathcal{P}$: si c'était le cas, I contiendrait un clos de M aussi élément de $\mathcal{P}$ et donc sa clôture serait élément de $\widehat{\mathcal{P}}$.

On conclut en rappelant que nous avons montré en 3.3.12 que $\Sigma_{\tilde{\mathcal{P}}}$ était lui-même le sous-éventail de l'éventail normal d'un certain polytope. □

Remarque 3.4.11. La condition “ $\text{cl}_M(I) \notin \widehat{\mathcal{P}}$ ” dans la définition de l'éventail de BERGMAN signifie que I ne contient aucun clos de $\mathcal{P}$. Ainsi,

$$\Sigma_{M, \mathcal{P}} \subseteq \Sigma_{\tilde{\mathcal{P}}}.$$

Proposition 3.4.12. *L'éventail de BERGMAN réduit est de pure dimension d .*

Démonstration. Admis. □

3.5 Étoile d'un cône

Soit $\sigma \in \Sigma$ un cône d'un éventail. On considère le quotient $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}/\langle \sigma \rangle$. Si $x \in \mathbf{N}_{\mathbb{R}}$, on note $\bar{x}$ son image dans $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}/\langle \sigma \rangle$.

Définition 3.5.1. *L'étoile de σ dans Σ est l'éventail de l'espace vectoriel $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}/\langle \sigma \rangle$*

$$\text{star}(\sigma, \Sigma) = \{\bar{s} \mid s \in \Sigma, \sigma \subseteq s\}.$$

Remarque 3.5.2. Les éventails étant structurellement proches des complexes polyédraux, on peut considérer le parallèle : si $\mathcal{K}$ est un complexe polyédral, alors si $\sigma \in \mathcal{K}$ est un polyèdre de $\mathcal{K}$,

$$\text{star}(\sigma, \mathcal{K}) = \{s \in \mathcal{K} \mid \exists \tau \in \mathcal{K}, \sigma \text{ est une face de } \tau \text{ et } s \text{ est une face de } \tau\}.$$

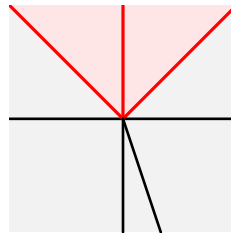


FIGURE 3.1 – Un éventail de $\mathbb{Z}^2$, dont on a représenté en rouge l'étoile (au sens des complexes polyédraux, plus simple à visualiser) de $\sigma = \mathbb{R}_+(0, 1)$.

Notation 3.5.3. Si σ est généré par un vecteur e , on note simplement $\text{star}(e, \Sigma)$.

Proposition 3.5.4. *Soit M un matroïde (sans boucle) sur E et soit $\mathcal{P}$ un filtre de $\mathcal{L}_M^*$.*

- (i) *Si F est un clos dans $\mathcal{P}$, alors l'isomorphisme de $\mathbf{N}_E/\mathbb{Z}e_F$ vers $\mathbf{N}_F \oplus \mathbf{N}_{E \setminus F}$ induit une bijection*

$$\text{star}(e_F, \Sigma_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow \Sigma_{M^F, \mathcal{P}^F} \times \Sigma_{M_F}.$$

- (ii) *Si $\{i\}$ est un clos propre de M , alors l'isomorphisme de $\mathbf{N}_E/\mathbb{Z}e_i$ vers $\mathbf{N}_{E \setminus \{i\}}$ induit une bijection*

$$\text{star}(e_i, \Sigma_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow \Sigma_{M_{[i]}, \mathcal{P}_{[i]}}.$$

Les résultats sont similaires lorsque l'on considère l'éventail de BERGMAN réduit.

Chapitre 4

Anneau de CHOW

On définit dans ce chapitre l'objet central du théorème à démontrer, *i.e* l'anneau de CHOW d'un matroïde. On s'intéressera à plusieurs définitions différentes (anneau de CHOW d'un éventail ou d'un matroïde filtré). Nous montrerons la cohérence de ces définitions entre elles, ainsi que des propriétés de morphismes entre anneaux de CHOW lorsqu'on contracte ou restreint un matroïde, ou même lorsque l'on simplifie un matroïde. Au terme de ce chapitre, le premier point du théorème principal, *i.e* la dualité de POINCARÉ.

4.1 Fonctions linéaires par morceaux

4.1.1 Définitions

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{N} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{Z}$ une paire duale de $\mathbb{Z}$ -modules libres. On note

$$\mathbf{N}_{\mathbb{R}} = \mathbf{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\mathbb{R}} = \mathbf{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

et l'on prolonge naturellement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\mathbf{N}_{\mathbb{R}} \times \mathbf{M}_{\mathbb{R}}$.

Soit Σ un éventail dans $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$ qu'on suppose unimodulaire (ou *lisse*), *i.e* que tout cône de Σ est générée par une partie d'une base de $\mathbf{N}$ (pas nécessairement la même pour tous)¹. On note V_{Σ} l'ensemble des générateurs primitifs des rayons de Σ . C'est équivalent à dire que pour tout $\sigma \in \Sigma$, les rayons primitifs générateurs de σ forment une partie d'une certaine base de $\mathbf{N}$ (pas nécessairement la même pour tous les σ).

On pourra remarquer qu'une variété torique est lisse *si et seulement si* son éventail associé est unimodulaire. On admet ce résultat.

Définition 4.1.1. Une fonction $\ell : |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$ est dite linéaire par morceaux si elle est continue et est la restriction à tout cône de Σ d'une application linéaire sur $\mathbf{N}_{\mathbb{R}}$.

Remarque 4.1.2. Une fonction linéaire par morceaux $\ell : |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi dite *entière* si $\ell(|\Sigma| \cap \mathbf{N}) \subseteq \mathbb{Z}$. Elle est aussi dite *strictement positive* si $\ell(|\Sigma| \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{R}_{+}^{*}$.

Exemple 4.1.3. Soit $e \in V_{\Sigma}$. On définit la fonction de COURANT de e comme la fonction $x_e : |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$ valant $x_e(e) = 1$ et $x_e(e') = 0$ pour tout $e' \in V_{\Sigma} \setminus \{e\}$. Les fonctions de COURANT sont entières. Cette application est bien définie

1. La différence avec qu'un cône rationnel est qu'une famille libre dans un $\mathbb{Z}$ -module ne se complète pas toujours en une famille génératrice.

Notation 4.1.4. On note $\text{PL}(\Sigma)$ le groupe des fonctions linéaires par morceaux entières.

Remarque 4.1.5. Les fonctions de COURANT forment une base de $\text{PL}(\Sigma)$, qui donc isomorphe au $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}^{V_\Sigma}$.

Remarque 4.1.6. Une application linéaire entière sur $\mathbb{N}_\mathbb{R}$ se restreint en une fonction linéaire par morceaux sur Σ , i.e on dispose d'un morphisme de restriction

$$\text{res}_\Sigma : \begin{cases} \mathbf{M} & \longrightarrow \text{PL}(\Sigma) \\ m & \longmapsto \sum_{e \in V_\Sigma} \langle e, m \rangle x_e \end{cases}.$$

On peut alors considérer son conoyau

$$A^1(\Sigma) = \text{PL}(\Sigma) / \text{res}_\Sigma(M).$$

Ce groupe admet (généralement) des torsions, même avec l'hypothèse d'unimodularité sur Σ .

Exemple 4.1.7. Soit $N = M = \mathbb{Z}^2$ et Σ l'éventail de $\mathbb{P}^1$, i.e l'éventail de l'exemple 1.2.12. On note $e_0 = -e_1 - e_2$. Si $\ell \in \text{PL}(\Sigma)$, alors $\ell = \lambda_0 x_{e_0} + \lambda_1 x_{e_1} + \lambda_2 x_{e_2}$ où $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ (puisque les fonctions de COURANT forment une base de $\text{PL}(\Sigma)$). Or,

$$\text{res}_\Sigma(\lambda_1, \lambda_2) = -(\lambda_1 + \lambda_2)x_{e_0} + \lambda_1 x_{e_1} + \lambda_2 x_{e_2}.$$

On en déduit que

$$\ell \equiv (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)x_{e_0} \pmod{\text{res}_\Sigma(\mathbb{Z}^2)}$$

et donc que $A^1(\Sigma) = \mathbb{Z}x_{e_0}$.

Définition 4.1.8 (équivalence). Deux fonctions linéaires par morceaux sur Σ , ℓ et ℓ' , sont dites équivalentes si $\ell - \ell'$ est la restriction d'une application linéaire sur $\mathbb{N}_\mathbb{R}$.

Définition 4.1.9 (équivalence sur $\mathbb{Z}$). Deux fonctions linéaires par morceaux intégrales sur Σ , ℓ et ℓ' , sont dites équivalentes sur $\mathbb{Z}$ si la différence de ℓ et ℓ' est la restriction d'une application linéaire intégrale sur $\mathbb{N}_\mathbb{R}$, i.e s'il existe $m \in \mathbf{M}$ tel que $\ell - \ell' = \text{res}_\Sigma(m)$

Remarque 4.1.10. On peut identifier le groupe des fonction linéaires par morceaux quotienté par l'ensemble des fonctions linéaires sur Σ avec $A^1(\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, que l'on note $A^1(\Sigma)_\mathbb{R}$.

4.1.2 Tirés en arrière

Soit Σ' un sous-éventail de Σ . On rappelle que l'on a supposé Σ unimodulaire. Ainsi, Σ' l'est aussi. Soit de plus σ un cône de Σ .

Tiré en arrière vers un sous-éventail

On dispose d'un morphisme surjectif de restriction

$$|_{\Sigma'} : \begin{cases} \text{PL}(\Sigma) & \longrightarrow \text{PL}(\Sigma') \\ \ell & \longmapsto \ell|_{\Sigma'} \end{cases}.$$

Il est clair que $|_{\Sigma'} \circ \text{res}_{\Sigma} = \text{res}_{\Sigma'}$, donc ce morphisme passe aux conoyaux en un morphisme lui aussi surjectif

$$p_{\Sigma' \subseteq \Sigma} : A^1(\Sigma) \rightarrow A^1(\Sigma').$$

Ce morphisme $p_{\Sigma' \subseteq \Sigma}$ est uniquement déterminé par les images des fonctions de courant : si $e \in V_{\Sigma}$, $p_{\Sigma' \subseteq \Sigma}(x_e) = x_e$ si $e \in V_{\Sigma'}$, et 0 sinon.²

Tiré en arrière vers l'étoile d'un cône

Soit $\sigma \in \Sigma$. Toute fonction linéaire par morceaux intégrale $\ell : |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$ est par définition équivalente sur $\mathbb{Z}$ à une fonction linéaire par morceaux intégrale ℓ' dont la restriction à σ est la fonction nulle. Le choix de ℓ' est même unique modulo une fonction linéaire intégrale sur $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}/\langle \sigma \rangle$. On peut donc considérer le morphisme surjectif

$$p_{\sigma \in \Sigma} : A^1(\Sigma) \rightarrow A^1(\text{star}(\sigma, \Sigma)).$$

Ce morphisme est uniquement déterminé par les valeurs des x_e où e parcourt l'ensemble $\{e \in V_{\Sigma} | e \notin \sigma\}$: $p_{\sigma \in \Sigma}(x_e) = x_{\bar{e}}$ s'il existe un cône dans Σ contenant e et σ , et 0 sinon (où $\bar{e}$ désigne l'image de e dans le quotient $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}/\langle \sigma \rangle$).

Décomposition d'un produit d'éventail en somme directe

Soit Σ_1 et Σ_2 deux éventails unimodulaires. Une fonction linéaire par morceaux sur $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ est la somme de ses restrictions aux sous-éventails $\Sigma_1 \times \{0\}$ et $\{0\} \times \Sigma_2$. Cela signifie qu'on dispose d'un isomorphisme.

$$\text{PL}(\Sigma_1 \times \Sigma_2) \cong \text{PL}(\Sigma_1) \oplus \text{PL}(\Sigma_2).$$

Ce dernier induit alors un autre isomorphisme

$$p_{\Sigma_1, \Sigma_2} : A^1(\Sigma_1 \times \Sigma_2) \rightarrow A^1(\Sigma_1) \oplus A^1(\Sigma_2).$$

4.1.3 Cônes amples et nef

Définition 4.1.11 (lien d'un cône dans un éventail). Soit $\sigma \in \Sigma$. On appelle lien de σ dans Σ l'ensemble

$$\text{link}(\sigma, \Sigma) = \{s \in \Sigma | \exists \tau \in \Sigma, \sigma \text{ est une face de } \tau \text{ et } s \text{ est une face de } \tau, \text{ et } s \cap \sigma = \{0\}\}.$$

Remarque 4.1.12. Le lien est un objet qu'on retrouve déjà dans l'étude des complexes simpliciaux ou des complexes polyédraux.

Remarque 4.1.13. Le lien de $\sigma \in \Sigma$ est un sous-éventail de Σ .

Définition 4.1.14. Soit $\ell : |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction linéaire par morceaux sur Σ , et soit $\sigma \in \Sigma$. La fonction ℓ est convexe autour de σ si elle est équivalente à une fonction linéaire par morceaux qui vaut zéro sur σ , et est positive sur les rayons de $\text{link}(\sigma, \Sigma)$.

2. Remarquer que l'on note toujours x_e sur Σ' .

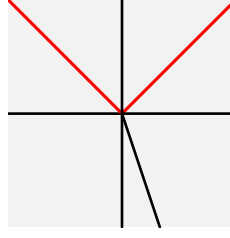


FIGURE 4.1 – Un éventail de $\mathbb{Z}^2$ (le même qu'en figure 3.1, dont on a représenté en rouge le lien de $\sigma = \mathbb{R}_+(0, 1)$).

Remarque 4.1.15. On définit de la même manière les fonctions linéaires par morceaux *strictement convexes* en remplaçant “positive” par “strictement positive”.

Définition 4.1.16. Une fonction linéaire par morceaux est dite *convexe* si elle est convexe autour de tout cône de Σ . Elle est dite *strictement convexe* si elle est strictement convexe autour de tout cône de Σ .

Remarque 4.1.17. Si Σ complet. Alors, une fonction linéaire par morceaux ℓ sur Σ est convexe si et seulement si elle l'est dans le sens usuel, i.e si pour tout $x, y \in \mathbf{N}_{\mathbb{R}}$,

$$\ell(x + y) \leq \ell(x) + \ell(y).$$

Définition 4.1.18. Soit Σ un cône unimodulaire. Le cône ample de Σ est le cône convexe ouvert constitué des classes des fonctions linéaires par morceaux sur Σ strictement convexes. On le note

$$\mathcal{K}_{\Sigma} \subseteq A^1(\Sigma)_{\mathbb{R}}.$$

Définition 4.1.19. Soit Σ un cône unimodulaire. Le cône nef de Σ est le cône convexe fermé constitué des classes des fonctions linéaires par morceaux sur Σ convexes. On le note

$$\mathcal{N}_{\Sigma} \subseteq A^1(\Sigma)_{\mathbb{R}}.$$

Remarque 4.1.20. Le cône nef de Σ contient l'adhérence du cône ample de Σ . L'inclusion réciproque est vraie si le cône ample n'est pas vide.

Proposition 4.1.21. Soit Σ un éventail unimodulaire. Si $\mathcal{K}_{\Sigma}$ est non vide, alors $\mathcal{N}_{\Sigma}$ est exactement l'adhérence de $\mathcal{K}_{\Sigma}$.

Démonstration. Soit ℓ_1 une fonction linéaire par morceaux convexe et ℓ_2 une fonction linéaire par morceaux *strictement* convexe, toutes deux sur Σ . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, la somme $\ell_1 + \varepsilon \ell_2$ est strictement convexe. En effet, si $\sigma \in \Sigma$, il existe ℓ'_1 une fonction linéaire par morceaux nulle sur σ positive sur les rayons du lien de σ équivalente à ℓ_1 , et ℓ'_2 une

fonction linéaire par morceaux nulle sur σ strictement positive sur les rayons du lien de σ équivalente à ℓ_2 . Alors, $\ell_1 + \varepsilon \ell_2$ est équivalente à $\ell'_1 + \varepsilon \ell'_2$, qui est nulle sur σ , et qui est strictement positive sur les rayons du lien de σ . Ainsi, ℓ_1 est la limite lorsque ε tend vers 0 d'une suite $(\ell_1 + \varepsilon \ell_2)_{\varepsilon > 0}$ de fonctions linéaires par morceaux strictement convexes. On en déduit que le cône nef est contenant dans l'adhérence du cône ample. $\square$

Remarque 4.1.22. Les cônes amples passent bien aux tirés en arrières définis précédemment. La proposition suivante s'intéresse à cette idée.

Proposition 4.1.23. *Soit Σ un éventail unimodulaire et $\Sigma' \subseteq \Sigma$ un sous-éventail. Soit $\sigma \in \Sigma$, et Σ_1, Σ_2 deux cônes unimodulaires.*

(i) *Le morphisme de tiré en arrière $p_{\Sigma' \subseteq \Sigma}$ induit une application entre cônes amples*

$$\mathcal{K}_{\Sigma} \rightarrow \mathcal{K}_{\Sigma'}.$$

(ii) *Le morphisme de tiré en arrière $p_{\sigma \in \Sigma}$ induit une application entre cônes amples*

$$\mathcal{K}_{\Sigma} \rightarrow \mathcal{K}_{\text{star}(\sigma, \Sigma)}.$$

(iii) *L'isomorphisme de tiré en arrière p_{Σ_1, Σ_2} induit une bijection entre cônes amples*

$$\mathcal{K}_{\Sigma_1 \times \Sigma_2} \rightarrow \mathcal{K}_{\Sigma_1} \times \mathcal{K}_{\Sigma_2}$$

où $\mathcal{K}_{\Sigma_1} \times \mathcal{K}_{\Sigma_2}$ désigne le produit des éventails.

Démonstration. On traite le premier cas en guise d'exemple : si $\ell : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors pour tout cône $\sigma \in \Sigma' \subseteq \Sigma$, $\ell|_{\Sigma'}$ est encore équivalente à une fonction linéaire nulle sur σ et positive sur les rayons de $\text{link}(\sigma, \Sigma') \subseteq \text{link}(\sigma, \Sigma)$ (il suffit de prendre une fonction linéaire à laquelle ℓ est équivalente sur Σ et qui vérifie les conditions de convexité). $\square$

Proposition 4.1.24. *Soit Σ l'éventail normal d'un polytope. Tout sous-éventail Σ' de Σ a un cône ample $\mathcal{K}_{\Sigma'}$ non vide.*

Démonstration. Selon la proposition 4.1.23, il suffit de montrer que le cône ample de Σ est non vide. C'est le cas puisque la fonction de support d'un polytope est linéaire par morceaux strictement convexe sur son éventail normal Σ . $\square$

Remarque 4.1.25. On avait observé en remarque 3.4.10 qu'étant donné M un matroïde et $\mathcal{P}$ un filtre de M , que $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ était un sous-éventail de l'éventail normal d'un certain polytope. La proposition précédente montre donc que le cône ample de $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ est non vide.

Remarque 4.1.26. Sur l'éventail du permutoèdre $\Sigma_{\mathcal{P}^*(E)}$, on dispose d'une description simple des fonctions linéaire par morceaux strictement convexes : une fonction linéaire par morceaux est strictement convexe *si et seulement si* elle est de la forme

$$\sum_{F \in \mathcal{P}^*(E)} c_F x_F$$

où $(c_F)_{F \in \mathcal{P}^*(E)}$ est strictement sous-modulaire.

4.1.4 Cônes amples et nef d'éventails d'ordres filtrés de matroïdes

Dans le cas des éventails provenant d'un matroïde et d'un filtre $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_M^*$, le résultat de la proposition 4.1.21 est plus général, et fonctionne aussi avec l'intérieur.

Notation 4.1.27. Si M est un matroïde et $\mathcal{P}$ un filtre sur M , on notera $\mathcal{K}_{M,\mathcal{P}}$ et $\mathcal{N}_{M,\mathcal{P}}$ plutôt que $\mathcal{K}_{\Sigma_{M,\mathcal{P}}}$ et $\mathcal{N}_{\Sigma_{M,\mathcal{P}}}$.

Proposition 4.1.28. Soit M un matroïde (sans boucle) sur E soit $\mathcal{P}$ un filtre de $\mathcal{L}_M^*$.

(i) Le cône nef de $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ est exactement l'adhérence du cône ample de $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$,

$$\overline{\mathcal{K}_{M,\mathcal{P}}} = \mathcal{N}_{M,\mathcal{P}}.$$

(ii) Le cône ample de $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ est exactement l'intérieur du cône nef de $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$,

$$\mathcal{K}_{M,\mathcal{P}} = \text{Int}(\mathcal{N}_{M,\mathcal{P}}).$$

Démonstration. Selon la proposition 3.4.10, le cône ample $\mathcal{K}_{M,\mathcal{P}}$ est non vide. La proposition 4.1.21 montre alors à son tour que $\mathcal{N}_{M,\mathcal{P}}$ est bien l'adhérence de $\mathcal{K}_{M,\mathcal{P}}$. Pour la seconde partie du résultat, on rappelle que (de manière générale), une partie convexe ouverte est égale à l'intérieur de son adhérence. □

4.1.5 Matroïde simplifié

Remarque 4.1.29. Tout clos $F \in \mathcal{L}_M$ admet une unique décomposition

$$F = F_1 \sqcup \cdots \sqcup F_k$$

en clos de rang 1, avec les F_k distincts. Pour montrer cela, on observe que si $x, y \in F$, alors $\text{cl}(\{x\}) \cap \text{cl}(\{y\})$ est un clos de rang 0 ou 1. S'il est de rang 0, il est vide. Sinon, $\text{cl}(\{x\}) = \text{cl}(\{y\})$.

Cette observation motive la définition suivante.

Définition 4.1.30 (matroïde simplifié). Soit M un matroïde sans boucle sur E . On appelle simplification de M le matroïde $\overline{M}$ sur l'ensemble

$$\overline{E} = \{F \in \mathcal{L}_M \mid \text{rg}_M(F) = 1\}.$$

dont l'ensemble des clos est exactement

$$\mathcal{L}_{\overline{M}} = \left\{ \mathcal{F} \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_M) \mid \bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{L}_M \right\}$$

où $\bigcup \mathcal{F}$ désigne l'union des éléments de $\mathcal{F}$. Le matroïde $\overline{M}$ est appelée géométrie combinatoire de M .

Selon la remarque précédente, on a une bijection entre $\mathcal{L}_M$ et $\mathcal{L}_{\overline{M}}$.

Remarque 4.1.31. Sa fonction rang est définie pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{L}_{\overline{M}}$ par

$$\text{rg}_{\overline{M}}(\mathcal{F}) = \text{rg}_M\left(\bigcup \mathcal{F}\right).$$

Remarque 4.1.32. Puisque M est sans boucle, tout $x \in E$ est contenu dans un unique clos de rang 1 (la clôture de $\{x\}$). Ainsi, $\overline{E}$ est une partition de E et l'on note

$$\pi : \begin{cases} E & \longrightarrow \overline{E} \\ x & \longmapsto \text{cl}(\{x\}) \end{cases}$$

la surjection de cette partition.

Remarque 4.1.33. Puisque l'on dispose d'une bijection naturelle entre $\mathcal{L}_M$ et $\mathcal{L}_{\overline{M}}$, on les identifie et alors, on peut considérer des objets comme l'éventail de BERGMAN $\Sigma_{\overline{M}, \mathcal{P}}$ où $\mathcal{P}$ est un filtre sur M , et non sur $\overline{M}$.

Remarque 4.1.34. On rappelle que l'ensemble des générateurs primitifs des rayons de $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ est l'union disjointe

$$\{e_i \mid \text{cl}(\{i\}) \notin \mathcal{P}\} \cup \{e_F \mid F \in \mathcal{P}\} \subseteq \mathbf{N}_{E, \mathbb{R}},$$

tandis que celui de $\Sigma_{\overline{M}, \mathcal{P}}$ est

$$\{e_A \mid A \in \overline{E} \setminus \mathcal{P}\} \cup \{e_F \mid F \in \mathcal{P}\} \subseteq \mathbf{N}_{\overline{E}, \mathbb{R}}.$$

On note x_i et x_F , et x_A et x_F leurs fonctions de COURANT RESPECTIVES.

Notation 4.1.35. Dans toute section, on se donne $\iota : \overline{E} \rightarrow E$ une section de π . On note de plus

$$\pi_{\text{PL}} : \text{PL}(\Sigma_{M, \mathcal{P}}) \rightarrow \text{PL}(\Sigma_{\overline{M}, \mathcal{P}})$$

l'application qui vérifie $\pi_{\text{PL}}(x_i) = x_{\pi(i)}$ pour tout $i \in E$ tel que $\text{cl}(\{i\}) \notin \mathcal{P}$ et $\pi(x_F) = x_F$ pour tout $F \in \mathcal{P}$. De même, on définit

$$\iota_{\text{PL}} : \text{PL}(\Sigma_{\overline{M}, \mathcal{P}}) \rightarrow \text{PL}(\Sigma_{M, \mathcal{P}})$$

l'application vérifiant $\iota_{\text{PL}}(x_A) = x_{\iota(A)}$ pour tout clos A de rang qui n'est pas dans $\mathcal{P}$, et $\iota_{\text{PL}}(x_F) = x_F$ pour tout $F \in \mathcal{P}$.

Remarque 4.1.36. Ces deux morphismes contribuent à fournir le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \text{PL}(\Sigma_{M, \mathcal{P}}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_{\text{PL}}} \\ \xleftarrow{\iota_{\text{PL}}} \end{array} & \text{PL}(\Sigma_{\overline{M}, \mathcal{P}}) \\ \uparrow \text{res}_{\Sigma_{M, \mathcal{P}}} & \circlearrowleft & \uparrow \text{res}_{\Sigma_{\overline{M}, \mathcal{P}}} \\ \mathbf{M}_E & \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi_M} \\ \xleftarrow{\iota_M} \end{array} & \mathbf{M}_{\overline{E}} \end{array}$$

En particulier, ce dernier indique que π_{PL} et ι_{PL} passent aux conoyaux. La proposition suivante montre qu'ils y deviennent même des isomorphismes.

Proposition 4.1.37. Les morphismes π_{PL} et ι_{PL} passent aux conoyaux et induisent des isomorphismes

$$\pi_{\text{PL}} : A^1(\Sigma_{M,\mathcal{P}}) \rightarrow A^1(\Sigma_{\overline{M},\mathcal{P}}) \quad \text{et} \quad \iota_{\text{PL}} : A^1(\Sigma_{\overline{M},\mathcal{P}}) \rightarrow A^1(\Sigma_{M,\mathcal{P}}).$$

Ces isomorphismes sont inverses l'un de l'autre.

Notation 4.1.38. On note de la même manière ces isomorphismes lorsqu'on les étend à $A^1(\Sigma_{M,\mathcal{P}})_{\mathbb{R}}$ et $A^1(\Sigma_{\overline{M},\mathcal{P}})$ (et y sont aussi des isomorphismes).

Démonstration. Puisque l'on dispose du diagramme commutatif de la remarque 4.1.36, les morphismes passent bien tous les deux aux quotients. Il suffit alors de montrer qu'ils vérifient $\iota_{\text{PL}} \circ \pi_{\text{PL}}$. Si $i, j \in E$ sont tels que $\text{cl}(\{i\}), \text{cl}(\{j\}) \notin \mathcal{P}$, alors l'application linéaire donnée par $e_i - e_j \in \mathbf{M}_E$ vérifie

$$\begin{aligned} \text{res}_{\Sigma_{M,\mathcal{P}}}(e_i - e_j) &= \sum_{e \in V_{\Sigma_{M,\mathcal{P}}}} \langle e, e_i - e_j \rangle x_e \\ &= \sum_{e \in V_{\Sigma_{M,\mathcal{P}}}} \langle e, e_i \rangle x_e - \sum_{e \in V_{\Sigma_{M,\mathcal{P}}}} \langle e, e_j \rangle x_e. \end{aligned}$$

Or, selon la description des générateurs primitifs des rayons de $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ en remarque 4.1.34,

$$\sum_{e \in V_{\Sigma_{M,\mathcal{P}}}} \langle e, e_i \rangle x_e = x_i + \sum_{\substack{F \in \mathcal{P} \\ i \in F}} x_F.$$

On a donc

$$\text{res}_{\Sigma_{M,\mathcal{P}}}(e_i - e_j) = x_i + \sum_{\substack{F \in \mathcal{P} \\ i \in F}} x_F - x_j - \sum_{\substack{F \in \mathcal{P} \\ j \in F}} x_F.$$

Si $\text{cl}(\{i\}) = \text{cl}(\{j\})$, alors tout clos contient i si seulement s'il contient j . Dans ce cas,

$$\text{res}_{\Sigma_{M,\mathcal{P}}}(e_i - e_j) = x_i - x_j,$$

ce qui montre que x_i et x_j sont équivalentes sur $\mathbb{Z}$. On a donc (en notant $\bar{x}$ les projections dans les quotients $A^1(\Sigma_{M,\mathcal{P}})$ et $A^1(\Sigma_{\overline{M},\mathcal{P}})$)

$$\iota_{\text{PL}}(\pi_{\text{PL}}(\bar{x}_i)) = \iota_{\text{PL}}(\overline{x_{\pi(i)}}) = \overline{x_{i(\pi(i))}} = \bar{x}_i$$

puisque $\{i(\pi(i))\}$ et $\{i\}$ ont même clôture. De plus,

$$\iota_{\text{PL}}(\pi_{\text{PL}}(\bar{x}_F)) = \iota_{\text{PL}}(\bar{x}_F) = \bar{x}_F.$$

□

Remarque 4.1.39 (rappel). Soient K et L des complexes simpliciaux. On appelle *application simpliciale* toute application $f : K \rightarrow L$ telle que pour tout $\sigma \in K$, les sommets $f(\sigma)$ engendrent un simplexe de L , i.e $\text{conv}(f(V(\sigma)))$ est un élément de L .

On peut aussi voir f comme une fonction $f : |K| \rightarrow |L|$ telle que pour tout $\sigma \in K$, l'image directe $f(\sigma)$ est un simplexe de L , et $f|_{\sigma}$ est la restriction d'une application linéaire.

Remarque 4.1.40. Les applications π et i induisent aussi des applications simpliciales entre les complexes de BERGMAN. Ces applications sont

$$\pi_\Delta : \begin{cases} \Delta_{M,\mathcal{P}} & \longrightarrow & \Delta_{\overline{M},\mathcal{P}} \\ \Delta_{I<\mathcal{F}} & \longmapsto & \Delta_{\pi(I)<\mathcal{F}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \iota_\Delta : \begin{cases} \Delta_{\overline{M},\mathcal{P}} & \longrightarrow & \Delta_{M,\mathcal{P}} \\ \Delta_{\mathcal{F}<\mathcal{G}} & \longmapsto & \Delta_{i(\mathcal{F})<\mathcal{G}} \end{cases}.$$

Ces applications vérifient $\pi_\Delta \circ \iota_\Delta = \text{id}_{\Delta_{\overline{M},\mathcal{P}}}$.

Proposition 4.1.41. *L'isomorphisme π_{PL} se restreint en une application bijective entre cônes amples*

$$\mathcal{K}_{M,\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{K}_{\overline{M},\mathcal{P}}.$$

Démonstration. En vertu de la proposition 4.1.28, il suffit de montrer qu'elle se restreint en une application bijective entre les cônes nef

$$\mathcal{N}_{M,\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{N}_{\overline{M},\mathcal{P}}.$$

- Montrons que ι_{PL} envoie une fonction linéaire par morceaux convexe $\bar{\ell}$ sur une fonction linéaire par morceaux convexe. On observe que si $\sigma_{I<\mathcal{F}} \in \Sigma_{M,\mathcal{P}}$ et que $\bar{\ell}$ est nulle sur $\sigma_{\pi(I)<\mathcal{F}}$ et positive sur les rayons de $\text{link}(\sigma_{\pi(I)<\mathcal{F}}, \Sigma_{\overline{M},\mathcal{P}})$, alors $\iota_{\text{PL}}(\bar{\ell})$ est nulle sur $\sigma_{\pi^{-1}(\pi(I))<\mathcal{F}}$ et est positive sur les rayons de $\text{link}(\sigma_{\pi^{-1}(\pi(I))<\mathcal{F}}, \Sigma_{M,\mathcal{P}})$. Ainsi, $\iota_{\text{PL}}(\bar{\ell})$ est nulle sur $\sigma_{I<\mathcal{F}}$ et est positive sur les rayons de $\text{link}(\sigma_{I<\mathcal{F}}, \Sigma_{M,\mathcal{P}})$.
- Montrons de même que π_{PL} envoie une fonction linéaire par morceaux convexe ℓ sur une fonction linéaire par morceaux convexe. Soit donc $\sigma_{\mathcal{F}<\mathcal{G}} \in \Sigma_{\overline{M},\mathcal{P}}$. Il suffit de montrer que si ℓ est convexe autour de $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{F})<\mathcal{G}}$, alors $\pi_{\text{PL}}(\ell)$ est convexe autour de $\sigma_{\mathcal{F}<\mathcal{G}}$. C'est le cas puisque par définition de $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$ et $\Sigma_{\overline{M},\mathcal{P}}$,
 - l'image réciproque par π_Σ de l'ensemble des faces de $\sigma_{\mathcal{F}<\mathcal{G}}$ est égal à l'ensemble des faces de $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{F})<\mathcal{G}}$;
 - l'image réciproque par π_Σ du lien de $\sigma_{\mathcal{F}<\mathcal{G}}$ dans $\Sigma_{\overline{M},\mathcal{P}}$ est égal au lien de $\sigma_{\pi^{-1}(\mathcal{F})<\mathcal{G}}$ dans $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$.

□

Remarque 4.1.42. Un éventail de BERGMAN admettant exactement les mêmes rayons primitifs que son éventail réduit, on dispose des isomorphismes suivants

$$\begin{array}{ccc} A^1(\Sigma_{M,\mathcal{P}}) & \xrightleftharpoons{\quad} & A^1(\Sigma_{\overline{M},\mathcal{P}}) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ A^1(\widetilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}) & \xrightleftharpoons{\quad} & A^1(\widetilde{\Sigma}_{\overline{M},\mathcal{P}}) \end{array}$$

De plus, on dispose d'inclusions entre les cônes amples correspondants.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_{M,P} & \xlongequal{\quad} & \mathcal{K}_{\overline{M},P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{K}}_{M,P} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{K}}_{\overline{M},P} \end{array}$$

Ces inclusions sont généralement strictes.

4.2 Homologie et cohomologie

4.2.1 Poids de MINKOWSKI

Soit toujours Σ un éventail unimodulaire sur un réseau $\mathbf{N}$ de rang n . Pour tout $k \geq 0$, on note Σ_k l'ensemble des cônes de Σ de dimension k .

Remarque 4.2.1. Si σ est un cône unimodulaire sur $\mathbf{N}$ et τ en est une face de codimension 1, alors il existe une unique face de dimension 1 de σ qui n'est pas face de τ . On note $e_{\sigma/\tau}$ le générateur primitif du rayon de cette face.

Définition 4.2.2. Soit $k \geq 0$. On appelle poids de MINKOWSKI de dimension k sur Σ toute application $\omega : \Sigma_k \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant la condition d'équilibre : pour tout cône $\tau \in \Sigma_{k-1}$,

$$\sum_{\tau \text{ face propre de } \sigma} \omega(\sigma) e_{\sigma/\tau} \in \text{Vect}(\sigma).$$

Remarque 4.2.3. Sans condition d'équilibre, on parle simplement de *poids*.

Notation 4.2.4. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $\text{MW}_k(\Sigma)$ le groupe des poids de MINKOWSKI de dimension k (qui est trivial si $k < 0$). On note alors

$$\text{MW}_*(\Sigma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{MW}_k(\Sigma)$$

le groupe des poids de MINKOWSKI.

Remarque 4.2.5. Le groupe de MINKOWSKI vérifie plusieurs propriétés simples.

- Le groupe $\text{MW}_0(\Sigma)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
- Le groupe $\text{MW}_1(\Sigma)$ est orthogonal à l'image de $\text{res}_\Sigma : \mathbf{M} \rightarrow \text{PL}(\Sigma)$.
- Le groupe $\text{MW}_k(\Sigma)$ est trivial lorsque $k < 0$ ou $k > \dim \Sigma$.

Remarque 4.2.6. Si Σ est complet, alors tout poids de dimension $n = \dim \Sigma$ vérifie la condition d'équilibre si et seulement s'il est constant. Les matroïdes vérifient une propriété similaire en dimension $d = \text{rg}(M) - 1$.

Notation 4.2.7. Si $\sigma_{I < \mathcal{G}} \in \Sigma_M$, I est vide par définition de Σ_M . On note donc $\sigma_{\mathcal{G}}$ plutôt que $\sigma_{\emptyset < \mathcal{G}}$ les cônes de Σ_M .

Proposition 4.2.8. Soit $d = \text{rg}(M) - 1$. Un poids de dimension d sur Σ_M vérifie la condition d'équilibre si et seulement s'il est constant.

En particulier, $\text{MW}_d(\Sigma_M) = \mathbb{Z}$. Pour démontrer ce résultat, on invoque d'abord un lemme. On a pour cela besoin de la définition suivante.

Lemme 4.2.9. L'éventail de BERGMAN Σ_M est connexe en codimension 1, i.e pour tout $\sigma_{\mathcal{F}}, \sigma_{\mathcal{G}} \in \Sigma$, il existe une suite

$$\sigma_{\mathcal{F}} = \sigma_0 \supsetneq \tau_1 \subsetneq \sigma_1 \supsetneq \cdots \subsetneq \sigma_{\ell-1} \supsetneq \tau_{\ell} \subsetneq \sigma_{\ell} = \sigma_{\mathcal{G}}$$

où τ_i est une facette commune de σ_{i-1} et σ_i dans Σ_M .

Remarque 4.2.10. Si $\sigma_{\mathcal{F}}$ et $\sigma_{\mathcal{G}}$ sont liés comme dans l'énoncé du lemme, on note cela $\sigma_{\mathcal{F}} \sim \sigma_{\mathcal{G}}$. Cela signifie qu'on peut passer d'un cône à l'autre en empruntant par les facettes.

Démonstration. On démontre le résultat par récurrence sur le rang de M . La récurrence est initialisée puisque tout éventail de dimension 1 est clairement connexe en codimension 1 (tous les rayons ont l'origine en commun).

On suppose ensuite le résultat vrai pour tout matroïde de rang strictement inférieur au rang de M .

- Si $\min \mathcal{F} = \min \mathcal{G}$, on applique l'hypothèse de récurrence à $M_{\min \mathcal{F}}$ en identifiant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ à des drapeaux sur $M_{\min \mathcal{F}}$.
- Si $\min \mathcal{F} \neq \min \mathcal{G}$, on choisit $\mathcal{H}$ un drapeau d'éléments de $\mathcal{L}_M^*$ maximal parmi ceux vérifiant $\min \mathcal{F} \cup \min \mathcal{G} < \mathcal{H}$ (i.e $\min \mathcal{F} \cup \min \mathcal{G}$ est compatible avec $\mathcal{H}$). On peut comme au premier point appliquer l'hypothèse de récurrence à $M_{\min \mathcal{F}}$ pour montrer qu'on

$$\sigma_{\mathcal{F}} \sim \sigma_{\{\min \mathcal{F}\} \cup \mathcal{H}} \quad \text{et} \quad \sigma_{\mathcal{G}} \sim \sigma_{\{\min \mathcal{G}\} \cup \mathcal{H}}.$$

On alors le résultat puisqu'on a

$$\sigma_{\{\min \mathcal{F}\} \cup \mathcal{H}} \supsetneq \sigma_{\mathcal{H}} \subsetneq \sigma_{\{\min \mathcal{G}\} \cup \mathcal{H}}.$$

On a donc $\sigma_{\mathcal{F}} \sim \sigma_{\mathcal{G}}$ par transitivité. □

Démonstration (de la proposition). On utilise la deuxième propriété définissant les clos d'un matroïde : si $F \in \mathcal{L}_M$, tout $x \in E \setminus F$ est contenu dans un unique clos F_x couvrant F (couvrant signifiant que F_x est minimal parmi les clos contenant strictement F). Soit $\tau_{\mathcal{G}}$ un cône de codimension 1 dans Σ_M et soit $V_{\text{star}(\tau_{\mathcal{G}}, \Sigma_M)}$. □

4.2.2 Anneau de CHOW d'un éventail

Soit Σ un éventail de $\mathbf{N}$ unimodulaire. Soit alors

$$S_{\Sigma} = \mathbb{Z}[X_e]_{e \in V_{\Sigma}}$$

où $(X_e)_{e \in V_\Sigma}$ est une famille d'indéterminées indexée par V_Σ . On note pour tout $\sigma \in \Sigma$

$$X_\sigma = \prod_{e \in \sigma \cap V_\Sigma} X_e.$$

On obtient ensuite pour tout $k \in \mathbb{Z}$ le sous-groupe $Z^k(\Sigma)$ engendré par $(X_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_k}$, i.e

$$Z^k(\Sigma) = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_k} \mathbb{Z}X_\sigma.$$

On note alors

$$Z^*(\Sigma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} Z^k(\Sigma).$$

C'est un anneau. Enfin, on note I_Σ l'idéal de S_Σ engendré par les monômes sans facteur carré qui ne sont pas dans $Z^*(\Sigma)$, et J_Σ l'idéal engendré par les formes linéaires de la forme

$$\sum_{e \in V_\Sigma} \langle e, m \rangle X_e$$

où m parcourt $\mathbf{M}$.

Définition 4.2.11. On appelle anneau de CHOW de l'éventail Σ l'algèbre commutative graduée

$$A^*(\Sigma) = S_\Sigma / (I_\Sigma + J_\Sigma).$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $A^k(\Sigma)$ sa composante de degré k .

Notation 4.2.12. On considérera aussi

$$A^*(\Sigma)_{\mathbb{R}} = A^*(\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

et donc $A^k(\Sigma)_{\mathbb{R}} = A^k(\Sigma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 4.2.13. Si l'on identifie l'indéterminée X_e à la fonction de COURANT x_e , alors on retrouve la définition de $A^1(\Sigma)$ vue en remarque 4.1.6, i.e

$$A^1(\Sigma) = \text{PL}(\Sigma) / \text{res}_\Sigma(\mathbf{M}).$$

Grâce à cette identification, on va pouvoir étendre les tirés en arrière définis en sous-section 4.1.2.

Définition-proposition 4.2.14. On dispose des propriétés suivantes.

- (i) Le morphisme $p_{\Sigma' \subseteq \Sigma}$ s'étend de manière unique en un morphisme surjectif d'anneaux gradués

$$p_{\Sigma' \subseteq \Sigma} : A^*(\Sigma) \rightarrow A^*(\Sigma').$$

- (ii) Le morphisme $p_{\sigma \in \Sigma}$ s'étend de manière unique en un morphisme surjectif d'anneaux gradués

$$p_{\sigma \in \Sigma} : A^*(\Sigma) \rightarrow A^*(\text{star}(\sigma, \Sigma)).$$

Remarque 4.2.15. L'anneau $A^*(\Sigma)$ s'identifie avec l'anneau des fonctions polynomiales par morceaux sur Σ modulo les applications linéaires sur $N_{\mathbb{R}}$.

Proposition 4.2.16. Pour tout $k \geq 0$, le groupe $A^k(\Sigma)$ est engendré par l'image $Z^k(\Sigma)$ dans le quotient.

Démonstration. Soit σ un cône de Σ et $e_1, \dots, e_\ell$ les générateurs primitifs de ses rayons. Montrons que tout monôme de la forme $x_{e_1}^{k_1} \cdots x_{e_\ell}^{k_\ell}$ avec $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_\ell \geq 1$ a son image dans $A^k(\Sigma)$ est dans le groupe engendré par $Z^k(\Sigma)$. On procède par récurrence descendante sur l'entier $\dim \sigma$.

- Dans le cas $\dim \sigma = k$, $\ell = k$ et donc $k_1 = \dots = k_\ell = 1$, ce qui signifie que $x_{e_1}^{k_1} \cdots x_{e_\ell}^{k_\ell} = x_{e_1} \cdots x_{e_\ell} = x_\sigma$. Il n'y a donc rien à montrer.
- Si $\dim \sigma \neq k$, alors par unimodularité de σ , $e_1, \dots, e_\ell$ est une partie d'une base de $\mathbf{N}_E$. Il existe donc $m \in \mathbf{M}$ tel que $\langle e_1, m \rangle = -1$ et $\langle e_i, m \rangle = 0$ pour tout $i \in \llbracket 2, \ell \rrbracket$. On a donc

$$x_{e_1}^{k_1} \cdots x_{e_\ell}^{k_\ell} \equiv x_{e_1}^{k_1-1} \cdots x_{e_\ell}^{k_\ell} \sum_{e \in V_{\text{link}(\sigma, \Sigma)}} \langle e, m \rangle x_e \pmod{I_\Sigma + J_\Sigma}.$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence sur chacun des termes du membre de droite après distribution de la somme.

□

Remarque 4.2.17. En conséquence, si $k > \dim \Sigma$, $A^k(\Sigma) = \{0\}$.

Remarque 4.2.18. Le groupe des poids de dimension k sur Σ peut être identifié avec le dual de $Z^k(\Sigma)$ (en tant que $\mathbb{Z}$ -module), et ce *via* l'isomorphisme *tautologique*

$$t_\Sigma : \begin{array}{c} \mathbb{Z}^{\Sigma_k} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z^k(\Sigma), \mathbb{Z}) \\ \omega \longmapsto (x_\sigma \mapsto \omega(\sigma)) \end{array}.$$

La dernière proposition montre d'ailleurs que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z^k(\Sigma), \mathbb{Z})$ contient $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A^k(\Sigma), \mathbb{Z})$ comme sous-groupe.

Proposition 4.2.19. L'isomorphisme t_Σ se restreint en une bijection

$$\text{MW}_k(\Sigma) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A^k(\Sigma), \mathbb{Z}).$$

Cette bijection est un analogue à la dualité de KRONECKER en topologie algébrique. Pour une référence sur la sujet, voir [DK91].

Remarque 4.2.20. Cette bijection permet de définir le *cap-produit*

$$\left| \begin{array}{ccc} A^\ell(\Sigma) \times \text{MW}_k(\Sigma) & \longrightarrow & \text{MW}_{k-\ell}(\Sigma) \\ (\xi, \omega) & \longmapsto & \xi \cap \omega \end{array} \right|$$

où $\xi \cap \omega$ est défini pour tout $\sigma \in \Sigma_{k-\ell}$ par

$$\xi \cap \omega(\sigma) = (t_\Sigma(\omega))(\xi x_\sigma).$$

Cette opération fait alors de $\text{MW}_*(\Sigma)$ un $A^*(\Sigma)$ -module gradué.

Démonstration. Remarquons qu'il y a une correspondance bijective entre les éléments de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A^k(\Sigma), \mathbb{Z})$ et les éléments de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z^k(\Sigma), \mathbb{Z})$ qui s'annulent sur le sous-groupe $Z^k(\Sigma) \cap (I_\Sigma + J_\Sigma)$ de $Z^k(\Sigma)$. Or, ce sous-groupe est engendré par les polynômes de la forme

$$\left(\sum_{e \in \text{link}(\tau, \Sigma)} \langle e, m \rangle x_e \right) x_\tau$$

où τ est un cône de dimension $k-1$ et m est orthogonal à $\text{Vect}(\tau)$. En particulier, un poids de dimension k correspond à un élément de $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A^k(\Sigma), \mathbb{Z})$ si et seulement si pour tout $m \in \text{Vect}(\tau)^\perp$,

$$\sum_{\substack{\tau \text{ face de } \sigma \\ \sigma \in \Sigma_k}} \omega(\sigma) \langle e_{\sigma/\tau}, m \rangle = 0.$$

Il suffit alors de remarquer que $\text{Vect}(\tau)^{\perp\perp} = \text{Vect}(\tau)$.

□

4.2.3 Anneau de CHOW d'un matroïde

Dans cette sous-section, on suppose que $\Sigma = \Sigma_M$ où M est un matroïde sans boucle. On va voir que l'anneau de CHOW de Σ correspond à l'anneau de CHOW de M tel que nous l'avons décrit en sous-section 2.5.1. L'anneau S_Σ est dans ce cas plus facilement décrit lorsque ses indéterminées sont indexées par les clos propres non vides, i.e

$$S_{\Sigma_M} = \mathbb{Z}[X_F]_{F \in \mathcal{L}_M^*}.$$

Étant donné un drapeau $\mathcal{F}$ d'éléments de $\mathcal{L}_M^*$, on note

$$X_{\mathcal{F}} = \prod_{F \in \mathcal{F}} X_F.$$

Proposition 4.2.21. *On dispose des faits suivants.*

- L'idéal I_{Σ_M} est engendré par les monômes de la forme $X_F X_G$ où $F, G \in \mathcal{L}_M^*$ sont incomparables.
- L'idéal J_{Σ_M} est engendré par les formes linéaires

$$\sum_{\substack{F \in \mathcal{L}_M^* \\ i \in F}} X_F - \sum_{\substack{F \in \mathcal{L}_M^* \\ j \in F}} X_F$$

où i et j sont des éléments distincts de E .

Démonstration. C'est une simple traduction de la correspondance entre un monôme X_F et le monôme X_{e_F} . □

Notation 4.2.22. Pour simplifier les notations et les énoncés, on note avec un x minuscule les images dans $A^*(\Sigma_M)$ des monômes de Σ_M . Ainsi, on note x_F l'image d'un X_F ($F \in \mathcal{L}_M^*$) et $x_{\mathcal{F}}$ l'image de $X_{\mathcal{F}}$ ($\mathcal{F}$ un drapeau).

Définition-proposition 4.2.23. *Soit $i \in E$. Les formes linéaires*

$$\alpha_{M,i} = \sum_{\substack{F \in \mathcal{L}_M^* \\ i \in F}} x_F \quad \text{et} \quad \beta_{M,i} = \sum_{\substack{F \in \mathcal{L}_M^* \\ i \notin F}} x_F$$

sont indépendantes de i , notées plus simplement α_M et $\beta_M \in A^(\Sigma_M)$.*

Démonstration. Application de la proposition précédente décrivant l'idéal J_{Σ_M} . □

Proposition 4.2.24. *Soit $\mathcal{F} = (F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_k)$ un drapeau d'éléments de $\mathcal{L}_M^*$.*

- (i) *S'il existe $m \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tel que F_m n'est pas de rang m , alors*

$$x_{\mathcal{F}} \alpha_M^{d-k} = 0.$$

- (ii) *Sinon (i.e si pour tout $m \in \llbracket 1, k \rrbracket$, F_m est de rang m), alors*

$$x_{\mathcal{F}} \alpha_M^{d-k} = \alpha_M^d.$$

Remarque 4.2.25. Le second cas apparaît par exemple lorsque $\mathcal{F}$ est maximal.

Démonstration. Remarquons avant tout que pour tout $i \in E$ qui n'est contenu dans aucun $F \in \mathcal{L}_M^*$, alors pour tout $F \in \mathcal{L}_M^*$ ne contenant pas i ,

$$x_F \alpha_M = x_F \sum_{\substack{G \in \mathcal{L}_M^* \\ i \in G, F \subseteq G}} x_G \in A^*(\Sigma_M).$$

En effet, la différence des deux membres est exactement la somme des $x_F x_G$ avec $G \in \mathcal{L}_M^*$ contenant i mais pas F . Or, un tel G ne peut pas être contenu dans F , donc F et G sont incomparables et alors $x_F x_G = 0$ dans $A^*(\Sigma_M)$. Remarquons en particulier que si F est de rang d alors l'ensemble des indices sur lequel la somme du second membre porte est *vide*. Ainsi, $x_F \alpha_M = 0$ dans ce cas.

(i) On procède par récurrence descendante sur $k \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$.

- Cas $k = d-1$. Par hypothèse sur les rangs des clos du drapeau $\mathcal{F}$, on doit avoir $\text{rg}_M(F) \geq k+1 = d$. On sait aussi que de manière générale, $\text{rg}_M(F) \leq \text{rg}(M)$ puisque F est un clos propre de M . On a déjà montré qu'alors $x_{F_k} \alpha_M = 0$.
- Hérédité. Soit $k \in \llbracket 1, d-2 \rrbracket$. On suppose le résultat vrai pour un drapeau de $k+1$ éléments de $\mathcal{L}_M^*$. Soit et soit $\mathcal{F} = (F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_k)$ tel que l'un des F_m ne soit pas de rang m . Soit enfin $i \notin F_k$. Grâce à l'observation préliminaire

$$x_{F_1} \dots x_{F_k} \alpha_M^{r-k} = x_{F_1} \dots x_{F_k} \alpha_M^{r-k-1} \sum_{\substack{G \in \mathcal{L}_M^* \\ i \in G, F \subseteq G}} x_G.$$

Le second membre est nulle puisqu'une fois la somme distribuée, on se retrouve alors avec une somme de $x_{\mathcal{F}'} \alpha_M^{r-k-1}$ avec $\mathcal{F}'$ de la forme $\mathcal{F}' = (F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_k \subsetneq G)$, mais selon l'hypothèse de récurrence, ces termes sont tous nuls.

(ii) Similaire mais par récurrence ascendante. □

Remarque 4.2.26. En particulier : si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des drapeaux maximaux d'éléments de $\mathcal{L}_M^*$, alors $x_{\mathcal{F}} = x_{\mathcal{G}}$.

Remarque 4.2.27. Ce résultat permet de montrer que $A^d(\Sigma_M)$ est engendré par α_M^d : $A^d(\Sigma_M)$ est engendré par les monômes de degré d , i.e les monômes de la forme $x_{F_1} \dots x_{F_d}$. Or, un tel monôme est nul dès lors que deux F_i et F_j sont incomparables, donc $A^d(\Sigma_M)$ est plus simplement engendré par les $x_{F_1} \dots x_{F_d}$ où $F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_d$ est un drapeau de d éléments de $\mathcal{L}_M^*$. Or, on vient de montrer que $x_{F_1} \dots x_{F_d} = \alpha_M^d$. Ainsi, $A^d(\Sigma_M) = \mathbb{Z} \alpha_M^d$.

Remarque 4.2.28 (parallèle avec la théorie des variétés toriques et leurs éventails). Si Σ est un éventail complet et $\deg$ désigne l'application de degré de la variété complète de Σ , alors on dispose d'un isomorphisme

$$\left| \begin{array}{ll} A^k(\Sigma) & \longrightarrow \text{MW}_{n-k}(\Sigma) \\ \xi & \longmapsto (\sigma \mapsto \deg(\xi \cdot x_\sigma)) \end{array} \right.$$

L'application de degré et ce résultat sont présentés et démontrés par W. FULTON et B. STURMFELS dans [FS97]. Les résultats ci-après dans ce mémoire s'attellent à proposer une construction analogue.

Définition 4.2.29. Soit M un matroïde de rang $d+1$. L'application degré de M est le morphisme

$$\deg : \left| \begin{array}{ll} A^d(M) & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \xi & \longmapsto \xi \cap 1_M \end{array} \right.$$

où 1_M est le poids de MINKOWSKI de dimension d sur Σ_M constant à 1.

Remarque 4.2.30. On rappelle qu'on a vu en remarque 4.2.5 que $MW^0(\Sigma)$ était isomorphe à $\mathbb{Z}$, ce qui justifie le fait qu'on écrive $\mathbb{Z}$ comme espace d'arrivée de l'application de degré.

Remarque 4.2.31. Selon la proposition 4.2.16, $Z^d(\Sigma_M)$ engendre $A^k(\Sigma_M)$. L'application est donc uniquement déterminée par ses valeurs en les $x_{\mathcal{F}}$ où les $x_{\mathcal{F}}$ sont des monômes correspondant à des cônes de dimension d dans Σ_M . On a même

$$\deg(x_{\mathcal{F}}) = 1$$

pour tout tel $x_{\mathcal{F}}$. En effet, si $\sigma = \{0\}$ (le seul cône dimension 0), alors $x_{\sigma} = 1$ et donc

$$x_{\mathcal{F}} \cap 1_M(\sigma) = t_{\Sigma_M}(1_M)(x_{\mathcal{F}}) = 1_M(x_{\mathcal{F}}) = 1.$$

Proposition 4.2.32. *L'application de degré de M est un isomorphisme.*

Démonstration. Puisque $A^d(\Sigma_M) = \mathbb{Z}\alpha_M^d$, il suffit de vérifier que $\deg(\alpha_M^d) = 1$. En effet, $x_{F_1} \cdots x_{F_d} = \alpha_M^d$ pour un quelconque drapeau $\mathcal{F} = (F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_d)$ d'éléments de $\mathcal{L}_M^*$, ce qui signifie que

$$\deg(\alpha_M^d) = \deg(x_{\mathcal{F}}) = 1.$$

□

4.2.4 Équivalences de CHOW

Étant donné un éventail Σ , on peut démontrer que l'anneau de CHOW (d'éventail) de Σ est isomorphe à l'anneau de CHOW (de variété algébrique) de $X(\Sigma)$. Cet isomorphisme est

$$\begin{array}{ccc} A^*(\Sigma) & \longrightarrow & A^*(X(\Sigma)) \\ x_{\sigma} & \longmapsto & [X(\text{star}(\sigma, \Sigma))] \end{array}.$$

On pourra consulter [BDCP90] et [Bri96] pour la démonstration de ce fait.

Définition 4.2.33. *Soit X et Y des variétés algébriques. Un morphisme de variétés algébriques $X \rightarrow Y$ est dit être une équivalence de CHOW si le morphisme d'anneaux induit $A^*(Y) \rightarrow A^*(X)$ est un isomorphisme.*

Nous nous intéressons ici au cas des variétés toriques correspondant à des matroïdes. Par exemple, on montrera pour tout matroïde M et tout filtre $\mathcal{P}$ sur M que l'inclusion

$$X(\tilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}) \hookrightarrow X(\Sigma_{M,\mathcal{P}})$$

est une équivalence de CHOW. On commencera alors à apprécier les constructions algébriques sur les matroïdes : la proposition suivante relie l'existence d'une équivalence de CHOW avec une variété projective avec la réalisabilité d'un matroïde sur un corps.

Théorème 4.2.34. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Un matroïde M est réalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement s'il existe une équivalence de CHOW d'une variété projective sur $\mathbb{K}$ vers $X(\Sigma_M)$.*

Démonstration. Admis. Voir [AHK18, page 409]

□

4.3 Dualité de POINCARÉ

4.3.1 Anneau de CHOW de $\Sigma_{M,\mathcal{P}}$

Soit $S_{E \sqcup \mathcal{P}} = \mathbb{Z}[X_i, X_F]_{i \in E, F \in \mathcal{P}}$ l'anneau de polynôme sur $\mathbb{Z}$ dont les indéterminées sont indexées par $E \sqcup \mathcal{P}$. On définit plusieurs idéaux sur cet anneau.

- *Relations d'incomparabilité.* L'idéal $\mathcal{J}_1$ est l'idéal engendré par les monômes quadratiques de la forme

$$X_F X_G$$

où F et G sont deux éléments de $\mathcal{P}$ incomparables.

- *Relations des compléments* L'idéal $\mathcal{J}_2$ est l'idéal généré par les monômes quadratiques de la forme

$$X_i X_F$$

où $F \in \mathcal{P}$ et $i \in E \setminus F$.

- *Relations de clôture.* L'idéal $\mathcal{J}_3$ est l'idéal engendré par les monômes de la forme

$$\prod_{i \in I} X_i$$

où I est un indépendant de M dont la clôture est élément de $\mathcal{P} \cup \{E\}$.

- *Relations linéaires.* L'idéal $\mathcal{J}_4$ est l'idéal engendré par les formes linéaires de la forme

$$\left(X_i + \sum_{F \in \mathcal{P}, i \in F} X_F \right) - \left(X_j + \sum_{F \in \mathcal{P}, j \in F} X_F \right)$$

où i et j sont des éléments distincts de E .

Définition 4.3.1. Soit M un matroïde et $\mathcal{P}$ un filtre sur M . On appelle anneau de CHOW de $(M, \mathcal{P})$ l'algèbre graduée commutative

$$A^*(M, \mathcal{P}) = S_{E \sqcup \mathcal{P}} / (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_4).$$

Notation 4.3.2. Comme précédemment, on note l'image des indéterminées dans l'anneau de CHOW en remplaçant le X majuscule des indéterminées par un x minuscule.

Remarque 4.3.3 (cas vide $\mathcal{P} = \emptyset$). Si $\mathcal{P}$ est vide, alors $\mathcal{J}_2 = (0)$ $\mathcal{J}_4$ est l'idéal engendré par $(X_i)_{i \in E}$ de sorte que les x_i sont tous égaux (dans $A^*(M, \emptyset)$). De plus, les indépendants de M dont la clôture est E sont toutes des parties de rang $\text{rg}(M)$ et donc de cardinal $\text{rg}(M) = d + 1$, ce qui signifie que

$$A^*(M, \emptyset) \cong \mathbb{Z}[X] / (X^{d+1}).$$

Remarque 4.3.4 (cas plein $\mathcal{P} = \mathcal{L}_M^*$). Lorsque $\mathcal{P} = \mathcal{L}_M^*$: puisque M est sans boucle, tous ses singletons sont indépendants, donc grâce à l'idéal $\mathcal{J}_3$, pour tout $i \in E$, $x_i = 0$. On retrouve donc l'anneau de CHOW d'un matroïde, i.e

$$A^*(M, \mathcal{P}) = A^*(\Sigma_M).$$

En fait, on a même

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 = I_{\Sigma_M} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_4 = J_{\Sigma_M}.$$

On peut plus généralement observé que si $i \in E$ est tel que $\text{cl}(\{i\})$ est dans P , alors $x_i = 0$ dans $A^*(M, \mathcal{P})$. L'ensemble des monômes sans facteur carré issus des indéterminées restantes correspondent alors bijectivement aux non-faces³ du complexe de BERGMAN $\Delta_{M, \mathcal{P}}$. Ainsi,

$$A^*(M, \mathcal{P}) = A^*(\Sigma_{M, \mathcal{P}}).$$

La prochaine proposition permet de démontrer que l'anneau de CHOW d'un couple $(M, \mathcal{P})$ est isomorphe à l'anneau de CHOW de l'éventail de BERGMAN réduit $\widetilde{\Sigma}_{M, \mathcal{P}}$.

Proposition 4.3.5. Soit $\mathcal{P}$ un filtre sur le matroïde M . Soit $I \in \mathcal{P}(E)$ et $F \in \mathcal{P}$.

(i) Si $\text{card } I \geq \text{rg } F$,

$$\left(\prod_{i \in I} x_i \right) x_F = 0$$

dans $A^*(M, \mathcal{P})$.

(ii) Si $\text{card } I \geq d + 1$,

$$\prod_{i \in I} x_i = 0$$

dans $A^*(M, \mathcal{P})$.

Démonstration. On montre le premier point. Grâce aux relations de compléments, on peut supposer que I est contenu dans F . On démontre le résultat sur l'entier $\text{rg}_M(F) - \text{rg}_M(I)$. Si cette différence est 0, I contient une base de F et on obtient le résultat grâce aux relations de clôture. Si la différence est strictement positive, on trouve J une partie de F telle que

$$\text{rg}_M(J) = \text{rg}_M(I) + 1, \quad I \setminus J = \{i\}, \quad \text{et} \quad J \setminus I = \{j\}.$$

Selon les relations linéaires, il apparait que

$$x_i + \sum_{\substack{G \in \mathcal{P} \\ i \in G, j \notin G}} x_G = x_j + \sum_{\substack{G \in \mathcal{P} \\ j \in G, i \notin G}} x_G.$$

On multiplie ensuite les deux côtés de l'égalités par

3. Étant donné un complexe simplicial Δ sur un ensemble E , l'ensemble des non-faces est l'ensemble $\mathcal{P}(E) \setminus \Delta$. Autrement dit, une non face est un ensemble de sommet qui n'est pas dans le complexe simplicial.

$$x_F \prod_{i \in I \cap J} x_i.$$

Or après avoir développé les deux membres, on observe qu'un terme divisible par x_G est toujours nul. En effet,

- si G n'est pas inclus dans F , un tel terme est nul de par les relations d'incomparabilité;
- si $I \cap J$ n'est pas contenu dans G , le terme est nul selon les relations des compléments;
- si $I \cap J \subseteq G$, il est nul par hypothèse de récurrence.

De plus, le membre de droite est nul par hypothèse de récurrence sur $J \subseteq F$.

Le second point se montre de la même manière par récurrence descendante sur le rang de I . □

Remarque 4.3.6. Ainsi, l'inclusion de l'ouvert $X(\widetilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}) \hookrightarrow X(\Sigma_{M,\mathcal{P}})$ est une équivalence de CHOW. En effet, le morphisme induit est l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} A^*(\Sigma_{M,\mathcal{P}}) & \longrightarrow & A^*(\widetilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}) \\ x_\sigma & \longmapsto & \begin{cases} x_\sigma & \text{si } \sigma \in \widetilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right|$$

Or, si $\sigma \in \Sigma_{M,\mathcal{P}} \setminus \widetilde{\Sigma}_{M,\mathcal{P}}$, alors σ est de la forme $\sigma = \sigma_{I < \mathcal{F}}$ où $\text{card } I \geq \text{rg}_M(\min \mathcal{F})$. Si $\mathcal{F} = \emptyset$, alors $\text{card } I \geq \text{rg}(M) = d + 1$ et alors $x_{\sigma_{I < \mathcal{F}}} = \prod_{i \in I} x_i = 0$ selon la proposition précédente. Si $\mathcal{F}$ est non vide, alors $x_{\sigma_{I < \mathcal{F}}} = \prod_{i \in I} \prod_{F \in \mathcal{F}} x_F = 0$, toujours selon la même proposition.

Puisque l'éventail de BERGMAN réduit est de dimension d , on remarque $A^k(M, \mathcal{P}) = 0$ pour tout $k > d$. En fait, l'anneau de CHOW se comporte comme une cohomologie.

On étend ensuite les isomorphismes étudiés en proposition 4.1.37.

Proposition 4.3.7. *Le morphisme π_{PL} induit un isomorphisme d'anneaux gradués*

$$\pi_{\text{PL}} : A^*(M, \mathcal{P}) \rightarrow A^*(\overline{M}, \mathcal{P}),$$

tandis que le morphisme ι_{PL} induit l'isomorphisme d'anneaux gradués inverse

$$\iota_{\text{PL}} : A^*(\overline{M}, \mathcal{P}) \rightarrow A^*(M, \mathcal{P}),$$

Démonstration. On étend naturellement π_{PL} et ι_{PL} à $A^*(M, \mathcal{P})$ et $A^*(\overline{M}, \mathcal{P})$. Il suffit alors de vérifier que ces extensions préserve les relations de $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, et $\mathcal{J}_3$. □

4.3.2 Tiré en arrière sur l'anneau de CHOW et morphisme de Gysin

Dans cette sous-section, $\mathcal{P}_-$ désigne un filtre sur $\mathcal{L}_M^*$. Soit Z un clos maximal dans $\mathcal{L}_M^* \setminus \mathcal{P}_-$. On pose alors

$$\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_- \cup \{Z\} \subseteq \mathcal{L}_M^*.$$

C'est aussi un filtre sur $\mathcal{L}_M^*$.

Définition 4.3.8. Le retournement matroïdal $\mathcal{P}_-$ à $\mathcal{P}_+$ est la modification $\Sigma_{M, \mathcal{P}_-} \rightsquigarrow \Sigma_{M, \mathcal{P}_+}$. Ce retournement consiste à retirer les cônes de la forme $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ où $\text{cl}_M(I) = Z$ et $\min \mathcal{F} \neq Z$, par les cônes de la forme $\sigma_{I < \mathcal{F}}$ où $\text{cl}_M(I) \neq Z$ et $\min \mathcal{F} = Z$.

Le clos Z est appelé le *centre* du retournement matroïdal.

Remarque 4.3.9. Le centre Z est minimal dans $\mathcal{P}_+$ par définition d'un filtre. De plus,

$$\text{star}(\sigma_{Z < \emptyset}, \Sigma_{\mathcal{P}_-}) \cong \Sigma_{M_Z} \quad \text{et} \quad \text{star}(\sigma_{\emptyset < \{Z\}}, \Sigma_{\mathcal{P}_-}) \cong \Sigma_{M_Z}.$$

Tiré en arrière

Définition-proposition 4.3.10. Il existe un morphisme d'anneaux gradués

$$\Phi_Z : A^*(M, \mathcal{P}_-) \rightarrow A^*(M, \mathcal{P}_+)$$

uniquement déterminé par ses valeurs en les x_F et les x_i :

— pour tout clos $F \in \mathcal{P}$,

$$\Phi_Z(x_F) = x_F;$$

— pour tout $i \in Z$,

$$\Phi_Z(x_i) = \begin{cases} x_i + x_Z & \text{si } i \in Z, \\ x_i & \text{si } i \notin Z. \end{cases}$$

Ce morphisme est appelé *morphisme de tiré en arrière* (ou *pullback*) associé au retournement matroïdal de $\mathcal{P}_-$ à $\mathcal{P}_+$.

Démonstration. Soit $\varphi_Z : S_{E \cup \mathcal{P}_-} \rightarrow S_{E \cup \mathcal{P}_+}$ le morphisme d'anneaux vérifiant

— pour tout clos $F \in \mathcal{P}$,

$$\varphi_Z(X_F) = X_F;$$

— pour tout $i \in Z$,

$$\varphi_Z(X_i) = \begin{cases} X_i + X_Z & \text{si } i \in Z, \\ X_i & \text{si } i \notin Z. \end{cases}$$

Montrons que $\varphi_Z(\mathcal{J}_1) \subseteq \mathcal{J}_1$, $\varphi_Z(\mathcal{J}_2) \subseteq \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$, $\varphi_Z(\mathcal{J}_3) \subseteq \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3$, et $\varphi_Z(\mathcal{J}_4) \subseteq \mathcal{J}_4$.

- (i) Si $F, G \in \mathcal{P}_-$ sont des clos incomparables, alors $\varphi_Z(X_F X_G) = X_F X_G \in S_{E \cup \mathcal{P}_+}$ est dans $\mathcal{J}_1$ puisque $\mathcal{P}_- \subseteq \mathcal{P}_+$.
- (ii) Soit $F \in \mathcal{P}_-$ et $i \in E \setminus F$. Alors,

$$\varphi_Z(X_i X_F) = X_i X_F + \mathbb{1}_Z(i) X_Z X_F.$$

où $\mathbb{1}_Z$ est l'indicatrice de Z . Si $i \notin Z$, alors $\varphi_Z(X_i X_F) = X_i X_F$ est dans $\mathcal{J}_2 \subseteq S_{E \cup \mathcal{P}_+}$. Si $i \in Z$, alors $x_Z x_F$ est élément de $\mathcal{J}_1 \subseteq S_{E \cup \mathcal{P}_+}$. En effet, Z étant minimal dans $\mathcal{P}_+$, on a

$F \not\subseteq Z$. De plus, si l'on avait $Z \subseteq F$, alors i serait aussi élément de F , ce qui est exclu par hypothèse.

(iii) Soit I une partie libre de M dont la clôture est élément de $\mathcal{P}_- \cup \{E\}$. Alors,

$$\varphi_Z \left(\prod_{i \in I} X_i \right) = \prod_{i \in I \setminus Z} X_i \prod_{i \in I \cap Z} (X_i + X_Z).$$

En développant ces produits, on obtient le terme $\prod_{i \in I} X_i$ qui est dans $\mathcal{J}_3$. Puisque Z est minimal dans $\mathcal{P}_+$, $I \setminus Z$ est non vide et contient un certain $i_0 \in I \setminus Z$. Le reste des termes est donc divisible par $x_{i_0} x_Z$ qui est dans $\mathcal{J}_2$.

(iv) Comme pour le premier point, un générateur de $\mathcal{J}_4 \subseteq S_{E \cup \mathcal{P}_-}$ est clairement envoyé par φ_Z sur un générateur de $S_{E \cup \mathcal{P}_+}$.

□

Proposition 4.3.11. Si $\text{rg}_M(Z) = 1$, le morphisme de tiré en arrière Φ_Z est un isomorphisme de $A^*(M, \mathcal{P}_-)$ vers $A^*(M, \mathcal{P}_+)$.

Démonstration. Soit $j, k \in Z$ des éléments distincts de Z . Puisque Z est de rang 1, alors tout clos de M contient j si et seulement s'il contient k . Par définition de $\mathcal{J}_4$, on a alors $x_j = x_k$ dans $A^*(M, \mathcal{P}_-)$.

Soit $\ell \in Z$. Grâce à cette observation, on peut directement construire l'inverse : on définit $\Phi'_Z(x_Z) = x_\ell$ (pas besoin de choisir un x_ℓ particulier avec $\ell \in Z$, ils sont tous égaux), puis $\Phi'_Z(x_F) = x_F$, et enfin $\Phi'_Z(x_i) = 0$ si $i \in Z$ et $\Phi'_Z(x_i) = x_i$ sinon.

Il suffit alors de vérifier que Φ'_Z est bien définie comme on l'a fait avec Φ_Z plus tôt et que $\Phi'_Z = \Phi_Z^{-1}$.

□

Morphisme de Gysin

Définition-proposition 4.3.12. Soient p et q des entiers strictement positifs.

(i) Il existe un unique morphisme de groupes

$$\Psi_Z^{p,q} : A^{q-p}(M_Z) \rightarrow A^q(M, \mathcal{P}_+)$$

vérifiant $\Psi_Z^{p,q}(x_{\mathcal{F}}) = x_Z^p x_{\mathcal{F}}$ pour tout drapeau $\mathcal{F}$ d'éléments de $\mathcal{L}_{M_Z}^*$ de cardinal $q - p$.

(ii) Il existe un unique morphisme de groupes

$$\Gamma_Z^{p,q} : A^{q-p}(M^Z) \rightarrow A^q(M)$$

vérifiant $\Gamma_Z^{p,q}(x_{\mathcal{F}}) = x_Z^p x_{\mathcal{F}}$ pour tout drapeau $\mathcal{F}$ d'éléments de $\mathcal{L}_{M^Z}^*$ de cardinal $q - p$.

Le morphisme $\Psi_Z^{p,q}$ est appelé *morphisme de Gysin de type (p, q)* associé au retournement matroïdal de $\mathcal{P}_-$ à $\mathcal{P}_+$.

Notation 4.3.13. Soit $\mathcal{P}$ un filtre sur $\mathcal{L}_M^*$ et une suite de filtre

$$\emptyset, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}, \dots, \mathcal{L}_M^*$$

où chaque filtre dans cette suite est obtenu en ajoutant un clos au précédent. On a alors une suite

$$\Sigma_{M, \emptyset} \rightsquigarrow \Sigma_{M, \mathcal{P}_1} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \Sigma_{M, \mathcal{P}} \rightsquigarrow \dots \Sigma_M.$$

On note alors

$$\Phi_{\mathcal{P}} = A^*(M, \emptyset) \rightarrow A^*(M, \mathcal{P}) \quad \text{et} \quad \Phi_{\mathcal{P}^c} = A^*(M, \mathcal{P}) \rightarrow A^*(M)$$

les compositions des tirés en arrière. On peut montrer que $\Phi_{\mathcal{P}}$ et $\Phi_{\mathcal{P}^c}$ ne dépendent pas de la suite de filtres. La composition de tous les tirés en arrière est uniquement déterminée par leurs valeurs en les x_i : pour tout $i \in E$,

$$\Phi_{\mathcal{P}^c} \circ \Phi_{\mathcal{P}}(x_i) = \alpha_M.$$

4.3.3 Isomorphismes pertinents

Soit --- tel que dans la sous-section précédente, $\mathcal{P}_-$ et $\mathcal{P}_+$ et soit Z le centre du retournement matroïdal de $\mathcal{P}_-$ à $\mathcal{P}_+$.

Notation 4.3.14. Si $q \geq 1$, on note $\Phi_Z^q : A^q(M, \mathcal{P}_-) \rightarrow A^q(M, \mathcal{P}_+)$ la q -ième composante du morphisme de tiré en arrière.

Proposition 4.3.15. Pour tout $q \geq 1$, le morphisme

$$\Phi_Z^q \oplus \bigoplus_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} \Psi_Z^{p,q} : A^q(M, \mathcal{P}_-) \oplus \bigoplus_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} A^{q-p}(M_Z, \mathcal{P}_-) \rightarrow A^q(M, \mathcal{P}_+)$$

est surjectif.

On présente quelques corollaires de ce résultats, puis les lemmes nécessaires à sa démonstration.

Corollaire 4.3.16. Le morphisme de tiré en arrière Φ_Z est un isomorphisme en degré d , i.e

$$\Phi_Z^d : A^d(M, \mathcal{P}_-) \rightarrow A^d(M, \mathcal{P}_+)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le matroïde contracté M_Z est de rang $\text{crg}_M(Z)$ et donc $\Psi_Z^{p,q} = 0$ dès lors que $p < \text{rg}_M(Z)$ et $q = d$. Appliquée à la proposition 4.3.15, le morphisme Φ_Z est surjectif en degré d . □

Remarque 4.3.17. En appliquant plusieurs fois ce corollaire, on peut montrer que les composantes de degré d de $\Phi_{\mathcal{P}}$ et $\Phi_{\mathcal{P}^c}$ sont des isomorphismes pour tout filtre $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{L}_M^*$.

Remarque 4.3.18. Soit une suite de retournement matroïdaux

$$\Sigma_{M,\emptyset} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \Sigma_{M,\mathcal{P}_-} \rightsquigarrow \Sigma_{M,\mathcal{P}_+} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \Sigma_M.$$

On peut alors considérer la suite de morphisme de groupes correspondante en degré d

$$A^d(M, \emptyset) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}_-}} A^d(M, \mathcal{P}_-) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}_+}} A^d(M, \mathcal{P}_+) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}_+^c}} A^d(M).$$

En appliquant la proposition 4.3.15 avec le même raisonnement que le corollaire précédent, on observe que les trois morphismes de groupes sont surjectifs. Or, le premier groupe est isomorphe à $\mathbb{Z}$ tandis que le dernier l'est aussi (proposition 4.2.32). Cela signifie que les trois morphismes sont des isomorphismes. En particulier, pour tout filtre $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{L}_M^*$, le groupe $A^d(M, \mathcal{P})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Remarque 4.3.19. Selon la première partie de la proposition 4.3.12, $x_Z \beta_{M_Z}$ est élément de $A^*(M, \mathcal{P}_+)$ (en particulier élément de $A^2(M, \mathcal{P}_+)$) puisque c'est l'image de β_{M_Z} par $\Psi_Z^{p,q}$ avec $(p, q) = (1, 2)$. Cette observation justifie que le lemme suivant a un sens.

Lemme 4.3.20. Pour tout $i \in Z$,

$$x_i x_Z + x_Z^2 + x_Z \beta_{M_Z} = 0$$

dans $A^*(M, \mathcal{P}_+)$.

Démonstration. Soit $j \in E \setminus Z$ et on considère l'élément de $S_{E \cup \mathcal{P}_+}$

$$\gamma = \left(X_i + \sum_{F \in \mathcal{P}, i \in F} X_F \right) - \left(X_j + \sum_{F \in \mathcal{P}, j \in F} X_F \right) \in \mathcal{J}_4.$$

C'est une relation linéaire et

$$\gamma = \left(X_i + \sum_{F \in \mathcal{P}, i \in F, j \notin F} X_F \right) - \left(X_j + \sum_{F \in \mathcal{P}, j \in F, i \notin F} X_F \right).$$

Or, en multipliant par X_Z , on obtient

$$X_Z \gamma = X_i X_Z + \sum_{F \in \mathcal{P}, i \in F, j \notin F} X_F X_Z - X_j X_Z - \sum_{F \in \mathcal{P}, j \in F, i \notin F} X_F X_Z.$$

En passant au quotient, $x_j x_Z = 0$ (relation des compléments) puisque $j \notin Z$, et

$$\sum_{F \in \mathcal{P}, j \in F, i \notin F} x_F x_Z = 0$$

(relation d'incomparabilité) puisque pour tout $F \in \mathcal{P}$ contenant j mais pas i , $F \not\subset Z$ par minimalité de Z et l'autre inclusion est exclu puisque i est dans Z . De plus,

$$\sum_{F \in \mathcal{P}, i \in F, j \notin F} x_Z x_Z = \sum_{F \in \mathcal{P}, Z \subsetneq F, j \notin F} X_Z X_F$$

pour les mêmes raisons. L'image dans le quotient de γ est donc

$$x_i x_Z + x_Z^2 + \sum_{F \in \mathcal{P}, Z \subsetneq F, j \notin F} x_F x_Z,$$

qui est nulle car

$$X_i X_Z + X_Z^2 + \sum_{F \in \mathcal{P}, Z \subsetneq F, j \notin F} X_F X_Z$$

est élément de $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4$. Il reste à remarquer que

$$\sum_{F \in \mathcal{P}, Z \subsetneq F, j \notin F} x_F X_Z = \Psi_Z^{1,2}(\beta_{M_Z}).$$

□

Remarque 4.3.21 (on recommence, mais avec α_{M^Z}). Selon la seconde partie de la proposition 4.3.12, $x_Z \alpha_{M_Z}$ est élément de $A^*(M)$ (en particulier élément de $A^2(M)$) puisque c'est l'image de α_{M^Z} par $\Gamma_Z^{p,q}$ avec $(p, q) = (1, 2)$. Cette observation justifie que le lemme suivant a un sens.

Lemme 4.3.22. *On dispose des résultats suivants.*

(i) *Soit $T \in \mathcal{L}_M \setminus \{E\}$. On suppose Z maximal parmi les clos de M strictement contenus dans T . Alors,*

$$x_Z x_T (x_Z + \alpha_{M^Z}) = 0$$

dans $A^(M)$.*

(ii) *Supposons Z maximal parmi les clos de M strictement contenus dans E . Alors,*

$$x_Z (x_Z + \alpha_{M^Z}) = 0$$

dans $A^(M)$.*

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du lemme 4.3.20.

□

Lemme 4.3.23. *La somme des images des morphismes de Gysin est égale à l'idéal engendré par x_Z , i.e*

$$\sum_{p,q>0} \text{im}(\Psi_Z^{p,q}) = x_Z A^*(M, \mathcal{P}_+).$$

Démonstration. L'inclusion de la somme des images dans l'idéal (x_Z) est claire par définition des morphismes de Gysin. Pour l'autre inclusion : puisque Z est minimal dans $\mathcal{P}_+$, les relations d'incomparabilité et de complément indiquent que tout monôme non nul de degré q dans $(x_Z) = x_Z A^*(M, \mathcal{P}_+)$ est de la forme

$$x_Z^k \prod_{F \in \mathcal{F}} x_F^{k_F} \prod_{i \in I} x_i^{k_i}$$

où la somme des exposants vaut q . Or, $k > 0$ puisque ce monôme est dans l'idéal engendré par x_Z , le lemme 4.3.20 montre que ce dernier est aussi dans

$$\sum_{\ell=k}^q \text{im } \Psi_Z^{k,q}.$$

□

Lemme 4.3.24. *Pour tout $p, q > 0$,*

$$x_Z \text{im } \Phi_Z^q \subseteq \text{im } \Psi_Z^{1,q+1} \quad \text{et} \quad x_Z \text{im } \Psi_Z^{p,q} \subseteq \text{im } \Psi_Z^{p+1,q+1}.$$

Si $F \in \mathcal{L}_M \setminus \{E\}$ est clos propre contenant Z ,

$$x_F \text{im } \Phi_Z^q \subseteq \text{im } \Phi_Z^{q+1} \quad \text{et} \quad x_F \text{im } \Psi_Z^{p,q} \subseteq \text{im } \Psi_Z^{p,q+1}.$$

Démonstration. On se contente de montrer l'inclusion $x_Z \text{im } \Phi_Z^q \subseteq \text{im } \Psi_Z^{1,q+1}$ (c'est la seule non triviale). On peut commencer par remarquer que $x_Z \text{im } \Phi_Z^q$ est généré par les éléments de la forme

$$\xi = x_Z \Phi_Z^q \left(\prod_{F \in \mathcal{F}} x_F^{k_F} \prod_{i \in I} x_i^{k_i} \right) = x_Z \prod_{F \in \mathcal{F}} x_F^{k_F} \prod_{i \in I \setminus Z} x_i^{k_i} \prod_{i \in I \cap Z} (x_i + x_Z)^{k_i}$$

avec $I \in \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F}$ un drapeau d'éléments de $\mathcal{P}_-$, et les k_i et k_F non nuls. Si I contient Z , alors

$$\xi = x_Z \prod_{F \in \mathcal{P}_-} x_F^{k_F} \prod_{i \in I} (x_i + x_Z)^{k_i} = x_Z \prod_{F \in \mathcal{P}_-} x_F^{k_F} \prod_{i \in I} (-\beta_{M_Z})^{k_i}$$

où la seconde égalité est obtenu en appliquant plusieurs fois le lemme 4.3.20. Ainsi,

$$\xi = \Psi_Z^{1,q+1} \left(\prod_{F \in \mathcal{P}_-} x_F^{k_F} \prod_{i \in I} (-\beta_{M_Z})^{k_i} \right).$$

Dans le cas inverse où I n'est pas contenu dans Z , alors ξ est nul puisqu'il est divisé une relation de compléments.

□

Lemme 4.3.25. *Pour tout $k \geq \text{rg}_M(Z)$ et $q \geq k$,*

$$\text{im } \Psi_Z^{k,q} \subseteq \text{im } \Phi_Z^q + \sum_{p=1}^{k-1} \text{im } \Psi_Z^{p,q}.$$

Démonstration. Grâce aux troisièmes et quatrièmes inclusions lemme précédent, il suffit de montrer le résultat quand $q = k$. Le reste s'obtient en multipliant des deux côtés par $x_{\mathcal{F}}$ où $\mathcal{F}$ est un drapeau compatible avec Z . Selon la première inclusion du même lemme, il suffit de montrer le cas $k = \text{rg}_M(Z)$. Le reste s'obtient en multipliant des deux côtés

par x_Z . Supposons donc $k = q = \text{rg}_M(Z)$. Soit I une base de Z (en tant que matroïde). On calcule le produit

$$\prod_{i \in I} (x_i + x_Z) \in \text{im } \Phi_Z^k.$$

Selon les relations de clôture, le terme $\prod_{i \in I} x_i$ est nul. On a donc en vertu du lemme 4.3.20

$$\prod_{i \in I} (x_i + x_Z) = (-\beta_{M_Z})^k - (-x_Z - \beta_{M_Z})^k.$$

Puisque cette somme est l'image de Φ_Z^k , après calcul du membre de droite, on observe que x_Z^k est élément de $\text{im } \Phi_Z^k + \sum_{p=1}^{k-1} \text{im } \Psi_Z^{p,k}$. Le résultat est alors démontré puisque x_Z^k engendre $\Psi_Z^{k,k}$. □

On peut enfin démontrer une partie du résultat principal de cette sous-section, *i.e* la proposition 4.3.15.

Démonstration (de la proposition 4.3.15). Rappelons que l'on cherche à montrer que pour tout $q \geq 1$,

$$\Phi_Z^q \oplus \bigoplus_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} \Psi_Z^{p,q} : A^q(M, \mathcal{P}_-) \oplus \bigoplus_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} A^{q-p}(M_Z, \mathcal{P}_-) \rightarrow A^q(M, \mathcal{P}_+)$$

est un morphisme surjectif. Puisque le lemme précédent montre que l'image de $\Psi_Z^{k,q}$ est incluse dans $\text{im } \Phi_Z^q + \sum_{p=1}^{k-1} \text{im } \Psi_Z^{p,q}$ dès lors que $k \geq \text{rg}_M(Z)$ et $q \geq k$, il suffit de montrer que

$$\Phi_Z^q \oplus \bigoplus_{p=1}^q \Psi_Z^{p,q} : A^q(M, \mathcal{P}_-) \oplus \bigoplus_{p=1}^q A^{q-p}(M_Z, \mathcal{P}_-) \rightarrow A^q(M, \mathcal{P}_+)$$

est surjectif. Selon le lemme 4.3.23, l'image du second membre de cette somme est l'ensemble des éléments de degré q dans l'idéal engendré par x_Z .

Il suffit enfin de montrer que tout monôme est dans l'image de Φ_Z modulo l'idéal engendré par x_Z . Soit donc P un monôme de degré q qui n'est pas dans l'idéal engendré par x_Z :

$$P = \prod_{F \in \mathcal{F}} x_F^{k_F} \prod_{i \in I} x_i^{k_i}$$

(où $\mathcal{F}$ est tel que $Z \notin \mathcal{F}$). On remarque alors que

$$\Phi_Z \left(\prod_{F \in \mathcal{F}} x_F^{k_F} \prod_{i \in I} x_i^{k_i} \right) = \prod_{F \in \mathcal{F}} x_F^{k_F} \prod_{i \in I \setminus Z} x_i^{k_i} \prod_{i \in I \cap Z} (x_i + x_Z)^{k_i} \equiv P \pmod{x_Z}.$$

□

On peut alors montrer que le morphisme de Gysin est un isomorphisme entre les dimensions maximales.

Proposition 4.3.26. *Si $d = \text{rg}(M) - 1$, alors*

$$\psi_Z^{\text{rg}_M(Z), d} : A^{\text{crg}_M(Z)-1}(M_Z) \xrightarrow{\cong} A^d(M, \mathcal{P}_+)$$

est un isomorphisme

Démonstration. On considère la composition

$$A^{\text{crg}_M(Z)-1}(M_Z) \xrightarrow{\Psi_Z^{p,q}} A^d(M, \mathcal{P}_+) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{P}^+}} A^d(M)$$

qui à $x_{\mathcal{F}}$ associe $x_Z^{\text{rg}_M(Z)} x_{\mathcal{F}}$ pour tout drapeau $\mathcal{F}$. On a vu au corollaire 4.3.16 que le second morphisme de la composition était un isomorphisme. Il suffit donc pour établir le résultat de montrer que la composition est un isomorphisme aussi. Les deux groupes étant monogènes (remarque 4.2.27) isomorphes à $\mathbb{Z}$, il suffit de montrer que l'application en question envoie un générateur de l'un sur un générateur de l'autre.

Soit donc $\mathcal{Z}_1$ un drapeau d'éléments de $\mathcal{L}_M^*$ contenus dans Z de cardinal $\text{card } \mathcal{Z}_1 = \text{rg}_M(Z) - 1$, et $\mathcal{Z}_2$ un drapeau d'éléments de $\mathcal{L}_M^*$ contenant Z de cardinal $\text{card } \mathcal{Z}_2 = \text{crg}_M(Z) - 1$. D'une part, selon la remarque 4.2.27, $x_{\mathcal{Z}_2}$ engendre $A^{\text{crg}_M(Z)-1}(M_Z)$. D'autre part, $x_{\mathcal{Z}_1} x_Z x_{\mathcal{Z}_2}$ engendre $A^d(M)$ puisque le drapeau $\mathcal{Z}$ obtenu en concaténant $\mathcal{Z}_1$, $\{Z\}$, et $\mathcal{Z}_2$ est un drapeau de cardinal d d'éléments de $\mathcal{L}_M^*$. L'élément x_Z engendre donc $A^d(M)$.

Il suffit donc de montrer que

$$(-1)^{\text{rg}_M(Z)-1} x_Z^{\text{rg}_M(Z)} x_{\mathcal{Z}_2} = x_{\mathcal{Z}_1} x_Z x_{\mathcal{Z}_2} \in A^*(M).$$

Selon le second résultat de la proposition 4.2.24, on a $x_{\mathcal{Z}_1} = \alpha_{M^Z}^{\text{rg}_M(Z)-1}$, et en appliquant $\Gamma_Z^{1, \text{rg}_M(Z)}$ on obtient

$$x_{\mathcal{Z}_1} x_Z x_{\mathcal{Z}_2} = (\alpha_{M^Z})^{\text{rg}_M(Z)-1} x_Z x_{\mathcal{Z}_2} \in A^*(M).$$

Enfin, le lemme 4.3.22 montre que le second membre vaut $(-1)^{\text{rg}_M(Z)-1} x_Z^{\text{rg}_M(Z)} x_{\mathcal{Z}_2}$. □

4.3.4 Les anneaux de CHOW de matroïdes filtrés vérifient la dualité de POINCARÉ

On note $\mathcal{P}_-$, $\mathcal{P}_+$, et Z comme précédemment. Soit de plus $\mathcal{P}$ un filtre sur $\mathcal{L}_M^*$. Dans cette sous-section, on montre les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.3.27 (décomposition). *Soit $q \geq 1$. La somme*

$$\Phi_Z^q \oplus \bigoplus_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} \Psi_Z^{p,q} : A^q(M, \mathcal{P}_-) \oplus \bigoplus_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} A^{q-p}(M_Z, \mathcal{P}_-) \rightarrow A^q(M, \mathcal{P}_+)$$

est un isomorphisme.

Théorème 4.3.28 (dualité de POINCARÉ). Soit $d = \operatorname{rg}(M) - 1$ et $q \geq 0$ tels que $q \leq d$. Alors, l'application de multiplication

$$A^q(M, \mathcal{P}) \times A^{d-q}(M, \mathcal{P}) \rightarrow A^d(M, \mathcal{P})$$

induit un isomorphisme de groupes

$$A^{d-q}(M, \mathcal{P}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A^q(M, \mathcal{P}), A^d(M, \mathcal{P})).$$

Remarque 4.3.29. Cela signifie en particulier que les groupes $A^q(M, \mathcal{P})$ sont sans torsion. En effet, $A^d(M, \mathcal{P})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ selon la remarque 4.3.18. Il apparaît donc que $A^{d-q}(M, \mathcal{P})$ est sans torsion pour tout $q \in \llbracket 0, d \rrbracket$.

On va montrer les deux résultats ensemble. Avant cela, on démontre deux lemmes. Ils nous permettront de démontrer les résultats par récurrence sur $(\operatorname{rg}(M), \operatorname{card} \mathcal{P})$ avec l'ordre lexicographique.

Lemme 4.3.30. Soit $q_1, q_2 \geq 1$.

(i) Pour tout $p \geq 1$,

$$\operatorname{im} \Psi_Z^{p, q_1} \operatorname{im} \Phi_Z^{q_2} \subseteq \operatorname{im} \Psi_Z^{p, q_1 + q_2}$$

où l'on a pris le produit des idéaux.

(ii) Pour tout $p_1, p_2 \geq 1$

$$\operatorname{im} \Psi_Z^{p_1, q_1} \operatorname{im} \Psi_Z^{p_2, q_2} \subseteq \operatorname{im} \Psi_Z^{p_1 + p_2, q_1 + q_2}.$$

Démonstration. Conséquence immédiate du lemme 4.3.24. □

Remarque 4.3.31. Le premier point montre que si $q_1 + q_2 = d$ et $p < \operatorname{rg}_M(Z)$, alors

$$\operatorname{im} \Psi_Z^{p, q_1} \cdot \operatorname{im} \Phi_Z^{q_2} = 0.$$

En effet, le lemme affirme que le membre de gauche est contenu dans $\operatorname{im} \Psi^{p, d}$. Or, $\Psi^{p, d}$ est au départ de $A^{d-p}(M_Z, \mathcal{P}_-)$ qui est nul par hypothèse sur p donc $\operatorname{im} \Psi^{p, d} = 0$.

Pour les mêmes raisons, le second point montre que si $q_1 + q_2 = d$ et $p_1 + p_2 < \operatorname{rg}_M(Z)$,

$$\operatorname{im} \Psi_Z^{p_1, q_1} \cdot \operatorname{im} \Psi_Z^{p_2, q_2} = 0.$$

Lemme 4.3.32. Soit $q \geq 1$, et $p_1, p_2 \geq 1$ des entiers distincts tels que $p_1, p_2 \leq \text{rg}_M(Z)$.

(i) Si $A^*(M, \mathcal{P}_-)$ vérifie la dualité de POINCARÉ,

$$\ker \Phi_Z^q = \{0\} \quad \text{et} \quad \text{im } \Phi_Z^q \cap \sum_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} \text{im } \Psi_Z^{p,q} = \{0\}.$$

(ii) Si $A^*(M_Z)$ vérifie la dualité de POINCARÉ,

$$\ker \Psi_Z^{p_1,q} = \ker \Psi_Z^{p_2,q} = 0 \quad \text{et} \quad \text{im } \Psi_Z^{p_1,q} \cap \text{im } \Psi_Z^{p_2,q} = \{0\}.$$

Démonstration. On ne montre que le premier point, le second étant similaire. Soit $\xi \in A^q(M, \mathcal{P}_-)$ non nul. Remarquons que

$$\Phi_Z^q(\xi) \cdot \text{im } \Phi_Z^{d-q} = \left\{ \Phi_Z^q(\xi) \Phi_Z^{d-q}(y) \mid y \in A^{d-q}(M, \mathcal{P}_-) \right\} = \left\{ \Phi_Z^d(\xi y) \mid y \in A^{d-q}(M, \mathcal{P}_-) \right\}$$

Supposons que $A^*(M, \mathcal{P}_-)$ vérifie la dualité de POINCARÉ. Ainsi, l'élément $\xi \in A^{d-q}(M, \mathcal{P}_-)$ définit *via* l'isomorphisme de la dualité une application $\mathbb{Z}$ -linéaire

$$A^q(M, \mathcal{P}_-) \rightarrow A^d(M, \mathcal{P}_-), y \mapsto \xi y.$$

La dualité de POINCARÉ étant vérifiée et ξ étant non nul, cette application est non nulle. Or, Φ_Z^d étant aussi un isomorphisme, on en déduit qu'il existe $y \in A^d(M, \mathcal{P}_-)$ tel que $\Phi_Z^d(\xi y) \neq 0$. Cela signifie que

$$\Phi_Z^q(\xi) \cdot \text{im } \Phi_Z^{d-q} \neq 0$$

et en particulier $\Phi_Z^q(\xi)$ est non nul. Pour la deuxième égalité, la remarque suivant le lemme précédent montre que

$$G := \left(\sum_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} \text{im } \Psi_Z^{p,q} \right) \cdot \text{im } \Phi_Z^{d-q} = 0.$$

Or si $\xi \in A^q(M, \mathcal{P}_-)$ est non nul, $\Phi_Z^q(\xi) \cdot \text{im } \Phi_Z^{d-q} \neq 0$ selon le point précédent donc Φ_Z^q ne peut pas être élément de $\sum_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} \text{im } \Psi_Z^{p,q}$ (si c'était le cas, on aurait $G \neq 0$). Cela montre que l'intersection de Φ_Z^q et de $\sum_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} \text{im } \Psi_Z^{p,q}$ est nulle. □

On peut alors démontrer les deux théorèmes.

Démonstration (des deux théorèmes). Comme annoncé, on démontre les deux résultats par récurrence sur $(\text{rg}(M), \text{card } \mathcal{P})$ avec l'ordre lexicographique.

On commence par remarquer que les résultats sont vrais lorsque $d = 1$, et que la dualité de POINCARÉ est vraie quand $q = 0$ ou $q = d$ (on pourra donc les ignorer dans la démonstration de l'hérédité). De plus, le cas de base a déjà été vu puisque l'on a montré en remarque 4.3.3 que l'on avait un isomorphisme

$$A^*(M, \emptyset) \cong \mathbb{Z}[X]/(X^{d+1}).$$

Pour démontrer l'hérédité de la propriété de récurrence, en supposant que $A^*(M_Z)$ vérifie la dualité de POINCARÉ, on va montrer les deux implications “(i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii)” où l'on note les trois assertions

- (i) $A^*(M, \mathcal{P}_-)$ vérifie la dualité de POINCARÉ.
- (ii) $A^*(M, \mathcal{P}_-)$ vérifie la dualité de POINCARÉ et le théorème de décomposition est vrai pour $\mathcal{P}_- \subseteq \mathcal{P}_+$.
- (iii) $A^*(M, \mathcal{P}_+)$ vérifie la dualité de POINCARÉ.

Supposons donc que $A^*(M_Z)$ vérifie la dualité de POINCARÉ

- *Première implication.* La proposition 4.3.15 donne la surjectivité. On va utiliser le dernier lemme pour montrer l'injectivité. Selon le premier point du lemme précédent, l'image du morphisme étudié dans le dit lemme (notons le f_q) est une somme directe

$$\mathrm{im} f_q = \mathrm{im} \Phi_Z^q \oplus \sum_{p=1}^{\mathrm{rg}_M(Z)-1} \mathrm{im} \Psi_Z^{p,q}.$$

Or, si $f_q(x) = 0$ avec

$$x = y + \sum_{p=1}^{\mathrm{rg}_M(Z)-1} y_p \in A^q(M, \mathcal{P}_-) \oplus \bigoplus_{p=1}^{\mathrm{rg}_M(Z)-1} A^{q-p}(M_Z, \mathcal{P}_-),$$

alors en particulier $f_q(y) = 0$ et donc $y = 0$ selon le dernier lemme. Encore selon le même lemme, l'image est en somme directe et donc $f(y_p) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, \mathrm{rg}_M(Z) - 1 \rrbracket$ et les $\Psi^{p,q}$ sont injectifs donc $y_1 = \dots = y_{\mathrm{rg}_M(Z)-1} = 0$. On a donc bien

$$\ker f_q = \{0\}.$$

- *Seconde implication.* Le théorème de décomposition pour $\mathcal{P}_- \subseteq \mathcal{P}_+$ montre que pour tout $q < d$,

$$A^q(M, \mathcal{P}_+) = \mathrm{im} \Phi_Z^q \oplus \bigoplus_{p=1}^q \mathrm{im} \Psi_Z^{p,q}$$

et

$$A^{d-q}(M, \mathcal{P}_+) = \mathrm{im} \Phi_Z^{d-q} \oplus \bigoplus_{s=1}^{\mathrm{rg}_M(Z)-1} \mathrm{im} \Psi_Z^{\mathrm{rg}_M(Z)-s, d-q}.$$

Or, $A^*(M, \mathcal{P}_-)$ et $A^*(M_Z)$ vérifiant la dualité de POINCARÉ, les images dans les sommes directes sont toutes sans torsion. On peut donc construire pour les deux sommes une base en choisissant une base pour chaque image des sommes directes. On utilise en plus le corollaire 4.3.16 et la proposition 4.3.26 pour obtenir les isomorphismes

$$A^d(M, \mathcal{P}_-) \cong A^d(M, \mathcal{P}_+) \cong A^{\mathrm{cr}_M(Z)-1}(M_Z) \cong \mathbb{Z}.$$

Considérons dans les bases choisies les matrices de multiplications

- $\mathcal{M}_+$ associée à la multiplication

$$A^q(M, \mathcal{P}_+) \times A^{d-q}(M, \mathcal{P}_+) \rightarrow \mathbb{Z};$$

— $\mathcal{M}_-$ associée à la multiplication

$$A^q(M, \mathcal{P}_+) \times A^{d-q}(M, \mathcal{P}_+) \rightarrow \mathbb{Z};$$

— et pour tout $1 \leq p < \text{rg}_M(Z)$ la matrice $\mathcal{M}_p$ associée à la multiplication

$$A^{q-p}(M_Z) \times A^{d-q-\text{rg}_M(Z)+p(M_Z)} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Selon le lemme 4.3.25, la matrice $\mathcal{M}_+$ est triangulaire supérieure par blocs dont les blocs diagonaux sont $\mathcal{M}_-$ et les $\mathcal{M}_p$ (au signe près). En vertu de la dualité de POINCARÉ pour $(M, \mathcal{P}_-)$ et M_Z , on obtient

$$\det \mathcal{M}_+ = \pm \det \mathcal{M}_- \prod_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} \det \mathcal{M}_p = \pm 1,$$

ce qui donne la seconde implication.

□

Chapitre 5

Dernière ligne droite

Dans cet ultime chapitre, on commence par étudier les anneaux artiniens gradués qui vérifient une dualité de POINCARÉ comme l'anneau réel de CHOW d'un matroïde filtré. Dans ce cadre, on s'intéresse à de tels anneaux qui vérifient l'une ou l'autre des deuxième et troisième propriétés du théorème principal, et que ces deux propriétés sont fortement liées. Pour cela, nous utiliserons les résultats précédemment démontré, en particulier ceux sur les cônes amples. Enfin, nous démontrerons le théorème principal.

5.1 Propriété de LEFSCHETZ difficile et relations de HODGE-RIEMANN

5.1.1 Dualité de POINCARÉ, propriétés HL et HR

Définition 5.1.1. Soit R^* un anneau artinien gradué et $d \geq 1$. On dit que R^* vérifie la dualité de POINCARÉ de dimension d si

- (i) les composantes R^0 et R^d sont isomorphes à $\mathbb{R}$;
- (ii) pour tout entier $q > d$, $R^q = \{0\}$;
- (iii) pour tout entier $1 \leq q \leq d$, la multiplication définit un isomorphisme

$$R^{d-q} \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(R^q, R^d).$$

On parle alors d'algèbre de dualité de POINCARÉ de dimension d .

Dans toute cette section, on suppose que R^* est une algèbre de dualité de POINCARÉ de dimension d . On se munit de plus d'un isomorphisme

$$\deg : R^d \rightarrow \mathbb{R}$$

(qui existe par définition) appelé *application de degré* de R^* .

Proposition 5.1.2. Soit $e \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $x \in R^e \setminus \{0\}$ et $\text{ann}(x) = \{a \in R^* \mid ax = 0\}$. L'anneau gradué quotient $R^*/\text{ann}(x)$ est un algèbre de dualité de POINCARÉ de dimension $d - e$.

Remarque 5.1.3. On ne propose pas de démonstration, mais on peut cependant observer qu'une application de degré de $R^*/\text{ann}(x)$ est donnée par

$$\left| \begin{array}{ll} R^{d-e}/\text{ann}(x) & \longrightarrow R \\ a + \text{ann}(x) & \longmapsto \deg(ax) \end{array} \right. .$$

Définition 5.1.4. Soit $\ell \in R^1$ et $q \geq 0$ un entier tel que $q \leq d/2$.

— On appelle opérateur de LEFSCHETZ sur R^q associé à ℓ l'application linéaire

$$L_\ell^q : \left| \begin{array}{ll} R^q & \longrightarrow R^{d-q} \\ a & \longmapsto \ell^{d-2q} a \end{array} \right. .$$

— On appelle forme de HODGE-RIEMANN sur R^q associé à ℓ la forme bilinéaire symétrique

$$Q_\ell^q : \left| \begin{array}{ll} R^q \times R^q & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a_1, a_2) & \longmapsto (-1)^q \deg(a_1 L_\ell^q(a_2)) \end{array} \right. .$$

— On appelle sous-espace primitif de R^q associé à ℓ l'espace

$$P_\ell^q = \{a \in R^q \mid \ell L_\ell^q(a) = 0\}.$$

Définition 5.1.5. Soit $\ell \in R^1$.

- (i) On dit que R^* vérifie $\text{HL}(\ell)$ si l'opérateur de LEFSCHETZ L_ℓ^q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$ tel que $q \leq d/2$.
- (ii) On dit que R^* vérifie $\text{HR}(\ell)$ si la forme de HODGE-RIEMANN est définie positive sur P_ℓ^q pour tout $q \geq 0$ tel que $q \leq d/2$.

Remarque 5.1.6. Soit $q \in \llbracket 0, \lfloor d/2 \rfloor \rrbracket$. Si l'opérateur de LEFSCHETZ est un isomorphisme, alors on a la décomposition en somme directe

$$R^{q+1} = P_\ell^{q+1} \oplus \ell R^q.$$

En particulier, si R^* vérifie $\text{HL}(\ell)$, alors on peut itérer cette décomposition et obtenir la décomposition de LEFSCHETZ de R^q

$$R^q = \bigoplus_{k=0}^q \ell^k P_\ell^{q-k}.$$

En fait, cette décomposition est même orthogonale pour la forme de HODGE-RIEMANN Q_ℓ^q : pour $q_1, q_2 \geq 0$ tels que $q_1 < q_2 \leq q$, et pour tout $a_1 \in P_\ell^{q-q_1}$ et $a_2 \in P_\ell^{q-q_2}$,

$$Q_\ell^q(\ell^{q_1} a_1, \ell^{q_2} a_2) = (-1)^q \deg(\ell^{q_2-q_1} (\ell^{d-2(q-q_1)} a_1) a_2) = 0.$$

Proposition 5.1.7. Soit $\ell \in R^1$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) L'anneau R^* vérifie $\text{HL}(\ell)$.
- (ii) La forme de HODGE-RIEMANN Q_ℓ^q sur R^q est non dégénérée pour tout $0 \leq q \leq d/2$.

Démonstration. La forme de HODGE-RIEMANN Q_ℓ^q est non dégénérée sur R^q si et seulement si la composition

$$R^q \xrightarrow{L_\ell^q} R^{d-q} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(R^q, R^d)$$

est un isomorphisme (où la seconde application est la multiplication). Puisque R^* vérifie la dualité de POINCARÉ, la composition est un isomorphisme si et seulement si $L_\ell^q : R^q \rightarrow R^{d-q}$ est un isomorphisme. □

Remarque 5.1.8. Si $L_\ell^q(a) = 0$, alors $Q_\ell^q(a, a) = 0$ et $a \in P_\ell^q$. Ainsi, $\text{HR}(\ell)$ implique $\text{HL}(\ell)$.

Remarque 5.1.9. Étant donné un espace quadratique (E, Q) avec Q une forme quadratique non dégénérée, on appelle ici la signature l'entier relatif $n_+ - n_-$ où n_+ et n_- sont respectivement les nombres de valeurs propres positives et négatives de toute matrice de Q .

Proposition 5.1.10. Soit $\ell \in R^1$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) L'anneau R^* vérifie $\text{HR}(\ell)$.
- (ii) Pour tout $0 \leq q \leq d/2$, la forme de HODGE-RIEMANN Q_ℓ^q est non dégénérée de signature

$$\sum_{p=0}^q (-1)^{q-p} (\dim_{\mathbb{R}} R^p - \dim_{\mathbb{R}} R^{p-1}).$$

Démonstration. Si R^* vérifie $\text{HR}(\ell)$, alors il vérifie aussi $\text{HL}(\ell)$ et donc on dispose de la décomposition de LEFSCHETZ

$$R^q = \bigoplus_{p=0}^q P_\ell^p.$$

Or pour tout $p \leq q$, l'espace quadratique (P_ℓ^p, Q_ℓ^p) est isométrique à $(\ell^{q-p} P_\ell^p, (-1)^{q-p} Q_\ell^q)$. De plus, Q_ℓ^p est de signature $\dim_{\mathbb{R}} R^p - \dim_{\mathbb{R}} R^{p-1}$. Ainsi la propriété $\text{HR}(\ell)$ implique que la signature de Q_ℓ^q sur R^q est

$$\sum_{p=0}^q (-1)^{q-p} (\dim_{\mathbb{R}} R^p - \dim_{\mathbb{R}} R^{p-1}).$$

Inversement si (ii) est vrai, alors selon la proposition 5.1.7, R^* vérifie $\text{HL}(\ell)$. On a donc une décomposition orthogonale pour Q_ℓ^q

$$R^p = \bigoplus_{p=0}^p \ell^p P_\ell^{q-p}.$$

Ainsi, la signature de Q_ℓ^p sur P_ℓ^q est exactement la signature de Q_ℓ^q sur R^q moins la signature de Q_ℓ^{q-1} sur R^{q-1} , i.e Q_ℓ^q a pour signature sur P_ℓ^q

$$\dim_{\mathbb{R}} R^q - \dim_{\mathbb{R}} R^{q-1} = \dim_{\mathbb{R}} P_\ell^q.$$

Puisque Q_ℓ^q est non dégénérée sur P_ℓ^q , alors Q_ℓ^q est définie positive sur P_ℓ^q . □

5.1.2 Propriétés HL et HR après tensorisation

Cette sous-section est dédiée à énoncer et formaliser la propriété suivante : HL et HR se comportent bien avec le produit tensoriel d'algèbres de dualité de POINCARÉ. On ne contentera d'admettre ce résultat qui relève plus de l'algèbre linéaire pure, que de géométrie combinatoire et de théorie des matroïdes.

On note dans cette sous-section R_1^* et R_2^* des algèbres de dualité de POINCARÉ de dimension respectives d_1 et d_2 , et d'applications de degré respectives $\deg_1$ et $\deg_2$. Ainsi, le produit tensoriel $R_1 \otimes_{\mathbb{R}} R_2$ est une algèbre de dualité de POINCARÉ de dimension $d_1 + d_2$. Si $k \in \mathbb{N}$, sa composante de degré k est

$$\bigoplus_{\ell=0}^k R_1^\ell \otimes R_2^{k-\ell}.$$

Son application de degré est l'application $\deg_1 \otimes \deg_2$.

Le résultat principal évoqué est le suivant.

Proposition 5.1.11. *Soit $\ell_1 \in R_1^1$ et $\ell_2 \in R_2^1$.*

- (i) *Si R_1^* vérifie HL(ℓ_1) et R_2^* vérifie HL(ℓ_2), alors $R_1^* \otimes R_2^*$ vérifie HL($\ell_1 \otimes 1_{R_2^*} + 1_{R_1^*} \otimes \ell_2$).*
- (ii) *Si R_1^* vérifie HR(ℓ_1) et R_2^* vérifie HR(ℓ_2), alors $R_1^* \otimes R_2^*$ vérifie HR($\ell_1 \otimes 1_{R_2^*} + 1_{R_1^*} \otimes \ell_2$).*

Démonstration. Admis. □

5.1.3 Retour sur les cônes amples et nef

Dans toute cette sous-section, Σ désigne un éventail unimodulaire de $\mathbb{N}$.

Définition 5.1.12. *On dit que l'éventail Σ vérifie la dualité de POINCARÉ de dimension d si $A^*(\Sigma)_{\mathbb{R}}$ est une algèbre de dualité de POINCARÉ de dimension d .*

On suppose dans cette sous-section tous les éventails tels. On note $\deg : A^d(\Sigma)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ l'isomorphisme de degré.

Remarque 5.1.13. Pour tout $e \in V_\Sigma$ et $q \geq 0$, on dispose du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} A^q(\Sigma) & \xrightarrow{p_{e \in \Sigma}} & A^q(\text{star}(e, \Sigma)) \\ & \searrow m_{x_e} & \downarrow m_{x_e} \\ & & A^{q+1}(\Sigma) \end{array}$$

Ici, m_{x_e} l'application de multiplication par x_e et $p_{e \in \Sigma}$ est le tiré en arrière vers l'étoile de e . On dispose donc d'un morphisme d'anneaux gradués

$$\pi_e : A^*(\text{star}(e, \Sigma)) \rightarrow A^*(\Sigma)/\text{ann}(x_e).$$

Proposition 5.1.14. *Soit $e \in V_\Sigma$. L'étoile de e dans Σ vérifie la dualité de POINCARÉ de dimension $d - 1$ si et seulement si π_e est un isomorphisme.*

Démonstration. On sait que $A^*(\Sigma)$ vérifie la dualité de POINCARÉ en dimension d , donc le quotient $A^*(\Sigma)/\text{ann}(x_e)$ la vérifie aussi en dimension $d - 1$ (proposition 5.1.2). On en déduit que si π_e est un isomorphisme, alors $A^*(\text{star}(e, \Sigma))$ vérifie la dualité de POINCARÉ en dimension $d - 1$ aussi.

Pour l'autre sens, on observe qu'entre algèbres de dualité de POINCARÉ, la surjectivité est équivalente à la bijectivité. □

Définition 5.1.15. *Soit Σ un éventail vérifiant la dualité de POINCARÉ de dimension d .*

- *L'éventail Σ vérifie la propriété de LEFSCHETZ difficile si $A^*(\Sigma)_\mathbb{R}$ vérifie $\text{HL}(\ell)$ pour tout $\ell \in \mathcal{K}_\Sigma$.*
- *L'éventail Σ vérifie les relations de HODGE-RIEMANN si $A^*(\Sigma)_\mathbb{R}$ vérifie $\text{HR}(\ell)$ pour tout $\ell \in \mathcal{K}_\Sigma$.*
- *L'éventail Σ vérifie les relations de HODGE-RIEMANN locales si pour tout $e \in V_\Sigma$, l'algèbre de dualité de POINCARÉ $A^*(\Sigma)/\text{ann}(x_e)$ vérifie $\text{HR}(\pi_e(\ell))$ pour tout $\ell \in \mathcal{K}_\Sigma$.*

Notation 5.1.16. Si $e \in V_\Sigma$ et $\ell \in \mathcal{K}_\Sigma$, on note $\ell_e = \pi_e(\ell)$ l'image de ℓ dans le quotient $A^*(\Sigma)_\mathbb{R}/\text{ann}(x_e)$.

Proposition 5.1.17. *Si Σ vérifie les relations de HODGE-RIEMANN locales, alors Σ vérifie la propriété de LEFSCHETZ difficile.*

Démonstration. Soit $\ell \in \mathcal{K}$. Il existe par définition $(c_e)_{e \in V_\Sigma}$ une famille de réels strictement positifs tels que

$$\ell = \sum_{e \in V_\Sigma} c_e x_e.$$

On veut montrer que l'opérateur de LEFSCHETZ L_ℓ^q est injectif pour tout $0 \leq q \leq d/2$. Le résultat est clair quand $d = 2q$ puisqu'alors $L_\ell^q = \text{id}_{A^q(\Sigma)}$. On traite donc le cas $d > 2q$.

Soit $f \in \ker L_\ell^q$ et soit f_e l'image de $f_e \in A^q(\Sigma)_\mathbb{R}/\text{ann}(x_e)$ sont image dans le quotient (pour tout $e \in V_\Sigma$). On peut remarquer que

- pour tout $e \in V_\Sigma$, $f_e \in P_{\ell_e}^q$;
- on a

$$\sum_{e \in V_\Sigma} c_e Q_{\ell_e}^q(f_e, f_e) = Q_\ell^q(f, f) = 0.$$

5.2. Démonstration du théorème principal

Or selon les relations de HODGE-RIEMANN locales, $Q_{\ell_e}^q$ est définie positive sur $P_{\ell_e}^q$ donc la somme de la deuxième propriété est une somme de réels positifs. On en déduit que $Q_{f_e, f_e}^q = 0$ et donc $f_e = 0$ pour tout $e \in V_\Sigma$. Cela signifie que $x_e f = 0$ dans $A^*(\Sigma)_{\mathbb{R}}$ pour tout $e \in V_\Sigma$. Puisque les x_e engendrent $A^*(\Sigma)_{\mathbb{R}}$, on a nécessairement $f = 0$. $\square$

Proposition 5.1.18. *Supposons que Σ vérifie la propriété de LEFSCHETZ difficile. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Il existe $\ell \in \mathcal{K}_\Sigma$ tel que $A^*(\Sigma)_{\mathbb{R}}$ vérifie HR(ℓ).*
- (ii) *Pour tout $\ell \in \mathcal{K}_\Sigma$, $A^*(\Sigma)_{\mathbb{R}}$ vérifie HR(ℓ).*

Démonstration. Soit $\ell_0, \ell_1 \in \mathcal{K}_\Sigma$. Supposons que $A^*(\Sigma)$ vérifie HR(ℓ_0). Pour tout $t \in [0, 1]$, on considère

$$\ell_t = (1 - t)\ell_0 + t\ell_1$$

qui est aussi élément de $\mathcal{K}_\Sigma$. Puisque Σ vérifie la propriété de LEFSCHETZ difficile, les formes $Q_{\ell_t}^q$ sont non dégénérées pour tout $t \in [0, 1]$ et $0 \leq q \leq d/2$. Dans ce cas, la signature de $Q_{\ell_t}^q$ ne dépend pas de t . De plus, $A^*(\Sigma)_{\mathbb{R}}$ vérifie HR(ℓ_0) donc la dite signature vaut

$$\sum_{p=0}^q (-1)^{q-p} (\dim A^p(\Sigma)_{\mathbb{R}} - \dim A^{p-1}(\Sigma)_{\mathbb{R}}).$$

En particulier, $Q_{\ell_1}^q$ est non dégénérée avec cette même signature pour tout $q \in [0, \lfloor d/2 \rfloor]$. La proposition 5.1.10 montre que $A^*(\Sigma)_{\mathbb{R}}$ vérifie HR(ℓ_1). $\square$

5.2 Démonstration du théorème principal

5.2.1 Le retournement matroïdal préserve les relations de HODGE-RIEMANN pour certaines classes amples

Soit M un matroïde sans boucle. Comme plus tôt dans ce mémoire, on considère un retournement matroïdal de $\mathcal{P}_-$ vers $\mathcal{P}_+$ de centre Z . On rappelle qu'on dispose de deux morphismes : le morphisme de tiré en arrière

$$\Phi_Z : A^*(M, \mathcal{P}_-) \rightarrow A^*(M, \mathcal{P}_+).$$

et pour p, q des entiers, le morphisme de Gysin

$$\Psi^{p,q} : A^{q-p}(M_Z) \rightarrow A^q(M, \mathcal{P}_+).$$

On introduit un troisième morphisme : on considère le morphisme

$$p_{\sigma_{Z < \emptyset}} : A^*(M, \mathcal{P}_-) \rightarrow \text{star}(\sigma_{Z < \emptyset}, \Sigma_{M, \mathcal{P}_-}).$$

Sachant qu'on peut identifier $\text{star}(\sigma_{Z < \emptyset}, \Sigma_{M, \mathcal{P}_-})$ et Σ_{M_Z} , on obtient un nouveau morphisme de tiré en arrière

$$p_Z : A^*(M, \mathcal{P}_-) \rightarrow A^*(M_Z).$$

Dans toute cette sous-section, on note $\ell_- \in \mathcal{K}_{\Sigma_{M, \mathcal{P}_-}}$ un fonction linéaire par morceaux strictement convexe. On note aussi pour tout $t \geq 0$

$$\ell_+(t) = \Phi_Z(\ell_-) - tx_Z \in A^1(M, \mathcal{P}_+) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

On note aussi

$$\ell_Z = p_Z(\ell_-) \in A^1(M_Z) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

le tiré en arrière de ℓ_- vers l'étoile de $\sigma_{Z < \emptyset}$ dans $\Sigma_{M, \mathcal{P}_-}$. Selon la proposition 4.1.23, ℓ_Z est la classe d'une fonction linéaire par morceaux strictement convexe sur Σ_{M_Z} .

Lemme 5.2.1. *La fonction $\ell_+(t)$ est strictement convexe pour t suffisamment petit.*

Démonstration. Soit $\sigma_{I < \mathcal{G}}$ un cône de $\Sigma_{M, \mathcal{P}_+}$.

- Si Z n'est pas élément de $\mathcal{G}$, alors $\sigma_{I < \mathcal{G}}$ est aussi dans $\Sigma_{M, \mathcal{P}_-}$. Or, ℓ_- est strictement convexe sur $\Sigma_{M, \mathcal{P}_-}$, il est donc utile de supposer sans perte de généralité¹ que ℓ est nulle sur $\sigma_{I < \mathcal{G}}$ et positive sur le lien de $\sigma_{I < \mathcal{G}}$ dans $\Sigma_{M, \mathcal{P}_-}$. Soit $t > 0$. On a

$$\ell_- = \sum_{i \in I} \ell(e_i)x_i + \sum_{F \in \mathcal{P}_-} \ell(e_F)x_F.$$

Ainsi,

$$\ell_+(t) = \ell_- + x_Z \left(\sum_{i \in Z \setminus I} c_i \right) - tx_Z.$$

Or $Z \setminus I$ est non vide puisque sinon Z serait inclus dans I , et donc dans $\text{cl}_M(I)$. Cela signifierait alors que $\text{cl}_M(I) \in \mathcal{P}_+$, ce qui est exclu par définition de $\Sigma_{M, \mathcal{P}_+}$. On peut donc considérer

$$t_0 = \sum_{i \in Z \setminus I} \ell_-(e_i)$$

Ainsi, si $0 < t < t_0$, $\ell_+(t)$ est nulle sur $\sigma_{I < \mathcal{G}}$ et strictement positive sur le lien de $\sigma_{I < \mathcal{G}}$ dans $\Sigma_{M, \mathcal{P}_+}$, qui est bien non nul d'une part parce que $Z \setminus I \neq \emptyset$, et d'autre part parce que ℓ_- est strictement positive sur les e_i .

- Si $Z \in \mathcal{G}$, alors $\sigma_{Z < \mathcal{G} \setminus Z}$ est élément de $\Sigma_{M, \mathcal{P}_-}$. On peut donc supposer que ℓ_- est nulle sur $\sigma_{Z < \mathcal{G} \setminus Z}$ et strictement positive sur le lien de $\sigma_{Z < \mathcal{G} \setminus Z}$ dans $\Sigma_{M, \mathcal{P}_-}$. Soit alors $J = \min(\mathcal{G} \setminus \{Z\})$ et $m(t)$ l'application linéaire sur N_E définie pour tout $i \in E$ par

$$m(t)(e_i) = \begin{cases} t/\text{card}(Z \setminus I) & \text{si } i \in Z \setminus I, \\ -t/\text{card}(J \setminus Z) & \text{si } i \in J \setminus Z, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose de plus

1. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver une fonction linéaire par morceaux équivalente à ℓ_- (donc de même classe ample) qui le vérifie.

$$t_1 = \min\{\ell_-(e_F) \mid e_F \text{ est dans le lien de } \sigma_{Z < \mathcal{G} \setminus \{Z\}} \text{ dans } \Sigma_{M, \mathcal{P}_-}\}$$

avec la convention $\min \emptyset = \infty$. On remarque alors qu'on a le résultat pour $0 < t < t_1$ puisque $\ell_+(t) + m(t)$ est nulle sur $\sigma_{I < \mathcal{G}}$ et strictement positive sur le lien de $\sigma_{I < \mathcal{G}}$ dans $\Sigma_{M, \mathcal{P}_+}$.

□

Notation 5.2.2. On note les applications degrés

$$\deg_+ : \begin{cases} A^d(M, \mathcal{P}_+) & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ a & \longmapsto \deg(\Phi_{\mathcal{P}_+^c}(a)) \end{cases}$$

et

$$\deg_- : \begin{cases} A^d(M, \mathcal{P}_-) & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ a & \longmapsto \deg(\Phi_{\mathcal{P}_-^c}(a)) \end{cases}.$$

Voir la notation 4.3.13 pour la définition de $\Phi_{\mathcal{P}_+^c}$ et de $\Phi_{\mathcal{P}_-^c}$. On les note simplement $\deg$ quand aucune confusion n'est possible. On note aussi $\deg$ l'application de degré de M_Z .

On s'attelle à démontrer dans cette sous-section le résultat suivant.

Proposition 5.2.3. Soit ℓ_- , ℓ_Z , et $\ell_+(t)$ noté comme précédemment. On suppose que

- l'anneau de CHOW de $\Sigma_{M, \mathcal{P}_-}$ vérifie $\text{HL}(\ell_-)$
- et que l'anneau de CHOW de Σ_{M_Z} vérifie $\text{HR}(\ell_Z)$.

Alors, l'anneau de CHOW de $\Sigma_{M, \mathcal{P}_+}$ vérifie $\text{HR}(\ell_+(t))$ pour tout t suffisamment petit.

Notation 5.2.4. Pour démontrer ce résultat, on introduit plusieurs objets.

— On note

$$A_+^* = \bigoplus_{q=0}^d A_+^q$$

où $A_+^q = A^q(M, \mathcal{P}_+) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ pour tout $q \in \llbracket 0, d \rrbracket$. C'est une algèbre de dualité POINCARÉ de dimension d .

— On note

$$A_-^* = \bigoplus_{q=0}^d A_-^q$$

où $A_-^q = (\text{im } \Phi_Z^q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ pour tout $q \in \llbracket 0, d \rrbracket$. C'est une algèbre de dualité POINCARÉ de dimension d .

— On note

$$T_Z^* = \bigoplus_{q=0}^{d-2} T_Z^q$$

où

$$T_Z^q = \left(\mathbb{Z}[x_Z] / (x_Z^{\text{rg}_M(Z)-1}) \otimes_{\mathbb{Z}} A^*(M_Z) \right)^q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

pour tout $q \in \llbracket 0, d-2 \rrbracket$. C'est une algèbre de dualité POINCARÉ de dimension $d-2$. L'anneau polynomial tronqué dans cette définition est muni de l'application d'une application de degré vérifiant

$$\deg((-x_Z)^{\text{rg}_M(Z)-2}) = 1.$$

Il vérifie donc $\text{HR}(-x_Z)$. Ainsi, le produit tensoriel T_Z^* est muni de l'application degré induite définie par

$$\deg((-x_Z)^{\text{rg}_M(Z)-2} x_{\mathcal{Z}}) = 1$$

où $\mathcal{Z}$ est un drapeau maximal de clos propres non vides de M_Z . Selon le résultat de la sous-section précédente, ce produit tensoriel vérifie $\text{HR}(1 \otimes \ell_Z - x_Z \otimes 1)$.

— On note

$$G_Z^* = \bigoplus_{q=1}^{d-1} G_Z^q$$

où

$$G_Z^q = \bigoplus_{p=1}^{\text{rg}_M(Z)-1} (\text{im } \Psi_Z^{p,q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

C'est un sous-espace gradué de A_+^* , somme des images des morphismes de Gysin.

Notation 5.2.5. Soit $0 \leq q \leq d/2$. On note les appairages duaux

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{A_-^*}^q : A_-^q \times A_-^{d-q} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{T_Z^*}^{q-1} : T_Z^{q-1} \times T_Z^{d-q-1} \rightarrow \mathbb{R}.$$

On néglige les puissances dans les notations quand il n'y a aucune confusion possible.

Remarque 5.2.6. Le théorème de décomposition montre Φ_Z définit isomorphisme d'anneaux gradués

$$A^*(M, \mathcal{P}_-) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong A_-^*.$$

Il implique aussi qu'on dispose d'une décomposition en somme directe

$$A_+^* = A_-^* \oplus G_Z^*.$$

De plus, la multiplication par x_Z est un isomorphisme d'algèbres gradués

$$T_Z^* \cong G_Z^{*+1}.$$

On note l'application inverse $y \mapsto x_Z^{-1}y$.

Ces observations justifient la définition suivante.

Définition 5.2.7. Soit $0 \leq q \leq d/2$. On définit les espaces quadratiques suivant.

- (i) (A_-^q, Q_-^q) , où Q_-^q est la restriction de la forme de HODGE-ROEMANN $Q_{\ell_+(0)}^q$ sur A_-^q .
- (ii) $(T_Z^q, Q_{\mathcal{F}}^q)$ où $Q_{\mathcal{F}}^q$ est la forme de HODGE-RIEMANN associée à

$$\mathcal{F} = (1 \otimes \ell_Z - x_Z \otimes 1) \in T_Z^1.$$

- (iii) (G_Z^q, Q_Z^q) où Q_Z^q est la forme bilinéaire définie en déclarant la multiplication par x_Z une isométrie

$$(T_Z^{q-1}, Q_{\mathcal{F}}^{q-1}) \cong (G_Z^q, Q_Z^q).$$

- (iv) $(A_+^q, Q_-^q \oplus Q_Z^q)$.

On commence par remarquer que la forme $Q_-^q \oplus Q_Z^q$ vérifie un relation de HODGE-RIEMANN.

Proposition 5.2.8. Pour tout $q \in \llbracket 0, \lfloor d/2 \rfloor \rrbracket$, la forme bilinéaire $Q_-^q \oplus Q_Z^q$ est non dégénérée sur A_+^q et est de signature

$$\sum_{p=0}^q (-1)^{q-p} (\dim_{\mathbb{R}} A_+^p - \dim_{\mathbb{R}} A_+^{p-1}).$$

Démonstration. Selon le théorème de décomposition, $\Phi_Z \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ définit une isométrie

$$(A^q(M, \mathcal{P}_-)_{\mathbb{R}}, Q_{\ell_-}^q) \cong (A_-^q, Q_-^q).$$

Puisque l'on a supposé $\text{HR}(\ell_-)$ vraie, Q_-^q est non dégénérée et A_-^q de signature

$$\sum_{p=0}^q (-1)^{q-p} (\dim_{\mathbb{R}} A_-^p - \dim_{\mathbb{R}} A_-^{p-1}).$$

De même, puisque $\text{HR}(\ell_Z)$ est supposée vraie, Q_Z^q est aussi non dégénérée sur G_Z^q de signature

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{q-1} (-1)^{q-p-1} (\dim_{\mathbb{R}} T_Z^p - \dim_{\mathbb{R}} T_Z^{p-1}) &= \sum_{p=0}^{q-1} (-1)^{q-p-1} (\dim_{\mathbb{R}} G_Z^{p+1} - \dim_{\mathbb{R}} G_Z^p) \\ &= \sum_{p=1}^q (-1)^{q-p} (\dim_{\mathbb{R}} G_Z^p - \dim_{\mathbb{R}} G_Z^{p-1}) \\ &= \sum_{p=0}^q (-1)^{q-p} (\dim_{\mathbb{R}} G_Z^p - \dim_{\mathbb{R}} G_Z^{p-1}) \end{aligned}$$

(le terme $p = 0$ étant ajouté puisqu'il est nul). Le résultat est obtenu en se rappelant que la signature de la somme est la somme des signatures. □

On construit ensuite une suite $(Q_t^q)_{t>0}$ de formes bilinéaires symétriques sur A_+^q pour tout $q \in \llbracket 0, \lfloor d/2 \rfloor \rrbracket$. On va montrer que cette suite vérifiera les deux propriétés suivantes.

(i) Pour tout $t > 0$, il existe pour tout $q \in \llbracket 0, \lfloor d/2 \rfloor \rrbracket$ une isométrie

$$(A_+^q, Q_t^q) \cong (A_+^q, Q_{\ell_+(t)}^q).$$

(ii) Pour tout $q \in \llbracket 0, \lfloor d/2 \rfloor \rrbracket$, la suite $(Q_t^q)_{t>0}$ converge lorsque t tend vers 0, et vérifie

$$\lim_{t>0} Q_t^q = Q_-^q \oplus Q_Z^q.$$

Notation 5.2.9. Pour tout $t > 0$, on note $S_t : A_+^* \rightarrow A_+^*$ l'application linéaire graduée somme des applications identités sur A_-^* et des morphismes

$$\left| \begin{array}{ccc} (\mathrm{im} \Psi_Z^{p,q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} & \longrightarrow & (\mathrm{im} \Psi_Z^{p,q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & t^{-\frac{\mathrm{rg}_M(Z)}{2} + p} a \end{array} \right.$$

pour $p \in \llbracket 0, q \rrbracket$. On peut remarquer S_t est inversible : son inverse S_t^{-1} est la somme des identités sur A_-^* et des morphismes

$$\left| \begin{array}{ccc} (\mathrm{im} \Psi_Z^{p,q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} & \longrightarrow & (\mathrm{im} \Psi_Z^{p,q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & t^{\frac{\mathrm{rg}_M(Z)}{2} - p} a \end{array} \right.$$

pour $p \in \llbracket 0, q \rrbracket$.

Définition 5.2.10. La forme bilinéaire symétrique Q_t^q est définie de sorte que S_t soit une isométrie

$$(A_+^q, Q_t^q) \cong (A_+^q, Q_{\ell_+(t)}^q)$$

pour tout $0 \leq q \leq d/2$.

Autrement dit, pour tout $a_1, a_2 \in A_+^q$,

$$Q_t(a_1, a_2) = (-1)^q \deg(S_t(a_1) \ell_+(t)^{d-2q} S_t(a_2)).$$

Remarque 5.2.11. La première propriété énoncée est vérifiée par définition.

On vérifie donc la seconde propriété.

Proposition 5.2.12. Pour tout $q \in \llbracket 0, \lfloor d/2 \rfloor \rrbracket$,

$$\lim_{t>0} Q_t^q = Q_-^q \oplus Q_Z^q.$$

Démonstration. Pour tout $0 \leq q \leq d$ et $t > 0$, on construit un appairage dit *déformé* de la dualité de POINCARÉ

$$\langle a_1, a_2 \rangle_t^q = \deg(S_t(a_1) S_t(a_2))$$

pour tout $(a_1, a_2) \in A_+^q \times A_+^{d-q}$. Comme précédemment, on ne note pas q quand il n'y a aucune ambiguïté.

On commence par montrer deux résultats.

(i) Pour tout $b_1, b_2 \in A_-^*$ et $c_1, c_2 \in G_Z^*$, en notant $a_1 = b_1 + c_1 \in A_+^*$ et $a_2 = b_2 + c_2 \in A_+^*$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle a_1, a_2 \rangle_t = \langle b_1, b_2 \rangle_{A_-^*} - \langle x_Z^{-1} c_1, x_Z^{-1} c_2 \rangle_{T_Z^*}.$$

On note $\langle a_1, a_2 \rangle_0$ cette limite, pourvu qu'elle existe. Pour le montrer, notons $z = \text{rg}_M(Z)$ et choisissons des bases de A_+^q et de A_+^{d-q} adaptées aux décompositions

$$A_+^q = A_-^q \oplus \left(\bigoplus_{p=1}^{z-1} \text{im } \Psi_Z^{p,q} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad A_+^{d-q} = A_-^{d-q} \oplus \left(\bigoplus_{p=1}^{z-1} \text{im } \Psi_Z^{z-p,q} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Dans ces bases note alors $\mathcal{M}_-$ la matrice de l'appairage dual de POINCARÉ entre A_-^q et A_-^{d-q} , et $\mathcal{M}_{p_1, p_2}$ la matrice de l'appairage dual de POINCARÉ entre $\text{im } \Psi_Z^{p_1, q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $\text{im } \Psi_Z^{p_2, q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. De plus, selon le lemme 4.3.30, la matrice de l'appairage dual de POINCARÉ déformé sur A_+^* est

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_- & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_{1,z-1} & t\mathcal{M}_{2,z-1} & t^2\mathcal{M}_{3,z-1} & \cdots & t^{z-2}\mathcal{M}_{z-1,z-1} \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{2,z-2} & t\mathcal{M}_{3,z-2} & \cdots & t^{z-3}\mathcal{M}_{z-1,z-2} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_{3,z-3} & \cdots & t^{z-4}\mathcal{M}_{z-1,z-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{M}_{z-1,1} \end{pmatrix}$$

C'est ce qu'il fallait montrer, en observant que

$$\deg(x_Z^z x_{\mathcal{Z}}) = (-1)^{z-1}$$

(ce qui avait démontré dans la démonstration de la proposition 4.3.26). On va utiliser cet appairage de dualité de POINCARÉ déformé pour interpréter la limite de $(Q_t^q)_t$. On introduit pour cela quelques notations.

— Pour tout $a \in A_+^1$, on note la multiplication par a

$$M^a : \begin{cases} A_+^* & \longrightarrow & A_+^{*+1} \\ x & \longmapsto & ax \end{cases}.$$

On définit alors sa *déformation* de paramètre t comme l'application

$$M_t^a = S_t^{-1} \circ M^a \circ S_t$$

pour tout $t > 0$. On peut écrire Q_t^q en fonction de $M_t^{\ell_+(t)}$ de la manière suivante : pour tous $a_1, a_2 \in A_+^*$,

$$\begin{aligned} Q_t^q(a_1, a_2) &= (-1)^q \deg \left(S_t(a_1) (M_t^{\ell_+(t)})^{\circ d-2q} \circ S_t(a_2) \right) \\ &= (-1)^q \deg \left(S_t(a_1) S_t \circ (M_t^{\ell_+(t)})^{\circ d-2q} \circ (a_2) \right) \\ &= (-1)^q \left\langle a_1, (M_t^{\ell_+(t)})^{\circ d-2q} \circ (a_2) \right\rangle_t \end{aligned}$$

où $(M_t^{\ell_+(t)})^{\circ d-2q}$ est l'application linéaire $M_t^{\ell_+(t)}$ composée avec lui-même $d-2q$ fois.

- Avec l'isomorphisme $G_Z^* \cong T^{*-1}$, tout endomorphisme de T^{*-1} peut être associé à un endomorphisme de G_Z^* . Via cette correspondance, on considère :
 - $M^{1 \otimes \ell_Z}$ qui correspond à la multiplication par $1 \otimes \ell_Z$;
 - $M^{x_Z \otimes 1}$ qui correspond à la multiplication par $x_Z \otimes 1$;
 - $M^{\mathcal{J}}$ qui correspond à la multiplication par $\mathcal{J} = 1 \otimes \ell_Z - x_Z \otimes 1$.

Ainsi notés, $M^{\mathcal{J}} = M^{1 \otimes \ell_Z} - M^{x_Z \otimes 1}$.

(ii) La suite $(M_t^{\ell_+(t)})_{t>0}$ converge lorsque t tend vers 0, et sa limite se décompose en

$$\left(A_+^*, \lim_{t \rightarrow 0} M_t^{\ell_+(t)} \right) = \left(A_-^* \oplus G_Z^*, M^{\ell_+(0)} \oplus M^{\mathcal{J}} \right).$$

Pour montrer ce fait, on remarque que

$$\begin{aligned} M_t^{\ell_+(t)} &= S_t^{-1} \circ M^{\ell_+(t)} \circ S_t \\ &= S_t^{-1} \circ (M^{\ell_+(0)} - M^{tx_Z}) \circ S_t \\ &= M_t^{\ell_+(0)} - M_t^{tx_Z}. \end{aligned}$$

Or le lemme 4.3.30 montre que $M^{\ell_+(0)}$ et S_t commutent pour tout $t > 0$, donc

$$\left(A_+^*, M_t^{\ell_+(0)} \right) = \left(A_+^*, M^{\ell_+(0)} \right) = \left(A_-^* \oplus G_Z^*, M^{\ell_+(0)} \oplus M^{1 \otimes \ell_Z} \right).$$

Le même lemme montre que dans les bases de A_+^q et A_+^{q+1} adaptées à leurs décompositions choisies plus haut, la matrice de M^{x_Z} est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_0 \\ C & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_1 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 & B_{z-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I & B_{z-1} \end{pmatrix}$$

où I désigne les matrices identités représentant les applications

$$A^{q-p}(M_Z)_{\mathbb{R}} \rightarrow A^{q-p}(M_Z)_{\mathbb{R}}$$

où l'on identifie le premier $A^{q-p}(M_Z)_{\mathbb{R}}$ à $\text{im } \Psi_Z^{p,q}$ et le second à $\text{im } \Psi_Z^{p+1,q+1}$ (ces groupes sont isomorphes). De plus, la matrice de l'opérateur déformé $M_t^{tx_Z}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{\frac{\text{rg}_M(Z)}{2}} B_0 \\ t^{\frac{\text{rg}_M(Z)}{2}} C & 0 & 0 & \cdots & 0 & t^{\text{rg}_M(Z)-1} B_1 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & t^{\text{rg}_M(Z)-2} B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 & t^2 B_{z-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I & t B_{z-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, lorsque t tend 0, cette matrice représente l'opérateur $0 \oplus M^{x_Z \otimes 1}$ et donc

$$\begin{aligned} \left(A_+^*, \lim_{t \rightarrow 0} M_t^{\ell_+(t)} \right) &= \left(A_-^* \oplus G_Z^*, M^{\ell_+(0)} \oplus M^{1 \otimes \ell_Z} \right) - \left(A_-^* \oplus G_Z^*, 0 \oplus M^{x_Z \otimes 1} \right) \\ &= \left(A_-^* \oplus G_Z^*, M^{\ell_+(0)} \oplus M^{\mathcal{J}} \right). \end{aligned}$$

On peut maintenant démontrer la proposition. On a vu que pour tout $a_1 = b_1 + b_2$, $a_2 = b_2 + c_2 \in A_+^* = A_-^* \oplus G_Z^*$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q_t^q(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} (-1)^q \left\langle a_1, (M^{\ell_+(t)})^{\circ d-2q} \circ (a_2) \right\rangle_t.$$

Or les point (i) et (ii) indique que ce second membre vaut

$$(-1)^q \left\langle a_1, (M^{\ell_+(0)} \oplus M^{\mathcal{J}})^{\circ d-2q} \circ (a_2) \right\rangle_0 = Q_-^q(b_1, b_2) + Q_Z^q(c_1, c_2).$$

□

On peut enfin démontrer la proposition 5.2.3.

Démonstration (de la proposition 5.2.3). Selon les deux dernières propositions, pour tout $0 \leq q \leq d/2$, la forme bilinéaire

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q_t^q$$

est non dégénérée sur A_+^q et est de signature

$$\sum_{p=0}^q (-1)^{q-p} \left(\dim_{\mathbb{R}} A_{\mathbb{R}}^p - \dim_{\mathbb{R}} A_+^{p-1} \right).$$

Par définition de la limite, dans un voisinage de 0, Q_t^q est aussi non dégénérée sur A_+^q et a la même signature. Par construction, les espaces quadratiques

$$(A_+^q, Q_t^q) \cong (A_+^q, Q_{\ell_+(t)}^q)$$

et donc A_+^* vérifie $\text{HR}(\ell_+(t))$ pour tout t suffisamment petit.

□

5.2.2 Fin de la démonstration

On peut enfin s'attaquer à la démonstration du théorème principal de ce mémoire, qui généralise le théorème 2.5.9 des relations de HODGE-RIEMANN. On rappelle quelques notations ainsi que le résultat à démontrer.

Notation 5.2.13. On note $\deg$ l'application de degré du matroïde M . De plus, pour tout filtre $\mathcal{P}$ de $\mathcal{L}_M^*$, on choisit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} A^d(M, \mathcal{P}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a & \longmapsto & \deg(\Phi_{\mathcal{P}^c}(a)) \end{array}.$$

Théorème 5.2.14. Soit M un matroïde sans boucle et $\mathcal{P}$ un filtre sur $\mathcal{L}_M^*$.

- (i) L'éventail de BERGMAN $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ vérifie la propriété de LEFSCHETZ difficile.
- (ii) L'éventail de BERGMAN $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ vérifie les relations de HODGE-RIEMANN.

Remarque 5.2.15. Lorsque $\mathcal{P} = \mathcal{L}_M^*$, on obtient le théorème 2.5.9 comme annoncé. En effet, toute fonction sous-modulaire stricte définit une fonction linéaire par morceaux strictement convexe. Cette idée avait déjà été évoqué en remarque 4.1.26.

Démonstration. Comme dans lors de la démonstration du théorème de décomposition et du théorème de dualité de RIEMANN pour les éventails filtrés, on procède par récurrence avec l'ordre lexicographique sur $(\text{rg } M, \text{card } \mathcal{P})$.

- Le cas de base correspond à $\mathcal{P} = \emptyset$. Or, on a déjà montré que l'on a un isomorphisme

$$A^*(M, \emptyset)_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}[X]/(X^{d+1}).$$

En notant x l'image de X dans le quotient de droite, cet isomorphisme est donné $x_i \mapsto x$ pour tout $i \in E$ (on rappelle que les x_i sont tous égaux dans $A^*(M, \emptyset)$). Sous cet isomorphisme, le cône ample est exactement l'ensemble des λx avec $\lambda > 0$. Remarquons de plus que sous cet identification, x^d est de degré 1.

Montrons donc que $A^*(M, \emptyset)$ vérifie la propriété de LEFSCHETZ difficile et les relations de HODGE-RIEMANN. Soit $\ell = \lambda x \in \mathcal{K}_{M, \emptyset}$ avec $\lambda > 0$. Par positivité linéarité, il suffit de vérifier le cas $\lambda = 1$.

- *Propriété de LEFSCHETZ difficile.* Soit $0 \leq q \leq d/2$. Il s'agit de montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} A^q(M, \emptyset)_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & A^{d-q}(M, \emptyset)_{\mathbb{R}} \\ a & \longmapsto & x^{d-2q}a \end{array}$$

est un isomorphisme. Pour cela on observe que

$$A^q(M, \emptyset)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}x^q \quad \text{et} \quad A^{d-q}(M, \emptyset)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}x^{d-q}.$$

Or cette application envoie le générateur x^q sur x^{d-q} qui engendre le groupe $A^{d-q}(M, \emptyset)_{\mathbb{R}}$.

- *Relations de HODGE-RIEMANN.* Si $q \neq 0$, alors le sous-espace primitif de $A^q(M, \emptyset)$ associé à $\ell = x$, P_x^q est nul car $d - 2q + 1 \leq d$ donc x^{d-2q+1} . Il n'y a donc rien à vérifier sur la forme de HODGE-RIEMANN associée à x . Si $q = 0$, alors $P_x^0 = A^0(M, \emptyset)$. Or, $Q_x^0(x, x) = (-1)^0 \deg(x^d) = 1$.
- Montrons que l'hérédité est vraie. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}_+$ et on considère à nouveau le retournement de $\mathcal{P}_-$ vers $\mathcal{P}_+$ de centre Z . On a montré en sous-section 4.1.5 qu'on pouvait remplacer M par sa géométrie combinatoire, *i.e* son matroïde simplifié $\overline{M}$. Or, on a montré en proposition 3.5.4 que l'étoile d'un rayon de $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ pouvait être vu comme le produit d'au plus deux éventails de BERGMAN de matroïdes (potentiellement l'un d'entre eux n'est pas une géométrie combinatoire). On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : selon les propositions 5.1.11 et 4.1.23, l'étoile de toute rayon de $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ vérifie les relations de HODGE-RIEMANN et donc $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ vérifie les relations de HODGE-RIEMANN locales. Ainsi, selon la proposition 5.1.17, $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ vérifie la propriété de LEFSCHETZ difficile. Montrons ensuite que $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ vérifie les relations de HODGE-RIEMANN. Puisque $\Sigma_{M, \mathcal{P}}$ vérifie la propriété de LEFSCHETZ difficile, la proposition 5.1.18 indique qu'il suffit de vérifier que $A^*(\Sigma_{M, \mathcal{P}})$ vérifie les relations de HODGE-RIEMANN pour au moins un élément de $\mathcal{K}_{M, \mathcal{P}}$. Or, l'hypothèse de récurrence s'applique à $\Sigma_{M, \mathcal{P}_-}$ et Σ_{M_Z} , on peut donc conclure avec la proposition 5.2.3 qui fournit un tel élément.

□

Bibliographie

- [AG24] Omid Amini and Lucas Gierczak. Combinatorial flag arrangements, 2024.
 - [AHK18] Karim Adiprasito, June Huh, and Eric Katz. Hodge theory for combinatorial geometries. *Ann. Math. (2)*, 188(2) :381–452, 2018.
 - [AK06] Federico Ardila and Caroline J. Klivans. The Bergman complex of a matroid and phylogenetic trees. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 96(1) :38–49, 2006.
 - [BDCP90] Emili Bifet, Corrado De Concini, and Claudio Procesi. Cohomology of regular embeddings. *Adv. Math.*, 82(1) :1–34, 1990.
 - [Bri96] Michel Brion. Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry. In *Parameter spaces : enumerative geometry, algebra and combinatorics. Proceedings of the Banach Center conference, Warsaw, Poland, February 1994*, pages 25–44. Warszawa : Inst. of Math., Polish Acad. of Sciences, 1996.
 - [Dem70] Michel Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4e série, 3(4) :507–588, 1970.
 - [DK91] James F. Davis and Paul Kirk. *Lecture Notes in Algebraic Topology*. American Mathematical Soc., 1991.
 - [Eur23] Christopher Eur. Essence of independence : Hodge theory of matroids since June Huh, 2023.
 - [FS97] William Fulton and Bernd Sturmfels. Intersection theory on toric varieties. *Topology*, 36(2) :335–353, 1997.
 - [Ful93] W. Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1993.
 - [GR01] C. Godsil and G.F. Royle. *Algebraic Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2001.
 - [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
 - [Huh12] June Huh. Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs. *J. Am. Math. Soc.*, 25(3) :907–927, 2012.
 - [Huh18] June Huh. Tropical geometry of matroids. In *Current developments in mathematics 2016. Papers based on selected lectures given at the current development mathematics conference, Harvard University, Cambridge, MA, USA, November 2016*, pages 1–46. Somerville, MA : International Press, 2018.
 - [Huh23] June Huh. Combinatorics and Hodge theory. In *International congress of mathematicians 2022, ICM 2022, Helsinki, Finland, virtual, July 6–14, 2022. Volume 1. Prize lectures*, pages 212–239. Berlin : European Mathematical Society (EMS), 2023.
-

- [Oxl06] J.G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford graduate texts in mathematics. Oxford University Press, 2006.
- [Sta99] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 1. With a foreword by Gian-Carlo Rota*, volume 49 of *Camb. Stud. Adv. Math.* Cambridge : Cambridge University Press, corrected reprint of the 1986 hardback edition edition, 1999.
- [Vak] Ravi Vakil. *The rising sea : Foundations of algebraic geometry*.
- [Whi35] Hassler Whitney. On the abstract properties of linear dependence. *Am. J. Math.*, 57 :509–533, 1935.

Index

A	
algèbre de dualité de POINCARÉ	65
ample (cône) —	36
anneau de CHOW	50
d'un éventail	44
d'un matroïde	22
application simpliciale	40
B	
boucle	18
C	
cône	8
centre (d'un retournement matroïdal) ..	53
circuit	18
clôture	17
compatible	26
dans un matroïde	29
complet (éventail)	9
cône	
face d'un —	8
ample	36
nef	36
polyédral rationnel fortement convexe	
8	
unimodulaire	33
connexe	
en codimension 1	43
convexe	35
couvrant (clos)	13
D	
degré	22, 49
drapeau	26
dualité de POINCARÉ	23, 68
E	
enveloppe conique	7
équivalence	34
équivalence de CHOW	49
équivalence sur $\mathbb{Z}$	34
étoile	31
éventail	8
complet	9
de BERGMAN	30
de BERGMAN réduit	30
produit d'—	9, 12
sous-éventail	9
support d'un —	9
F	
face	
d'un cône	8
facette	8
filtre	30
généralisé	30
fonction	
de COURANT	33, 39
de MÖBIUS	20
linéaire par morceaux	33
convexe	36
strictement sous-modulaire	22, 38
forme de HODGE-RIEMANN	66
forme quadratique	
signature d'une —	67
G	
générateur primitif d'un rayon	10
géométrie	
projective	14
GYSIN	
morphisme de —	54
H	
HL	66, 69
HR	66, 69
J	
joint topologique	27
L	
lien	35

M

matroïde 13, 15, 16
 base d'un — 16
 booléen 13
 dual 16
 graphique 13
 partie indépendante d'un — 15
 réalisable sur un corps 14
 sans boucle 51
 simplifié 38
 minimum
 d'un drapeau 26
 MINKOWSKI (poids de —) 42
 morphisme
 de GYSIN 54

N

nef (cône) 36

O

opérateur
 de LEFSCHETZ 66
 de clôture 17

P

poids de MINKOWSKI 42
 polynôme
 caractéristique 19
 caractéristique réduit 20
 chromatique 19
 polytope 30
 poset 14, 26
 propriété de LEFSCHETZ difficile . 23, 66, 69

R

rang 14, 15
 rayon 10
 générateur primitif d'un — 10, 33
 relations de HODGE-RIEMANN ... 23, 66, 69
 relations de HODGE-RIEMANN locales ... 69
 restriction 29
 retournement matroïdal 53

S

signature
 d'une forme quadratique 67
 simpliciale (application) 40
 simplification 38
 somme directe
 de matroïdes 18
 support

d'un éventail 9

T

théorème
 de ROTA 21
 de WEISNER 21
 des quatre couleurs 19
 tiré en arrière 34, 37, 53
 tore 11
 treillis
 des clos 14
 trellis 14

U

unimodulaire 33

V

variété torique 11