

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

TOPA

---

---

TOPOLOGIE  
ALGÈBRE

---

---

AUTEUR  
TOBIAS SCHMIDT

NOTES DE COURS  
VICTOR LECERF



2021–2022



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Déformations continues</b>	<b>5</b>
1.1	Déformation d'espaces topologiques . . . . .	5
1.1.1	Homéomorphismes et homotopie . . . . .	5
1.1.2	Rétraction, équivalence d'homotopie . . . . .	7
1.1.3	Connexité . . . . .	8
1.2	Groupe fondamental . . . . .	9
1.2.1	Définitions . . . . .	9
1.2.2	Simple connexité . . . . .	12
1.2.3	Fonctorialité de $\pi_1$ . . . . .	14
1.2.4	Le groupe fondamental du cercle $S^1$ . . . . .	15
1.2.5	Applications. . . . .	18
1.3	Théorème de VAN KAMPEN . . . . .	18
1.3.1	Groupes libres . . . . .	18
1.3.2	Produit libre de groupes . . . . .	20
1.3.3	Présentation d'un groupe . . . . .	21
1.3.4	VAN KAMPEN . . . . .	22
1.3.5	Groupe fondamental d'un graphe . . . . .	25
1.3.6	Attacher une cellule : les CW complexes . . . . .	26
1.4	Revêtements . . . . .	28
1.4.1	Homéomorphismes locaux . . . . .	28
1.4.2	Propriétés de relèvement . . . . .	30
1.4.3	Groupe fondamental de revêtements . . . . .	32
1.4.4	Revêtement universel et dualité relativement à un sous-groupe . . . . .	33
1.4.5	Actions de groupes . . . . .	37
1.5	Homologie simpliciale . . . . .	39
1.6	Complexes simpliciaux . . . . .	39
1.6.1	Homologie simpliciale . . . . .	40
1.6.2	Nombres de BETTI et caractéristiques d'EULER . . . . .	44
1.6.3	Plus d'algèbre homologique . . . . .	46
<b>2</b>	<b>Homologie singulière</b>	<b>49</b>
2.1	Définition de groupes d'homologie . . . . .	49
2.2	Calcul des groupes d'homologies $H_0$ et $H_1$ . . . . .	51

## Introduction

La méthode de la topologie algébrique consiste à associer à un espace topologique des invariants de l'algèbres (nombres, groupes, anneaux, etc...) et tels que ces invariants sont stables par déformations continues de la topologie. En particulier, si deux espaces sont homéomorphes, ils auront les mêmes invariants. Le nombre de composantes connexes en est un exemple : deux

---

espaces homéomorphes ont le même nombre de composantes connexes. Ainsi,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^*$  ne sont pas homéomorphes.

**Convention.** Dans ce cours, le terme “application” désignera — sauf mention contraire, une application continue.

**Notation.** On utilisera dans ce cours les notations suivantes.

- $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  ;
- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne) ;
- $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  ;
- $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq 1\}$  et  $\mathring{\mathbb{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| < 1\}$ .

# Chapitre 1

## Déformations continues

### 1.1 Déformation d'espaces topologiques

#### 1.1.1 Homéomorphismes et homotopie

**Définition 1.1.1** (homéomorphisme). *Un homéomorphisme entre deux espaces topologies  $X$  et  $Y$  est une bijection continue  $f : X \rightarrow Y$  et telle que  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  est aussi continue.*

**Remarque.** On dit que  $X$  et  $Y$  sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme entre eux. On note alors  $X \cong Y$ .

**Exemples.**

- Soit  $x_0 \in \mathbb{S}^n$ . Les espaces  $\mathbb{S}^n \setminus \{x_0\}$  et  $\mathbb{R}^n$  sont homéomorphes. En fait, la projection stéréographique  $p : \mathbb{S}^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme.
- L'espace  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$  grâce à l'application exponentielle.

**Définition 1.1.2.** *Deux applications  $f, g : X \rightarrow Y$  sont dites homotopes s'il existe  $H : X \times I \rightarrow Y$  telle que  $H(\cdot, 0) = f$  et  $H(\cdot, 1) = g$ . Une telle application est une homotopie entre  $f$  et  $g$ .*

**Remarques.**

- On note  $f \sim g$ . En effet, on va voir que la relation d'homotopie est une relation d'équivalence.
- On note souvent  $H_s(x) := H(x, s)$  pour tout  $(x, s) \in X \times I$ . Pour tout  $x \in X$ , l'application  $I \rightarrow Y, s \mapsto H_s(x)$  donne un chemin reliant  $f(x)$  à  $g(x)$ .

**Définition 1.1.3.** *Soit  $A \subset X$  un sous-ensemble,  $f, g : X \rightarrow Y$  deux applications qui coïncident sur  $A$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont homotopes relativement à  $A$  s'il existe une homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$  telle que  $H_s|_A = f|_A = g|_A$  pour tout  $s \in I$ .*

**Notation.**  $f \sim_A g$ .

---

**Exemple (homotopie barycentrique).** Soient  $f, g : X \rightarrow C$  avec  $C$  un convexe non vide. Alors,  $f \sim g$ . En effet, ils suffit de prendre  $H_s(x) = (1-s)f(x) + sg(x)$  pour tout  $(x, s) \in X \times I$ . Si  $f|_A = g|_A$ , alors  $H$  est une homotopie relative à  $A$  et donc  $f \sim_A g$ .

**Lemme 1.1.1.** Soient  $F_1, F_2 \subset X$  deux ensembles fermés tels que  $F_1 \cup F_2 = X$ , et soient  $f_1 : X_1 \rightarrow Y$  et  $f_2 : X_2 \rightarrow Y$  deux applications coïncidant sur  $F_1 \cap F_2$ . Alors, l'extension naturelle  $f : X \rightarrow Y$  est continue.

*Démonstration.* Soit  $K \subset Y$  un fermé. Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,  $f^{-1}(K) \cap F_i = f_i^{-1}(K)$  est fermé dans  $X$ . Ainsi,  $f^{-1}(K) = (f^{-1}(K) \cap F_1) \cup (f^{-1}(K) \cap F_2)$  est fermé dans  $X$ . □

**Proposition 1.1.1.** Étant donné  $X$  et  $Y$  deux espaces, l'homotopie est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{C}(X, Y)$ . Il est en de même pour l'homotopie relative à un sous-ensemble  $A$  de  $X$ .

*Démonstration.* La réflexivité est claire en prenant  $H_s = f$  pour tout  $s \in I$ . Cette relation est symétrique car si  $H$  est une homotopie de  $f$  vers  $g$ , alors  $X \times I \rightarrow Y$ ,  $(x, s) \mapsto H(x, 1-s)$  définit une homotopie de  $g$  vers  $f$ . Soient maintenant  $f, g, h : X \rightarrow Y$  trois applications telles que  $f \sim g$  et  $g \sim h$ . Soit  $F$  une homotopie de  $f$  vers  $g$  et  $G$  une homotopie de  $g$  vers  $h$ . L'application

$$H : \begin{cases} X \times I & \rightarrow Y \\ (x, s) & \mapsto \begin{cases} F(x, 2s) & \text{si } s \in [0, 1/2], \\ G(x, 2s-1) & \text{si } s \in ]1/2, 1]. \end{cases} \end{cases}$$

Selon le lemme précédent,  $H$  est continue. On a bien  $H_0 = f$  et  $H_1 = h$ . Finalement, si  $f|_A = g|_A$  et si  $F$  et  $G$  sont des homotopies relatives à  $A$ , alors  $H$  est relative à  $A$ . □

**Proposition 1.1.2.** Soient  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  deux applications homotopes et  $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$  deux autres applications homotopes. Alors,  $g_1 \circ f_1 : X \rightarrow Z$  est homotope à  $g_2 \circ f_2 : X \rightarrow Z$ . En particulier,  $h \circ f_1$  et  $h \circ f_2$  sont homotopes pour tout  $h : Y \rightarrow Z$ , et  $g_1 \circ f$  et  $g_2 \circ f$  sont homotopes pour tout  $f : X \rightarrow Y$ .

*Démonstration.* Soit  $F$  une homotopie de  $f_1$  vers  $f_2$  et  $G$  une homotopie de  $g_1$  vers  $g_2$ . On définit  $H_s = G_s \circ F_s$  pour tout  $s \in I$  (i.e  $H_s(x) = G_s(F_s(x), s)$ ). C'est bien l'homotopie cherchée car  $H_0(x) = G(F_0(x), 0) = G(f_1(x), 0) = g_1(f_1(x))$  et  $H_1(x) = g_2(f_2(x))$ . □

**Proposition 1.1.3.** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$  une application non surjective. Alors,  $f$  est homotope à une application constante.

*Démonstration.* Soit  $y \in \mathbb{S}^n \setminus f(X)$ . La projection stéréographique  $p : \mathbb{S}^n \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme. Alors, l'application  $p \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  est homotope à l'application constante  $g : X \rightarrow \{0\}$  (exemple de l'homotopie barycentrique) avec  $G_s(x) := sp(f(x))$ . Selon la proposition précédente,  $p^{-1} \circ G_s$  est une homotopie entre  $p^{-1} \circ g$  et  $f$ . □

**Proposition 1.1.4.** Soient  $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$  deux applications coïncidant sur  $A \subset X$ . S'il existe  $y \in \mathbb{S}^n$  tel que  $y \notin f(X) \cup g(X)$ , alors  $f \sim_A g$ .

*Démonstration.* Identique à la précédente. □

### 1.1.2 Rétraction, équivalence d'homotopie

Quand sont deux espaces les mêmes à déformation près ? En fait, comment définir "à déformation près" ? On traite d'abord le cas d'un sous-espace.

**Définition 1.1.4.** Soit  $Y \subset X$ . On dit qu'une application  $r : X \rightarrow Y$  est une rétraction si  $r|_Y = \text{id}_Y$ .

**Remarque.**  $Y \subset X$  est dit être un rétract s'il existe une rétraction  $r : X \rightarrow Y$ .

**Exemple.**  $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  est un rétract grâce à l'application  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$ ,  $(x, y) \mapsto (x, 0)$ .

**Définition 1.1.5.** Un sous-espace  $Y \subset X$  est un rétract par déformation s'il existe une rétraction  $r : X \rightarrow Y$  telle que  $r : X \rightarrow Y \subset X$  et  $\text{id}_X$  sont homotopes relativement à  $Y$ . Autrement dit, il existe  $H : X \times I \rightarrow X$  tel que  $H(x, 0) = x$  et  $H(x, 1) = r(x)$  pour tout  $x \in X$ , et  $H(y, s) = y$  pour tout  $y \in Y$ .

**Remarque.** Il existe une variante de la définition dans la littérature où on suppose seulement  $r \sim \text{id}_X$  au lieu de  $r \sim_Y \text{id}_X$ . En anglais, cette variante est appelée *deformation* tandis que celle que la définition est appelée *strong deformation*.

**Exemples.**

- $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$  est un rétract par déformation. L'homotopie barycentrique  $H$  entre  $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$ ,  $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, 0)$  et  $\text{id}_{\mathbb{R}^2}$  convient (*i.e* avec  $H_s(x) = s(x_1, 0) + (1 - s)(x_1, x_2)$ ).
- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  se rétracte par déformation sur  $\mathbb{S}^{n-1}$ . En effet l'application  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $x \mapsto x/\|x\|$  est homotopie (*via* l'homotopie barycentrique relative à  $\mathbb{S}^{n-1}$ ) à  $\text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ . On a en fait  $H_s(x) = s \frac{x}{\|x\|} + (1 - s)x$  pour tout  $s \in I$ . Remarquons que  $H_s(x) \neq 0$  puisque  $\frac{s}{\|x\|+1-s} > 0$ .

On généralise ces idées dans le cas où  $Y$  n'est plus un sous-groupe.

**Définition 1.1.6.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite être une équivalence d'homotopie s'il existe  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g \sim \text{id}_Y$  et  $g \circ f \sim \text{id}_X$ . Dans ce cas,  $X$  et  $Y$  sont dit être homotopiquement équivalents.

**Notation.**  $X \sim Y$ .

**Remarque.** Si  $Y \subset X$  est un sous-espace rétract par déformation, alors  $X$  et  $Y$  sont homotopiquement équivalents. En effet, si  $r : X \rightarrow Y$  est une rétraction et  $g : Y \hookrightarrow X$  l'inclusion, alors  $r \circ g = \text{id}_Y$  et  $g \circ r = \text{id}_X$ .

**Proposition 1.1.5.** *On a les propriétés suivantes.*

- (i) *Deux espaces homéomorphes sont homotopiquement équivalents.*
- (ii) *La relation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur les espaces topologiques.*

*Démonstration.* Pour le premier point, si  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme, on prend  $g = f^{-1}$ . Pour le second, on étudie uniquement la transitivité (le reste est clair). Soit  $f : X \rightarrow Y$  une équivalence d'homotopie de  $X$  vers  $Y$  (d'inverse à homotopie près  $f' : Y \rightarrow X$ ) et  $g : Y \rightarrow Z$  une équivalence d'homotopie de  $Y$  vers  $Z$  (d'inverse à homotopie près  $g' : Z \rightarrow Y$ ). Alors,  $(g \circ f) \circ (f' \circ g') = g \circ (f \circ f') \circ g' \sim g \circ \text{id}_Y \circ g' = g \circ g' \sim \text{id}_Z$ . Ainsi,  $(g \circ f) \circ (f' \circ g')$  est homotope à  $\text{id}_Z$ . La démonstration est la même dans l'autre sens et alors  $(f' \circ g') \circ (g \circ f)$  est homotope à  $\text{id}_X$ . On conclut que  $X \sim Z$ . □

**Définition 1.1.7.** *Un espace est dit contractile s'il est homotopiquement équivalent à un singleton.*

**Remarque.** Un espace contractile est connexe par arcs (plus particulièrement étoilé). En effet, si  $H$  est une homotopie de  $\{x_0\}$  vers  $\text{id}_X$ , alors  $s \mapsto H_s(x)$  est un chemin reliant  $x_0$  à  $x$ .

**Exemple.** Un sous-ensemble convexe non vide  $C \subset \mathbb{R}^n$  est contractile. En particulier,  $\mathbb{R}^n$  et  $B^n$  sont contractiles. En effet, si  $x_0 \in C$ , alors  $\{x_0\} \subset C$  est un rétract par définition.

**Remarque.**  $\mathbb{S}^1$  n'est pas rétractile (et  $\mathbb{S}^n$  non plus lorsque  $n > 1$ ). On verra que le groupe fondamental  $\pi_1(\mathbb{S}^1)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .

### 1.1.3 Connexité

L'invariant le plus simple d'un espace topologique est le nombre de composantes connexes. On débute cette section avec un rappel.

**Définition 1.1.8.** *Un espace  $X$  est dit connexe s'il ne peut s'écrire comme la réunion disjointe de deux ouverts.  $X$  est dit connexe par arcs si pour tout  $x, y \in X$ , il existe un chemin continu reliant  $x$  à  $y$ .*

**Remarque.** Si  $X$  est un espace topologique quelconque et  $x \in X$ , le plus grand sous-ensemble connexe (*resp.* connexe par arcs) de  $X$  contenant  $x$  est appelée la composante connexe (*resp.* connexe par arcs) de  $x$ .

**Définition 1.1.9.** *Un chemin  $\gamma$  dans  $X$  est une application continue  $\gamma : I \rightarrow X$ .*



**Remarques.**

- Le point  $\gamma(0)$  est l'origine du chemin  $\gamma$ , tandis que  $\gamma(1)$  est son extrémité.
- Si  $X_1, X_2 \subset X$  sont deux connexes (*resp.* connexes par arcs) tels que  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ , alors  $X_1 \cup X_2$  est connexe (*resp.* connexe par arcs).
- Un espace connexe par arcs est connexe.
- L'adhérence d'un connexe (dans un espace ambiant) est connexe.

**Contre-exemple classique.** Soit  $E$  l'adhérence de la fonction  $\mathbb{R}_+^* \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(1/x)$ , et  $G$  le graphe. On a  $E = \{0\} \times [-1, 1] \cup G$  et donc  $E$  est connexe. Pourtant,  $E$  n'est pas connexe par arcs.

**Théorème 1.1.1.**  $\mathbb{R}$  n'est pas homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$ .

*Démonstration.* Supposons le contraire et soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un homéomorphisme et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Alors,  $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$  est homéomorphe *via*  $f$  à  $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(x_0)\}$  ce qui est contradictoire car  $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(x_0)\}$  est connexe alors que  $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$  ne l'est pas. □

**Théorème 1.1.2.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces équivalents à homotopie près. Si  $X$  est connexe (*resp.* connexe par arcs), alors  $Y$  est connexe (*resp.* connexe par arcs).

*Démonstration.* Pour toute application  $f : X \rightarrow Y$ , on note  $f_*(C)$  la composante connexe de  $f(C)$  pour tout  $C \subset X$ .  $f_*$  est alors une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de  $X$  et l'ensemble des composantes connexes de  $Y$  (exercice). □

## 1.2 Groupe fondamental

### 1.2.1 Définitions

Soit  $X$  un espace topologique.

**Définition 1.2.1.** Soit  $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow X$  deux chemins tels que  $\gamma(1) = \gamma'(0)$ . On appelle *concatenation des chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$*  le chemin

$$\delta : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \leq 1/2; \\ \gamma'(2t - 1) & \text{si } t > 1/2. \end{cases} \end{cases}$$

**Remarque.**  $\delta$  est bien continu. On note  $\delta = \gamma \cdot \gamma'$ .

**Définition 1.2.2.** Deux chemins  $\gamma$  et  $\gamma'$  de  $X$  ayant les mêmes extrémités sont *homotopes à extrémités fixées* si les deux chemins sont homotopes relativement à  $A = \{0, 1\} \subset I$ . Dans ce cas, on note  $\gamma \sim \gamma'$ .

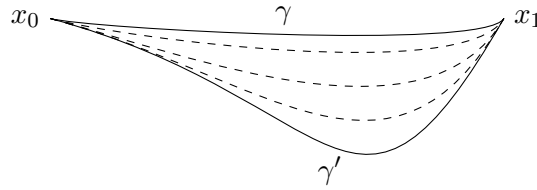


FIGURE 1.1 – Deux chemins homotopes.

**Remarque.** Cela définit une relation d'équivalence. On note  $[\gamma]$  la classe d'homotopie à extrémités fixées de  $\gamma$ .

**Définition 1.2.3.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin de  $X$ . On appelle reparamétrisation de  $\gamma$  tout chemin  $\gamma'$  de la forme  $\gamma' = \gamma \circ f$  où  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est une application telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

**Exemple.**  $f(t) = \sin(\pi t/2)$ .

**Lemme 1.2.1.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin de  $X$ . Si  $\gamma'$  est une reparamétrisation de  $\gamma$ , alors  $\gamma'$  est homotope à extrémités fixées à  $\gamma$ .

*Démonstration.* Il suffit de poser  $H_s(t) = \gamma(st + (1-s)f(t))$ .

□

**Lemme 1.2.2.** On a les propriétés suivantes.

- Soit  $\gamma, \gamma'$  et  $\eta, \eta'$  des chemins tels que  $\gamma \sim \gamma'$  et  $\eta \sim \eta'$ . Alors,  $\gamma \cdot \eta \sim \gamma' \cdot \eta'$ .
- La concaténation est associative à homotopie près, i.e que si  $\gamma, \gamma'$  et  $\gamma''$  sont trois chemins de  $X$ , alors

$$(\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma'' \sim \gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'').$$

*Démonstration.* — Soit  $F : I^2 \rightarrow X$  une homotopie pour  $\gamma \sim \gamma'$  et  $G : I^2 \rightarrow X$  une autre pour  $\eta \sim \eta'$ . On pose

$$H_s(t) = \begin{cases} F(t, 2s) \cdot \eta & \text{si } t \leq 1/2; \\ \gamma' \cdot G(t, 2s - 1) & \text{si } t > 1/2. \end{cases}$$

Il suffit de vérifier que cette application est l'homotopie recherchée.

- Dans  $(\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma''$ , on parcourt  $\gamma$  puis  $\gamma'$  respectivement sur  $[0, 1/4]$  et  $[1/4, 1/2]$ . Enfin, on parcourt  $\gamma''$  sur  $[1/2, 1]$ . Dans  $\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'')$ , on parcourt  $\gamma$  sur  $[0, 1/2]$  puis  $\gamma'$  et  $\gamma''$  respectivement sur  $[1/2, 3/4]$  et  $[3/4, 1]$ . Il existe donc une application  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  linéaire par morceaux telle que  $\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'') \circ f \sim \gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'')$ .

□

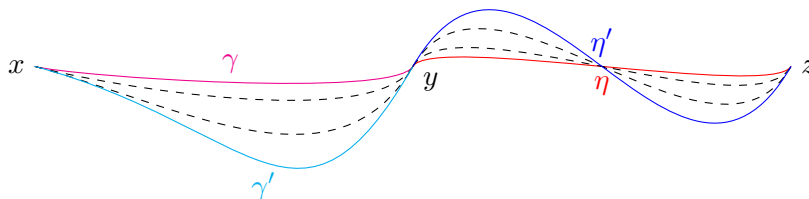


FIGURE 1.2 – Les chemins  $\gamma \cdot \eta$  et  $\gamma' \cdot \eta'$  sont homotopes.

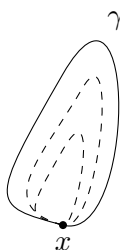


FIGURE 1.3 – Exemple de lacet nulhomotope.

**Remarque.** On explicitera en TD une homotopie pour le second point.

Soit maintenant  $x \in X$  un point de base.

**Définition 1.2.4.** On appelle lacet basé en  $x$  tout chemin  $\gamma : I \rightarrow X$  tel que  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ . Deux lacets sont homotopes à extrémités fixées. On appelle lacet constant le chemin  $\gamma_x : I \rightarrow X, t \mapsto x$ . Un lacet est nulhomotope si  $\gamma \sim \gamma_x$ .

**Notation.** On note  $\pi_1(X, x)$  l'ensemble des classes d'homotopies des lacets basés en  $x$ .

**Théorème 1.2.1.** La concaténation définie pour tout lacets en  $x$ ,  $\gamma$  et  $\eta$ , par  $[\gamma] \cdot [\eta] = [\gamma \cdot \eta]$  munit  $\pi_1(X, x)$  d'une loi de groupe dont l'élément neutre est  $[\gamma_x]$ . L'inverse de  $[\gamma]$  est la classe  $[\bar{\gamma}]$  du lacet  $\bar{\gamma} : I \rightarrow X, t \mapsto \gamma(1-t)$ .

**Remarque.** On appelle  $\pi_1(X, x)$  le groupe fondamental de  $X$  base en  $x$ .

*Démonstration.* Nous avons déjà montré que la loi est associative. Pour l'élément neutre remarquons que  $\gamma_x \cdot \gamma = \gamma \circ f$  où  $f(t) = 0$  si  $t \leq 1/2$  et  $f(t) = 2t - 1$  sinon. On a donc  $\gamma_x \cdot \gamma \sim \gamma$ . La démonstration est la même pour montrer que  $[\gamma_x]$  est un élément neutre à droite. Pour l'élément inverse, on cherche à montrer que si  $\gamma$  est un lacet en  $x$ , alors  $\eta := \gamma \cdot \bar{\gamma}$  est homotope à  $\gamma_x$ . Soit  $\gamma_s(t) = \gamma(st)$  et  $\bar{\gamma}_s(t) = \bar{\gamma}(st)$  pour tout  $s, t \in I$ . Soit  $\eta_s = \gamma_s \cdot \bar{\gamma}_s$ . On a  $\eta_0 = \gamma_0 \cdot \bar{\gamma}_0 = \gamma_x$  et  $\eta_1 = \gamma \cdot \bar{\gamma}$ . De plus,  $\eta_s(0) = x$  et  $\eta_s(1) = x$  pour tout  $s \in I$ . Ainsi,  $\eta$  et  $\gamma_x$  sont homotopes.  $\square$

**Proposition 1.2.1.** Soit  $x_0, x_1 \in X$  deux points. S'il existe dans  $X$  un chemin  $\eta$  reliant  $x_0$  à  $x_1$ , l'application  $\gamma \mapsto (\bar{\eta} \cdot \gamma) \cdot \eta$  induit un isomorphisme de groupe entre  $\pi_1(X, x_0)$  et  $\pi_1(X, x_1)$ . Plus précisément, l'application

$$\text{ad}_\eta : \begin{cases} \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] & \longmapsto & [\bar{\eta} \cdot \gamma \cdot \eta]. \end{cases}$$

*Démonstration.* Montrons d'abord que  $\text{ad}_\eta$  est bien défini. Si  $\gamma \sim \gamma'$ , alors  $(\bar{\eta} \cdot \gamma) \cdot \eta \sim (\bar{\eta} \cdot \gamma') \cdot \eta$ . Vérifions maintenant que c'est un morphisme de groupes. Soit  $[\gamma], [\tilde{\gamma}] \in \pi_1(X, x_0)$ . On a

$$\begin{aligned} (\bar{\eta} \cdot (\gamma \cdot \tilde{\gamma})) \cdot \eta &\sim (\bar{\eta} \cdot \gamma) \cdot (\tilde{\gamma} \cdot \eta) \\ &\sim (\bar{\eta} \cdot \gamma) \cdot (\eta \cdot \bar{\eta}) \cdot (\tilde{\gamma} \cdot \eta) \\ &(\bar{\eta} \cdot \gamma) \cdot \gamma_{x_0} \cdot (\tilde{\gamma} \cdot \eta) \\ &\sim ((\bar{\eta} \cdot \gamma) \cdot \eta) \cdot (\bar{\eta} \cdot (\tilde{\gamma} \cdot \eta)). \end{aligned}$$

On a donc  $\text{ad}_\eta[\gamma] = \text{ad}_\eta[\tilde{\gamma}]$ . Ensuite,  $\text{ad}_\eta[\gamma_{x_0}] = [\gamma_{x_1}]$ . L'application  $\text{ad}_\eta$  est bien une bijection puisque son inverse est donnée par  $[\gamma] \mapsto [\eta\gamma\bar{\eta}]$ . □

### 1.2.2 Simple connexité

Soit  $X$  un espace topologique.

**Définition 1.2.5.** L'espace  $X$  est dit être simplement connexe si  $X$  est connexe par arcs et que son groupe fondamental est trivial.

**Remarque.** Parler du groupe fondamental de  $X$  est justifié puisque  $X$  est connexe par arcs, donc tous ses groupes fondamentaux sont isomorphes.

**Exemple.** Un ensemble  $C \subset \mathbb{R}^n$  convexe non vide est simplement connexe. On utilise pour le montrer l'homotopie barycentrique.

**Proposition 1.2.2.** Soit  $X$  un espace topologique. L'espace  $X$  est simplement connexe si et seulement si pour tout  $x, y \in X$ , il existe un chemin joignant  $x$  à  $y$  et ce chemin est unique à homotopie à extrémités fixées près.

*Démonstration.*  $\Leftarrow$  La connexité par arcs est évidente. De plus, tout lacet  $\gamma$  basé en  $x_0$  est homotope à extrémités  $\gamma_{x_0}$  (par unicité). Ainsi,  $\pi_1(X, x_0)$  est trivial.

$\Rightarrow$  Soient  $\gamma, \gamma'$  deux chemins entre  $x$  et  $y$ . Par hypothèse,  $\gamma \cdot \bar{\gamma} \sim \gamma_x$ . Soit alors  $F : I^2 \rightarrow X$  une homotopie à extrémités fixées entre  $\gamma \cdot \bar{\gamma}$  et  $\gamma_{x_0}$ . Soit de plus  $c : I \rightarrow I^2$  une paramétrisation des trois côtés du carré. On définit  $G_s(t) = F(tm + (1-t)c(s))$  avec  $m = (1/2, 0)$ . Alors,  $G_0(t) = F(tm) = \gamma(t)$  et  $G_1(t) = F(tm + (1-t)c(1)) = F(tm + (1-t)(1, 0)) = \gamma'(t)$ . De plus,  $G_s(0) = F(c(s)) = x$  et  $G_s(1) = F(m) = \gamma(1) = y$  pour tout  $s \in I$ . □

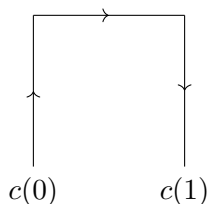


FIGURE 1.4 – Exemple de paramétrisation de trois côtés d’un carré.

**Remarque.** Si  $x \in X$ , il existe une bijection naturelle entre l’ensemble des lacets basé en  $x$  et l’ensemble des applications continues de  $\mathbb{S}^1$  vers  $X$  tel que  $1 \in \mathbb{S}^1$  est envoyé sur  $x$  (où l’on identifie  $\mathbb{S}^1$  à  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ). En effet, on a un homéomorphisme

$$\begin{aligned} [0, 1]/0 \sim 1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\longmapsto e^{2\pi it}, \end{aligned}$$

et l’application

$$\{\hat{\gamma} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X, 1 \longmapsto x\} \longmapsto \left| \begin{array}{l} I \longrightarrow X \\ t \longmapsto \hat{\gamma}(e^{2\pi it}) \end{array} \right.$$

donne une bijection.

**Proposition 1.2.3.** Soit  $x \in X$  et  $\hat{\gamma} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$  tel que  $\hat{\gamma}(1) = x$ . Soit  $\gamma$  le lacet basé en  $x$  correspondant. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i)  $[\gamma] = 1$  dans  $\pi_1(X, x)$ .
- (ii)  $\hat{\gamma}$  est homotope relativement à  $A$  à l’application constante  $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \{x\}$  où  $A = \{1\}$ .
- (iii)  $\hat{\gamma}$  est homotope à extrémités fixées à l’application constante  $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \{x\}$ .
- (iv)  $\hat{\gamma}$  se prolonge en une application continue  $\mathbb{B}^2 \longrightarrow X$  (où  $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ).

*Démonstration.* Exercice 4 de la feuille 2 du TD. □

**Théorème 1.2.2.** Pour tout  $n \geq 2$ ,  $\mathbb{S}^n$  est simplement connexe.

*Démonstration.* Si  $\gamma$  est un chemin de  $\mathbb{S}^n$  évitant un point, alors  $\gamma$  est équivalent à un lacet à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (via la projection stéréographique). On a donc  $[\gamma] = 1$ . En général, montrons que  $\gamma$  est homotope à extrémités fixées à un chemin  $\gamma'$  tel que  $\gamma'$  est non surjectif. Le chemin  $\gamma$  est uniformément continu, il existe donc  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $x, y \in I$  tels que  $|x - y| < 1/N$ , alors  $\|\gamma(x) - \gamma(y)\| \leq 1/2$ . On décompose  $I$  en  $N$  intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$  de longueurs  $1/N$ . Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $\gamma([t_i, t_{i+1}])$  est de diamètre inférieur ou égal à  $1/2$ . Soit  $N_i$  le point antipodal de  $\gamma(t_i)$  (qui n’est donc pas élément de  $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ ). Enfin, on pose  $\gamma'_i$  l’arc égal au plus court chemin de  $\gamma(t_i)$  à  $\gamma(t_{i+1})$ .  $N_i$  n’est pas élément de  $\gamma'_i([0, 1])$  (puisque  $\text{diam } \gamma'_i([0, 1]) \leq \text{diam } \gamma([t_i, t_{i+1}]) \leq 1/2$ ). Avec la projection stéréographique,  $\gamma'_i$  est homotope à extrémités fixées à  $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ . Soit  $\gamma'$  la concaténation de tous les  $\gamma'_i$ , qui est donc équivalent à la concaténation de tous les  $\gamma_i|_{[t_i, t_{i+1}]}$ , lui-même équivalent à  $\gamma$ . Ainsi,  $\gamma'$  est une concaténation fini d’arcs. Il n’est donc pas surjectif. □

1.2.3 Fonctorialité de  $\pi_1$

**Définition 1.2.6.** Soit  $f : X \rightarrow Y$ ,  $x \in X$  et  $y = f(x)$ . On note  $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  l'application définie par  $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$  pour tout  $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ .

**Lemme 1.2.3.** On a les propriétés suivantes.

- L'application  $f_*$  est bien définie et est un morphisme de groupes.
- Soit  $g : W \rightarrow X$  et  $w \in W$  tel que  $x = g(w)$ . Alors,  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$  comme application de  $\pi_1(W, w)$  vers  $\pi_1(Y, y)$ .
- $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)}$ .

**Corollaire 1.2.1.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme. Alors,  $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  est un isomorphisme. De plus,  $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$ .

**Proposition 1.2.4.** Soit  $C$  la composante connexe de  $x$  dans  $X$ . L'injection  $r : C \rightarrow X$  induit un isomorphisme  $r_* : \pi_1(C, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ .

Démonstration. Exercice. □

**Lemme 1.2.4.** Soient  $f, g : X \rightarrow Y$  avec  $f \sim g$  via l'homotopie  $H$ . Soit  $x \in X$  et  $\eta_x$  le chemin de  $f(x)$  à  $g(x)$  donné par  $s \mapsto H_s(x)$ . Alors,  $f_* = \text{ad}_\eta \circ g_*$  où  $\text{ad}_\eta$  est l'isomorphisme de conjugaison entre  $\pi_1(Y, f(x)) \rightarrow \pi_1(Y, g(x))$ .

Démonstration. Soit  $\gamma$  un lacet basé en  $x \in X$ . Soit

$$G : \begin{cases} I \times I & \longrightarrow & X \\ (t, s) & \longmapsto & \begin{cases} H(\gamma(0), 1 - 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2}, \\ H\left(\gamma\left(\frac{4t+2s-2}{3s+1}\right), s\right) & \text{si } \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{s+3}{4}, \\ H(\gamma(1), 4t - 3) & \text{si } \frac{s+3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases} \end{cases}$$

On a

$$G(t, 0) = \begin{cases} \bar{\eta} & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ f \circ \gamma & \text{si } 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ \eta & \text{si } 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

car  $H_0 = f$ . De plus,  $G(t, 1) = g \circ \gamma$  car  $H_1 = g$ ,  $G(0, s) = \bar{\eta}(0) = g(x)$  et  $G(1, s) = \eta(1) = g(x)$  pour tout  $s \in I$ .  $G$  est donc un homotopie à extrémités fixées (lacets en  $g(x)$ ) entre  $\bar{\eta}(f \circ \gamma)\eta$  et  $g \circ \gamma$ . On a donc  $[\bar{\eta}(f \circ \gamma)\eta] = [g \circ \gamma] = g_*[\gamma]$ . Enfin,  $\text{ad}_\eta[f \circ \gamma] = \text{ad}_\eta \circ f_*[\gamma]$ . On en conclut que  $\text{ad}_\eta \circ f_* = g_*$ . □

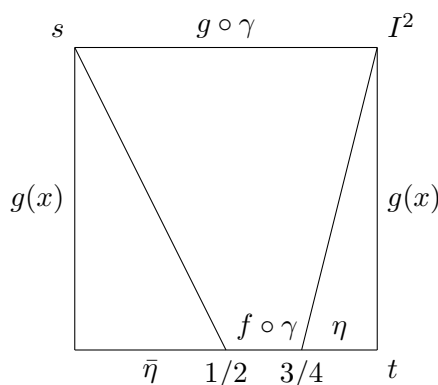


FIGURE 1.5 – Illustration de l’homotopie  $G$

**Remarque.** Dans la démonstration, on a en fait  $G = H(\gamma \circ \varphi_1, \varphi_2)$  où  $I^2 \rightarrow I^2, (t, s) \mapsto (\varphi_1(t, s), \varphi_2(t, s))$  est une reparamétrisation du carré.

**Théorème 1.2.3.** Soit  $f$  une équivalence d’homotopie entre  $X$  et  $Y$ . Alors,  $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$  est une bijection.

*Démonstration.* Soit  $g = Y \rightarrow X$  son inverse homotopique, i.e que  $g \circ f \sim \text{id}_X$ . Il existe donc un chemin de  $g(f(x))$  à  $x$  dans  $X$ . De plus, on a  $(\text{id}_X)_* = \text{ad}_{\eta}(g \circ f)_*$ , donc  $\text{ad}_{\eta} = g_* \circ f_*$ . Puisque  $g_*$  est surjective et  $f_*$  injective, on en déduit que  $g_* \circ f_*$ . Avec une étude similaire de  $f \circ g \sim \text{id}_Y$ , on trouve que  $f_*$  et  $g_*$  sont bijectives.

□

**Corollaire 1.2.2.** Tout espace contractile est simplement connexe.

### 1.2.4 Le groupe fondamental du cercle $S^1$

On identifie encore  $S^1$  à  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . On pose  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{2\pi it}$  et on note  $z_0 = p(0) = 1 \in \mathbb{C}$ , et soit  $\gamma_n(t) = p(nt)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et  $t \in I$  ( $\gamma_n$  est un lacet de base  $z_0$  dans  $S^1$ ). On a de plus  $\hat{\gamma}(z) = z^n$ .

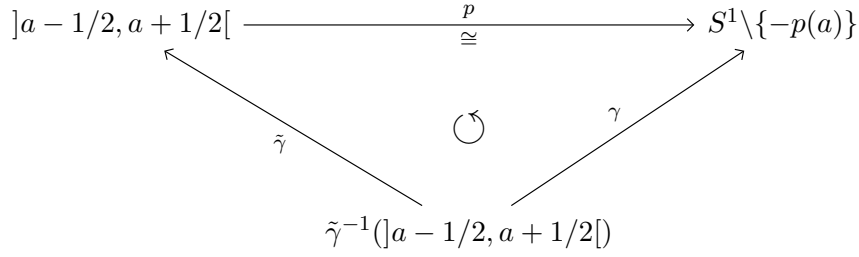
**Théorème 1.2.4.** On a un isomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, z_0) \\ n &\longmapsto [\gamma_n]. \end{aligned}$$

Pour démontrer ce théorème, on s’intéresse avant à quelques résultats auxiliaires.

**Lemme 1.2.5.** Soit  $\gamma : I \rightarrow S^1$  basé en  $z_0$ . Il existe un unique chemin  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{\gamma}(0) = 0$  et  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .

*Démonstration.* — *Unicité.* Si  $a \in \mathbb{R}$ , on a le diagramme commutatif suivant.



Ainsi, si  $\tilde{\gamma}$  existe, il est uniquement déterminé par  $\gamma$  et  $p$ .

- *Existence.* Pour  $a = 0$ , l'application inverse de  $p|_{]-1/2, 1/2[}$  est  $q : S^1 \setminus \{-1\} \rightarrow ]-1/2, 1/2[$ . Soit  $n$  un entier suffisamment grand pour pour tout  $t, t' \in I$  tels que  $|t - t'| \leq 1/n$ , alors  $|\gamma(t) - \gamma(t')| < 1$  (cet entier existe car  $\gamma$  est uniformément continu). On a  $\gamma(t)\overline{\gamma(t')} \neq -1$  pour  $t, t' \in I$  avec  $|t - t'| \leq 1/n$ . En effet, on a  $|\gamma(t)\overline{\gamma(t')} - 1| = |(\gamma(t) - \gamma(t'))\overline{\gamma(t')}| < 1$ . Soit  $j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  et  $t \in [j/n, (j + 1)/n]$ . On définit

$$\tilde{\gamma}(t) = q \left( \overline{\gamma(t)\gamma\left(\frac{j}{n}\right)} \right) + \sum_{i=1}^j q \left( \overline{\gamma(i/n)\gamma\left(\frac{i-1}{n}\right)} \right).$$

Ainsi définie, c'est une application de  $[j/n, (j + 1)/n] \rightarrow \mathbb{R}$ . On peut donc facilement recoller cette application définie en les  $n$  segments  $[j/n, (j + 1)/n]$  pour  $j \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  en une application de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . De plus,  $\tilde{\gamma}(0) = g(z_0) = 0$ , et on a  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$  car pour tout  $t \in I$ ,

$$p \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)\gamma\left(\frac{j}{n}\right) \prod_{i=1}^j \overline{\gamma\left(\frac{i}{n}\right)\gamma\left(\frac{i-1}{n}\right)} = \overline{\gamma(t)\gamma\left(\frac{j}{n}\right)} \gamma\left(\frac{j}{n}\right) = \gamma(t),$$

où  $j$  est tel que  $j/n \leq t \leq (j + 1)/n$ . □

**Remarque.** Dans la situation du lemme, on appelle  $\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$  comme le *degré* du lacet  $\gamma$ . On le note  $\deg(\gamma)$ .

**Lemme 1.2.6.** Soit  $H : I^2 \rightarrow S^1$  une application continue telle que  $H(0, 0) = z_0$ . Alors, il existe une unique application continue  $\tilde{H} : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{H}(0, 0) = 0$  et  $p \circ \tilde{H} = H$ .

*Démonstration.* C'est une variante de la démonstration précédente (voire TD). □

**Remarque.** On dit que  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{H}$  sont les *relèvements* de  $\gamma$  et  $H$ .

**Exemple.** Le relèvement de  $\gamma_n$  est défini par  $\tilde{\gamma}(t) = tn$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Son degré est  $n$ .

**Proposition 1.2.5.** Soit  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux lacets basés en  $z_0$ . Alors,  $\gamma \sim \gamma'$  si et seulement si  $\deg(\gamma) = \deg(\gamma')$ .

*Démonstration.*  $\Leftarrow$  Si les degrés sont égaux,  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\gamma}'$  ont des mêmes extrémités, donc  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont homotopes à extrémités fixées. En particulier, elles sont homotopes.

$\Rightarrow$  Soit  $H$  une homotopie entre  $\gamma$  et  $\gamma'$ , et  $\tilde{H} : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son relèvement (alors  $\tilde{H}_s$  est un relèvement du lacet  $H_s$  pour tout  $s \in I$ ). On a  $p \circ \tilde{H}_s(1) = H_s(1)$ , donc  $\tilde{H}_s(1) = \deg H_s$ . Alors,



$\tilde{H}(\{1\}, I) \subset \mathbb{Z}$ . Mais  $s \mapsto \tilde{H}_s(1)$  est continue, donc  $\tilde{H}(\{1\}, I) = \{n_0\}$  où  $n_0 \in \mathbb{Z}$ . Les relèvements  $\tilde{\gamma} : t \mapsto \tilde{H}_0(t)$  et  $\tilde{\gamma}' : t \mapsto \tilde{H}_1(t)$  de  $\gamma$  et  $\gamma'$  ont le même terminus. Ainsi,  $\deg \gamma = \deg \gamma'$ .  $\square$

**Proposition 1.2.6.** Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux lacets basés en  $z_0$ . On a  $\deg(\gamma \cdot \gamma') = \deg(\gamma) + \deg(\gamma')$ .

*Démonstration.* Soient  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\gamma}'$  les relèvements de  $\gamma$  et  $\gamma'$ . L'application  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $t \in I$  par

$$a(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \tilde{\gamma}'(2t-1) + \tilde{\gamma}(1) & \text{sinon,} \end{cases}$$

est bien définie, continue, et donne le relèvement de  $\gamma \cdot \gamma'$ . En effet,  $a(0) = 0$  et

$$p \circ a(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \underbrace{\tilde{\gamma}'(2t-1)\gamma(1)}_{\gamma'(2t-1)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc  $p \circ a = \gamma \cdot \gamma'$ . Pour le terminus, on a  $\deg(\gamma \cdot \gamma') = \tilde{\gamma}'(1) + \tilde{\gamma}(1)$ .  $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème.

*Démonstration (du théorème).* L'application  $\deg : \pi_1(S^1, z_0) \rightarrow \mathbb{Z}$  est bien défini, et est un morphisme de groupes selon les propositions 1.2.5 et 1.2.6. Il est injectif selon la deuxième implication de la proposition 1.2.5 et est surjectif car  $\deg[\gamma_n] = n$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . L'application inverse est  $n \mapsto [\gamma_n]$ .  $\square$

**Définition 1.2.7.** On appelle tore de dimension  $n$  l'espace  $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$ .

**Corollaire 1.2.3.** On a  $\pi_1(\mathbb{T}^n, (1, \dots, 1)) \cong \mathbb{Z}^n$ .

*Démonstration.* Par récurrence.  $\square$

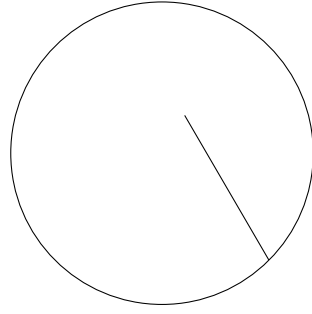
**Proposition 1.2.7.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces et  $p_1 : X \times Y \rightarrow X$  et  $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$  les projections. Alors,

$$(p_1)_* \times (p_2)_* : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

est un isomorphisme.

*Démonstration.* Cette application est surjective. En effet, si  $\gamma_1$  est lacet de base  $x$  dans  $X$ , et  $\gamma_2$  de base  $y$  dans  $Y$ , alors  $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$  est un lacet de base  $(x, y)$  dans  $X \times Y$  est envoyé sur  $\gamma_1 \times \gamma_2$ .

Enfin, l'application est bijective. Soit  $\gamma$  un lacet de base  $(x, y)$  et soit  $H^1$  (resp.  $H^2$ ) une homotopie entre  $p_1 \circ \gamma$  et  $\gamma_x$  (le chemin constant à  $x$ ) (resp. entre  $p_2 \circ \gamma$  et  $\gamma_y$ ). Alors, l'application  $(x', y', s) \mapsto (H_s^1(x'), H_s^2(y'))$  est une homotopie entre  $\gamma = (p_1 \circ \gamma, p_2 \circ \gamma)$  et  $\gamma_{(x,y)}$ .  $\square$



**Corollaire 1.2.4.**  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^n$  ne sont pas homéomorphes pour tout entier  $n \neq 2$ .

*Démonstration.* On a déjà vu le cas  $n = 1$ , on suppose donc que  $n > 2$  et que  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^n$ . Alors, si  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $y \in \mathbb{R}^n$ , on a que  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\} \cong S^1$  et  $\mathbb{R}^n \setminus \{y\} \cong S^{n-1}$  sont homéomorphes, ce qui est contradictoire car  $S^{n-1}$  est simplement connexe. □

**Corollaire 1.2.5.**  $S^1$  n'est pas un rétract de  $\mathbb{B}^2$ .

*Démonstration.* Si c'était le cas,  $\pi_1(S^1, 1)$  s'injecterait dans  $\pi_1(\mathbb{B}^2, 1)$ , ce qui est impossible. □

### 1.2.5 Applications.

**Théorème 1.2.5 (BROUWER).** Toute application continue  $f : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$  possède un point fixe.

*Démonstration.* Soit  $\Delta$  la diagonale de  $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2$  ( $\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{B}^2\}$ ). Soit  $F : \mathbb{B}^2 \times \mathbb{B}^2 \setminus \Delta \rightarrow S^1$  l'application définie de sorte que  $F(x, y)$  est le point d'intersection de la demi-droite  $]x, y]$  avec  $S^1$ . Alors,  $F(x, y) = x + t_0(x - y)$ , où  $t_0$  est l'unique solution réelle positive de l'équation quadratique  $\|x + t_0(x - y)\|^2 - 1 = 0$ . Ainsi définie,  $F$  est une fonction continue. Si  $f$  n'a pas de point fixe, alors  $(f(x), x) \notin \Delta$  pour tout  $x \in \mathbb{B}^2$ . Alors,  $\mathbb{B}^2 \rightarrow S^1$ ,  $x \mapsto F(f(x), x)$  est une fonction continue bien définie et est une rétraction, ce qui est impossible. □

**Théorème 1.2.6 (D'ALEMBERT).** Tout polynôme non constant à coefficients complexes possède au moins une racine complexe.

## 1.3 Théorème de VAN KAMPEN

### 1.3.1 Groupes libres

**Définition 1.3.1.** Soit  $F$  un groupe, et  $S \subset F$ . Le groupe  $F$  est libre de base  $S$  si pour tout groupe  $G$  et toute application  $f : S \rightarrow G$ , il existe un unique morphisme  $\hat{f} : F \rightarrow G$  prolongeant  $f$  à  $F$ .

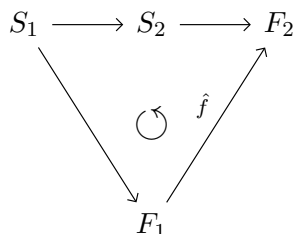
**Exemple.**  $F = \mathbb{Z}$  et  $S = \{1\}$ .

**Lemme 1.3.1.** *Si  $F$  est un groupe libre de base  $S$ , alors  $S$  engendre  $F$ .*

*Démonstration.* Soit  $F' = \langle S \rangle$ . Puisque  $F$  est libre, l'injection  $S \rightarrow F'$  s'étend de manière unique en  $f' : F \rightarrow F'$  et  $f'$  est surjective. Si  $i : F' \rightarrow F$  est l'injection de  $F'$  dans  $F$ , alors  $i \circ f'$  et  $\text{id}_F$  sont deux morphismes qui étendent  $S \rightarrow F$ . On a donc  $i \circ f' = \text{id}_F$  et  $F' = \text{Im}(i \circ f') = F$ . □

**Lemme 1.3.2.** *Soient  $(F_1, S_1)$  et  $(F_2, S_2)$  deux groupes libres munis de bases respectives. Alors,  $S_1$  et  $S_2$  ont même cardinaux si et seulement si  $F_1$  et  $F_2$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* Soit  $f : S_1 \rightarrow S_2$  une bijection et  $g$  sa réciproque. On a le diagramme commutatif



et le même pour  $\hat{g}$ . Ainsi,  $\hat{g} \circ \hat{f}$  et  $\text{id}_{F_1}$  étendent l'inclusion  $S_1 \rightarrow F_1$  et donc par unicité,  $\hat{g} \circ \hat{f} = \text{id}_{F_1}$  et  $\hat{f} \circ \hat{g} = \text{id}_{F_2}$ . La réciproque sera démontrée en TD. □

**Définition 1.3.2.** *Soit  $S = \{s_i \mid i \in I\}$  un ensemble, et  $S^{-1}$  un ensemble d'inverses formels, i.e  $S^{-1} = \{s_i^{-1} \mid i \in I\}$ . Un mot sur l'alphabet  $S \cup S^{-1}$  est une suite finie  $s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}$ , avec  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ , d'éléments de  $S \cup S^{-1}$  de longueur finie  $n$  non précisée (le mot vide a pour longueur 0). Il est réduit s'il ne contient pas deux lettres consécutives de la forme  $ss^{-1}$  ou  $s^{-1}s$ .*

**Théorème 1.3.1.** *Si  $S$  est un ensemble, il existe à isomorphisme près un unique groupe libre  $F(S)$  de base  $S$ .*

*Démonstration.* L'unicité est donnée par le lemme précédent. On construit maintenant le groupe. Si un mot contient un  $ss^{-1}$  ou  $s^{-1}s$ , on peut "simplifier". Réciproquement, on peut introduire  $ss^{-1}$  ou  $s^{-1}s$ . On introduit une relation d'équivalence sur les mots : on dit que  $w \sim w'$  s'il existe une suite finie de telles opérations permettant de passer de  $w$  à  $w'$ . On pose  $F(S)$  comme le quotient de l'ensemble des mots par la relation  $\sim$ . L'élément  $[\emptyset]$  sera noté 1. On munit ce quotient de l'opération de concaténation des mots qui est associative et qui passe au quotient. L'inverse  $[s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}]$  est  $[s_{i_n}^{-\varepsilon_n} \cdots s_{i_1}^{-\varepsilon_1}]$ . Ainsi,  $F(S)$  est bien un groupe. Il est libre car si  $f : S \rightarrow G$  est une application, et on note  $g_i = f(s_i)$  pour tout  $i \in I$ , alors l'application  $\hat{f}$  définie par

$$\hat{f}(s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots g_{i_n}^{\varepsilon_n}$$

est bien définie et est un morphisme qui prolonge  $f$ . Il est aussi clair que  $\hat{f}$  est unique.  $\square$

**Corollaire 1.3.1.** *Les éléments de  $F(S)$  sont en bijection avec l'ensemble des mots réduits sur l'alphabet  $S \cup S^{-1}$  noté  $\text{Red}$ , et la loi de groupe s'obtient en concaténant les mots et en simplifiant (i.e en enlevant les termes de la forme  $ss^{-1}$  et  $s^{-1}s$ ).*

*Démonstration.* Il nous suffit ici de montrer que  $F(S)$  est en bijection avec  $\text{Red}$ . Bien sûr, chaque classe contient un mot réduit. Soit  $\varphi : S \rightarrow \text{Aut}(\text{Red})$ ,  $s \mapsto \varphi_s$  une application définie pour tout  $s \in S$  et  $w \in \text{Red}$  par  $\varphi_s(w) = sw$  si  $sw$  est réduit (i.e que  $w$  ne commence pas par  $s^{-1}$ ), ou  $\varphi_s(w) = w'$  si  $w = s^{-1}w'$ . L'application  $\varphi_s$  est une bijection sur  $\text{Red}$  d'inverse  $\varphi_{s^{-1}}$ , donc  $\varphi$  est bien définie.  $F$  est libre, il existe donc un unique morphisme  $\hat{\varphi} : F \rightarrow \text{Aut}(\text{Red})$ . Soient  $w \neq w'$  deux éléments de  $\text{Red}$ . On a  $\hat{\varphi}_{[w]}(1) = w \neq w' = \hat{\varphi}_{[w']}(1)$ , donc  $\hat{\varphi}_{[w]} \neq \hat{\varphi}_{[w']}$ . Ainsi,  $[w] \neq [w']$  dans  $F$  et alors  $w \not\sim w'$ .  $\square$

### 1.3.2 Produit libre de groupes

**Proposition 1.3.1.** *Soient  $A$  et  $B$  deux groupes. Il existe à isomorphisme près un unique groupe  $G$  noté  $G = A * B$ , et deux morphismes  $i_A : A \rightarrow G$  et  $i_B : B \rightarrow G$  vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout groupe  $H$  et pour toute paire de morphismes  $f_A : A \rightarrow H$  et  $f_B : B \rightarrow H$ , il existe un unique morphisme  $f : G \rightarrow H$  tel que  $f_A = f \circ i_A$  et  $f_B = f \circ i_B$ .*

*Démonstration.* Un mot réduit est un mot de la  $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$  où chaque  $x_i \in A \sqcup B \setminus \{1_A, 1_B\}$  et deux  $x_i$  consécutifs sont dans des facteurs différents. Le mot de longueur 0 s'appelle  $1_G$ . On a alors  $G$  est l'ensemble des mots réduits et  $1_G$ . On le munit de la loi de concaténation des mots, et si un mot n'est pas réduit, on le réduit en remplaçant  $a \cdot a'$  par  $(aa')$  et  $b \cdot b'$  par  $(bb')$  en enlevant les éléments triviaux. Alors,  $1_G$  est l'élément neutre et  $x_n^{-1} \cdot \dots \cdot x_1^{-1}$  est l'inverse de  $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ .  $\square$

**Corollaire 1.3.2.** *Les applications  $i_A : A \rightarrow A * B$  et  $i_B \rightarrow A * B$  sont injectives et leurs images sont des sous-groupes de  $A * B$  avec  $A' \cap B' = \{1\}$ .*

*Démonstration.* On pose  $i_A : A \rightarrow G$  d'image  $A'$  l'ensemble des mots de longueur 1 dans  $A$  et  $1_G$ . Idem pour  $B$ .

On vérifie la propriété universelle. On a

$$f(a_1 b_1 \cdots a_n b_n) = f_A(a_1) f_B(b_1) \cdots f_A(a_n) f_B(b_n).$$

Ainsi,  $f : G \rightarrow H$  est uniquement déterminé par  $f_A$  et  $f_B$ . Enfin, l'unicité vient de la propriété universelle qui donne un morphisme  $f : G \rightarrow G'$  (où  $G$  est un groupe vérifiant ces propriétés), qui est en fait un isomorphisme.  $\square$

**Définition 1.3.3.** *On appelle  $G = A * B$  le produit libre (abstrait) de  $A$  et  $B$ .*

**Remarques.**

- Par la suite, on identifie  $A$  avec  $A'$  et  $B$  avec  $B'$ , on regarde donc ces groupes des sous-groupes de  $G$ .
- En itérant, on peut définir  $\ast_{i \in I} G_i$  pour une famille fini  $(G_i)_{i \in I}$  de groupes. Par exemple,  $F_n = \mathbb{Z} \ast \dots \ast \mathbb{Z}$  ( $n$  fois).

**1.3.3 Présentation d'un groupe**

**Rappel.** Soit  $G$  un groupe et  $r_1, \dots, r_k \in G$ . Le sous-groupe distingué engendré par les  $r_i$  est l'ensemble des éléments de la forme

$$g_1 r_{i_1}^{\varepsilon_1} g_1^{-1} \dots g_m r_{i_m}^{\varepsilon_m} g_m^{-1}$$

(où  $g_1, \dots, g_m \in G$  et  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ ), qui est le sous-groupe engendré par tous les conjugués des  $r_i^{\pm 1}$ . On le note  $\langle\langle r_1, \dots, r_k \rangle\rangle$ .

**Définition 1.3.4.** Soit  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  des lettres et  $r_1, \dots, r_k$  des mots en les  $s_i^{\pm 1}$ . On appelle  $G = F(S) / \langle\langle r_1, \dots, r_k \rangle\rangle$  et on écrit

$$G = \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1 = 1, \dots, r_k = 1 \rangle,$$

ou simplement  $G = \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$ .

**Remarques.**

- Cette manière de définir un groupe permet de définir des groupes *via* des générateurs et des relations entre ces dits générateurs.
- Si  $\bar{s}_i$  est la classe de  $s_i$  dans  $G$ , alors  $G$  est engendré par les  $\bar{s}_i$  et  $\bar{r}_i = 1_G$  dans  $G$  pour tout  $i \in I$ .
- Si  $\{r_1, \dots, r_k\} = \emptyset$ ,  $G = F(S)$ .
- Dans la suite, on écrit parfois  $s_i$  au lieu de  $\bar{s}_i$  par simplicité.

**Proposition 1.3.2** (propriété universelle). Si  $H$  est un groupe, et  $h_1, \dots, h_n \in H$  sont tels que  $r_i(h_1, \dots, h_n) = 1$  dans  $H$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , alors il existe un unique morphisme de groupes  $G \rightarrow H$  qui envoie  $s_i$  sur  $h_i$ .

*Démonstration.* L'application  $f : S \rightarrow H$  définie par  $f(s_i) = h_i$  pour tout  $i \in I$  induit une application  $\hat{f} : F(S) \rightarrow H$ . Puisque  $r_i \in \ker \hat{f}$  pour tout  $i \in I$ ,  $\hat{f}$  passe au quotient  $G$ . Puisque les  $s_i$  engendrent  $G$ ,  $\hat{f}$  est uniquement déterminée. □

**Exemples.**

- $\langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2$ .
- Si  $G = \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$  et  $G' = \langle s'_1, \dots, s'_m \mid r'_1, \dots, r'_\ell \rangle$ , alors

$$G \ast G' \cong \langle s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_m \mid r_1, \dots, r_k, r'_1, \dots, r'_\ell \rangle.$$

### 1.3.4 VAN KAMPEN

Soit  $X$  un espace connexe par arcs et  $X_1, X_2 \subset X$  des sous-espaces ouverts connexes par arcs tels que  $X = X_1 \cup X_2$  et  $X_1 \cap X_2$  est connexe par arcs, et soit  $x \in X_1 \cap X_2$  un point de base. Soit  $j_k : \pi_1(X_k, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  l'application induite par l'injection  $X_k \hookrightarrow X$  pour  $k \in \{1, 2\}$ . On considère l'application  $\varphi : \pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  donnée par la proposition 1.3.1. Soit  $i_k : \pi_1(X_1 \cap X_2, x) \rightarrow \pi_1(X_k, x) \rightarrow \pi_1(X_1, x) * \pi_1(X_2, x)$  l'application induite par l'inclusion  $X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_k$  pour  $k \in \{1, 2\}$ . Si  $\gamma$  est un chemin de  $X_1 \cap X_2$ , on a  $\varphi(i_1[\gamma]) = [\gamma] = \varphi(i_2[\gamma])$ , où  $[\gamma]$  est la classe d'homotopie de  $\gamma$  dans  $X$ . Ainsi,  $i_1[\gamma]i_2[\gamma]^{-1} \in \ker \varphi$ . Le théorème de VAN KAMPEN va nous permettre de préciser la forme du noyau de  $\varphi$ .

**Théorème 1.3.2.** *Le morphisme  $\varphi$  est surjectif et*

$$\ker \varphi = \langle\langle i_1[\gamma] \cdot i_2[\gamma]^{-1} \mid [\gamma] \in \pi_1(X_1 \cap X_2) \rangle\rangle.$$

*En particulier,  $\pi_1(X_1 \cup X_2)$  est isomorphe à  $(\pi_1(X_1, x) * \pi_2(X_2, x)) / \ker \varphi$ .*

**Remarque.** Moralement,  $\pi_1(X)$  est le plus gros quotient de  $\pi_1(X_1) * \pi_2(X_2)$  dans lequel  $i_1[\gamma] = i_2[\gamma]$  pour tout chemin  $\gamma$  dans  $X_1 \cap X_2$ .

**Corollaire 1.3.3.** *Sous les mêmes hypothèses, supposons que*

$$\begin{aligned} \pi_1(X_1, x) &\cong \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle, \\ \pi_2(X_2, x) &\cong \langle s'_1, \dots, s'_m \mid r'_1, \dots, r'_\ell \rangle, \end{aligned}$$

*et que  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x)$  est engendré par  $c_1, \dots, c_p$ , alors*

$$\pi_1(X, x) \cong \langle s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_m \mid r_1, \dots, r_k, r'_1, \dots, r'_\ell, i_1(c_1)i_2(c_1)^{-1}, \dots, i_p(c_p)i_2(c_p)^{-1} \rangle.$$

**Remarque.** Ici, on écrit  $i_1(c_j)$  pour un mot en les  $s_1, \dots, s_n$  qui représentent l'élément  $i_1(c_j) \in \pi_1(X_1, x)$ , et de même pour  $i_2(c_j)^{-1}$ .

**Lemme 1.3.3.** *Soit  $K$  un compact métrique et un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $K$ . Alors, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in K$ , il existe  $i \in I$  tel que  $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subset U_i$ . En particulier, si  $x, x' \in K$  sont tels que  $d(x, x') \leq \varepsilon$ , alors  $x, x' \in U_i$  pour un certain  $i$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $x \in K$ , il existe  $\varepsilon_x > 0$  et  $i \in I$  tel que  $\mathcal{B}(x, \varepsilon_x) \subset U_i$ . Puisque  $K$  est compact, on peut écrire  $\bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}(x_i, \varepsilon_{x_i}/2)$ . On choisit  $\varepsilon = \min_{i=1}^N \varepsilon_{x_i}/2$ . Si  $x \in K$ , alors il existe  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$  tel que  $\mathcal{B}(x, \varepsilon) \subset \mathcal{B}(x, \varepsilon_{x_i}/2)$  ( $\varepsilon_{x_i}/2$  réalise le minimum). De plus,  $\mathcal{B}(x, \varepsilon_{x_i}/2) \subset U_i$ . □

*Démonstration (du théorème de VAN KAMPEN).* — *Surjectivité de  $\varphi$ .* Soit  $[\gamma] \in \pi_1(X)$ . On applique le lemme à  $K = [0, 1] = \gamma^{-1}(X_1) \cup \gamma^{-1}(X_2)$  : il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $t, t' \in [0, 1]$  tel que  $|t - t'| \leq \varepsilon$ , alors il existe  $k \in \{1, 2\}$  tel que  $\gamma(t), \gamma(t') \in X_k$ . Quitte à diminuer, on peut écrire  $\varepsilon = 1/N$ . On découpe alors  $[0, 1]$  en  $N$  intervalles

$$I_1 = [t_0, t_1], \dots, I_N = [t_{N-1}, t_N]$$

avec  $t_0 = 0$  et  $t_N = 1$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , il existe  $k_i \in \{1, 2\}$  tel que  $\gamma(I_i) \subset X_{k_i}$ . Soit  $\gamma_i = \gamma|_{I_i}$  (chemin dans  $X_{k_i}$ ). Il est clair que  $\gamma \sim \gamma_1 \cdots \gamma_N$ . Soit  $\delta_i$  le chemin reliant  $x$  à  $\gamma(t_i)$  (le terminus de  $\gamma_i$ ) dans  $X_{k_{i-1}} \cap X_{k_i}$ . Alors,

$$\gamma \sim (\gamma_1 \bar{\delta}_1) \cdot (\delta_1 \gamma_2 \bar{\delta}_2) \cdots (\delta_{N-1} \gamma_N \bar{\delta}_N).$$

Ainsi, l'élément  $[\gamma \bar{\delta}_1] \cdots [\delta_{N-1} \gamma_N \bar{\delta}_N] \in \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$  est une préimage de  $[\gamma]$  par  $\varphi$ .

— *Calcul de  $\ker \varphi$ .* Soit

$$N = \langle\langle i_1[\gamma] \cdot i_2[\gamma]^{-1} \mid [\gamma] \in \pi_1(X_1 \cap X_2) \rangle\rangle.$$

On a déjà montré que  $N \subset \ker \varphi$ , donc la factorisation

$$\bar{\varphi} : \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) \longrightarrow \pi_1(X)$$

est surjective. Il suffit donc de montrer l'application  $\bar{\varphi}$  est injective. On introduit pour cela un peu de vocabulaire.

Une factorisation d'un  $[f] \in \pi_1(X)$  est un produit  $[f_1] \cdots [f_k] \in \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$  tel que

- $f_i$  est un lacet basé en  $x$  dans un  $X_\alpha$ , *i.e* que  $[f_i] \in \pi_1(X_\alpha)$  ;
- $f \sim f_1 \cdots f_k$  dans  $X$  en tant que lacets basés en  $x$ .

Deux factorisations sont dites *équivalentes* si elles sont reliées par un nombre fini d'opérations parmi les deux suivantes :

- remplacer deux termes  $[f_i][f_{i+1}]$  par  $[f_i][f_{i+1}]$  si  $f_i$  et  $f_{i+1}$  sont à valeurs dans le même  $X_\alpha$  ;
- considérer  $[f_i] \in \pi_1$  dans  $\pi_1(X_\beta)$  dans  $\pi_1(X_\beta)$  si  $f_i \in X_\alpha \cap X_\beta$  (*i.e* remplacer  $i_\alpha f_i$  par  $i_\beta f_i$ ).

La première opération ne change pas un élément de  $\pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$ , tandis que la seconde ne change pas la classe de l'élément dans  $\pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)/N$ .

L'application  $\bar{\varphi}$  est injective *si et seulement si* deux factorisations de  $[f]$  sont toujours équivalentes. Soient  $[f_1] \cdots [f_k]$  et  $[f'_1] \cdots [f'_\ell]$  deux factorisations de  $f$ . Il existe une homotopie  $H = I^2 \longrightarrow X$  de  $f_1 \cdots f_k$  à  $f'_1 \cdots f'_\ell$ . Selon le lemme auxiliaire avec  $K = I^2$  et  $U_i = H^{-1}(X_i)$ , il existe  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$  et  $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n$  tels que les rectangles

$$R_{i,j} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}] \subset I^2$$

soient envoyé par  $H$  sur  $X_1$  ou  $X_2$ . On peut supposer que les  $t_i$  contiennent les points de subdivision de la concaténation  $f_1 \cdots f_k$  et de la concaténation  $f'_1 \cdots f'_\ell$ . On numérote les rectangles  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_{mn}$  tels que le dessin suivant.

...

Si  $\gamma$  est un chemin de  $I^2$  du côté gauche au côté droit du carré, alors  $H|_\gamma$  est un lacet basé en  $x$  dans  $X$ . Soit  $\gamma_r$  le chemin qui sépare  $R_1, \dots, R_r$  de  $R_{r+1}, \dots, R_{mn}$ . En particulier,  $\gamma_0 = [0, 1] \times \{0\}$  et  $\gamma_{mn} = \{0\} \times [0, 1]$ . On passe de  $\gamma_r$  à  $\gamma_{r+1}$  en "poussant  $\gamma_r$  à travers le rectangle  $R_{r+1}$ ". Pour chaque sommet  $v \in R_i$  tel que  $H(v) \neq x_i$ , soit  $g_v$  un chemin de  $x$  à  $H(v)$ . Si  $H(e_v) \subset X_\alpha$  où  $e_v$  l'arête entre  $v$  et  $v+1$ , on choisit  $g_v$  dans  $X_\alpha \cap X_\beta$ . Comme dans la démonstration de la surjectivité, on insère les chemins  $g_v$  et  $\bar{g}_v$  aux sommets consécutifs dans  $\gamma_r$  de sorte que

$$H|_{\gamma_r} \sim H|_{e_{v_1}} \bar{g}_{v_2} (g_{v_2} H|_{e_{v_2}} \bar{g}_{v_3}) \cdots (g_{v_p} H|_{e_{v_p}}),$$

(où  $p$  est le nombre d'arêtes dans  $\gamma_r$ ) est une factorisation de  $[H|_{\gamma_r}] \in \pi_1(X)$ . En fait,  $H|_{e_{v_1}\bar{g}_{v_2}}$  est un lacet basé en  $X$  dans un  $X_\alpha$ . La démonstration est achevée grâce aux deux propriétés suivantes.

- (i) Les lacets de  $[H|_{\gamma_r}]$  et  $[H|_{\gamma_{r+1}}]$  sont équivalents. En effet, on peut considérer un seul  $X_\alpha$  pour toutes les arêtes de  $\gamma_r$  et  $\gamma_{r+1}$  dans  $R_{r+1}$  (il suffit de prendre le  $X_\alpha$  tel que  $H(R_{r+1}) \subset X_\alpha$ ). Grâce à la première opérations sur les factorisations équivalentes, on peut remplacer les facteurs dans les factorisations de  $\gamma_r$  et  $\gamma_{r+1}$  qui correspondent à leurs arêtes par leur produits dans  $\pi_1(X_\alpha)$ . Finalement, le lacet  $\theta$  de  $\gamma_r$ , resp.  $\theta'$  de  $\gamma_{r+1}$ , qui en résultent sont homotopes dans  $X_\alpha$ .
- (ii) La factorisation associée à  $\gamma_0$  (resp.  $\gamma_{mn}$  est équivalent)  $f_1 \cdots f_k$  (resp.  $f'_1 \cdots f'_\ell$ ). En effet, pour chaque sommet  $v$  de  $[0, 1] \times \{0\}$ , on choisit plus précisément :  $X_\alpha$  pour  $g_v$  tel que  $\text{Im } f_i \subset X_\alpha$  pour le  $f_i$  tel que  $v$  appartient à la source<sup>1</sup> de  $f_i$  (si  $v$  est dans l'intersection des sources de  $f_i$  et  $f_{i+1}$ , alors  $v$  est un point de subdivision). En vertu de la première opérations sur les factorisations équivalentes, on peut remplacer les facteurs de la factorisation  $H|_{\gamma_0}$  qui correspondent aux arêtes dans la source d'un  $f_i$  par leur produit dans  $\pi_1(X_\alpha)$  (où  $X_\alpha$  est tel que  $\text{Im } f_i \subset X_\alpha$ ) et ce produit est égal à  $[f_i] \in \pi_1(X_\alpha)$ . Ainsi,  $H|_{\gamma_0}$  est équivalent à  $f_1, \dots, f_k$ . L'argument pour les  $f'_1 \cdots f'_\ell$  est similaire, et donc  $f_1 \cdots f_k \sim H|_{\gamma_{mn}} \sim f'_1 \cdots f'_\ell$ .

□

**Corollaire 1.3.4.** *Sous les hypothèses du théorème de VAN KAMPFEN, on a les propriétés suivantes.*

- (i) Si  $\pi_1(X_1 \cap X_2)$  est trivial, alors  $\pi_1(X) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$ .
- (ii) Si  $\pi_1(X_2)$  est trivial et si l'on note  $I_1 = \langle\langle \text{Im}(i_1) \rangle\rangle$ , alors  $\pi_1(X) \cong \pi_1(X_1)/I_1$ .
- (iii) Si  $i_1 : \pi_1(X_1 \cap X_2) \rightarrow \pi_1(X_2)$  est surjectif (donc bijectif), alors  $\pi_1(X_1) \rightarrow \pi_1(X)$  est surjectif (donc bijectif).

*Démonstration.* Exercice (TD).

□

**Corollaire 1.3.5.** *Soit  $j_k : \pi_1(X_k) \rightarrow \pi_1(X)$  l'injection d'inclusion pour  $k \in \{1, 2\}$ . Sous les hypothèses du théorème de VAN KAMPFEN, le groupe fondamental  $\pi_1(X)$  vérifie la propriété universelle suivante : si  $G$  est un groupe, et  $h_1 = \pi_1(X_1) \rightarrow G$  et  $h_2 = \pi_1(X_2) \rightarrow G$  sont des morphismes de groupes tels que  $h_1 \circ i_1 = h_2 \circ i_2$  comme applications de  $\pi_1(X_1 \cap X_2)$  dans  $G$ , alors il existe  $h : \pi_1(X) \rightarrow G$  tel que  $h \circ j_1 = h_1$  et  $h \circ j_2 = h_2$ .*

**Corollaire 1.3.6.** *Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux espaces connexes par arcs. Soit  $Y_1 \subset X_1$  et  $Y_2 \subset X_2$  deux fermés non vides connexes par arcs homéomorphes, et soit  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$  un homéomorphisme. On suppose que  $Y_1$  et  $Y_2$  sont des rétracts d'ouverts respectifs  $U_1$  et  $U_2$ . Soit enfin  $X = X_1 \cup_f X_2$ . Soient  $x_1 \in Y_1$ ,  $x_2 = f(x_1) \in Y_2$ , et  $\alpha = p(x_1) = p(x_2)$  dans  $X$ . Alors,*

$$\pi_1(X_1 \cup_f X_2) \cong \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) / \langle\langle (p_1)_*([\gamma]) (p_2)_*(f_*^{-1}[\gamma]) \mid [\gamma] \in \pi_1(Y_1, x_1) \rangle\rangle.$$

1. On appelle source de  $f_i$  le segment sur lequel il est défini.



**Rappel.**  $X_1 \cup_f X_2$  est le quotient de  $X_1 \sqcup X_2$  par la relation d'équivalence induite par  $f$ , i.e que si  $(X_1 \sqcup X_2) \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ , alors la classe d'équivalence de  $x$  est  $[x] = \{x\}$ . Si  $x \in Y_1$ ,  $[x] = \{x, f(x)\}$ . Enfin, si  $y \in Y_2$ , alors  $[y] = \{y, f^{-1}(y)\}$ .

*Démonstration.* Soit  $X'_1 = X_1 \cup U_2$  et  $X'_2 = X_2 \cup U_1$ . Soit  $Y$  l'image de  $Y_1$  dans  $X$  (qui est aussi l'image de  $Y_2$  dans  $X$ ). Soit  $i \in \{1, 2\}$ . Puisque  $U_i$  se rétracte par déformation sur  $Y$ , on a  $X'_i \sim X_i$ , donc  $X'_1 \cap X'_2 = U_1 \cap U_2$  se rétracte à  $y$ . Alors, pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X'_1 \cap X'_2) & \longrightarrow & \pi_1(X'_1) * \pi_1(X'_2) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \pi_1(Y_i) & \longrightarrow & \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2) \end{array}$$

Ainsi, l'application  $f_* : \pi_1(Y_1, x_1) \longrightarrow \pi_1(Y_2, x_2)$  est bijective et on conclut avec le théorème de VAN KAMPEN. □

**Définition 1.3.5** (bouquets d'espaces). Soient  $(X_1, x_1)$  et  $(X_2, x_2)$  deux espaces topologiques pointés. Le bouquet des espaces  $X_1$  et  $X_2$  est l'espace  $X_1 \vee X_2 = (X_1 \sqcup X_2)(x_1 \sim x_2)$ . À homéomorphisme près, cette définition ne dépend des choix de  $x_1$  et  $x_2$ .

**Exemple.** Cette construction permet de coller deux espace. On a par exemple l'espace  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ , qui est un huit (où l'on identifie les points  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$  de l'un et l'autre cercle).

On suppose désormais  $X_1$  et  $X_2$  connexes par arcs.

**Proposition 1.3.3.** On suppose que les espaces  $X_1$  et  $X_2$  sont respectivement rétracts par déformations d'ouverts  $U_1 \subset X_1$  et  $U_2 \subset X_2$ . Soit  $x$  l'image de  $x_1$  et  $x_2$  dans  $X_1 \vee X_2$ . On a alors

$$\pi_1(X_1 \vee X_2, x) = \pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2).$$

*Démonstration.* Corollaire précédent. □

**Exemple.** On a  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

### 1.3.5 Groupe fondamental d'un graphe

**Définition 1.3.6.** Soit  $V$  un ensemble fini muni de la topologie discrète et  $E$  une réunion disjointe de copie de  $[0, 1]$ . Soit  $f : \partial E \longrightarrow V$  une application. Alors, l'espace  $\Gamma = V \cup_f E$  est obtenu en recollant  $E$  à  $V$  par  $f$ .  $\Gamma$  est dit fini si  $V$  l'est. Une arête est une classe  $e$  d'un segment  $[0, 1]$  dans  $\Gamma$ . Un arbre est un graphe sans cycles, i.e sans suite d'arêtes distincts  $e_1, \dots, e_n$  telle que  $e_1 = e_n$ , et  $e_i \neq e_{i+1}$

**Proposition 1.3.4.** Un arbre est contractile.

*Démonstration.* Soient  $x_0 \in V$  et  $x \in \Gamma$ . Si  $x \notin V$ , alors il existe un chemin  $\gamma$  sans aller retour de  $x_0$  à  $x$  (puisque  $\Gamma$  est un arbre). On prolonge  $\gamma$  en un chemin  $e_1, \dots, e_n$  que l'on identifie à  $[0, n]$ . L'application  $I \times \gamma \rightarrow \Gamma$ ,  $(t, x) \mapsto tx$  est une homotopie de  $i \circ r$  à  $\text{id}_\Gamma$ , où  $i : \{x_0\} \rightarrow \Gamma$  est l'inclusion et  $r : \Gamma \rightarrow \{x_0\}$  est une rétraction. On a donc  $\Gamma \sim \{x_0\}$ .  $\square$

**Proposition 1.3.5.** *Le groupe fondamental d'un graphe connexe fini est un groupe libre. Son rang est le nombre d'arêtes dans le complémentaire d'un sous-arbre maximal.*

*Démonstration.* Soit  $T \cap \Gamma$  un sous-arbre maximal. Un tel sous-ensemble existe car le graphe est fini. Quitte à augmenter cet arbre, on peut supposer  $V \subset T$ . Si  $T = \Gamma$ , alors  $\pi_1(\Gamma, x) = \{1\}$ . Sinon, on fait une récurrence sur  $N$ , le nombre d'arêtes dans  $\Gamma \setminus T$ .

- $N = 1$ . On peut écrire  $\Gamma = T \cup \{e\}$ . Tout cycle dont les arêtes sont dans  $\Gamma$  passe par le sommet  $e$ , et il existe un unique chemin  $\gamma \subset T$  reliant les extrémités de  $e$ , donc il existe un unique cycle d'arêtes  $\gamma \cup \{e\}$  dans  $\Gamma$ . Puisque  $T$  est contractile, il se rétracte par déformation sur  $\gamma$ , donc  $\Gamma$  se rétracte par déformation sur  $\gamma \cup \{e\}$ . Or,  $\gamma \cup \{e\} \cong \mathbb{S}^1$ , donc

$$\pi_1(\Gamma) \cong \pi_1(\gamma \cup \{e\}) \cong \mathbb{Z}.$$

- Hérité. Soit  $N > 1$  et supposons le résultat vrai au rang  $N - 1$ . Si  $e \notin T$ , on pose

$$X_e = \bigcup_{v \in V} \mathcal{B}(v, 1/2) \cap T \cup \{e\}$$

où  $\mathcal{B}(v, 1/2)$  est une boule ouverte. Soit  $e \notin T$ . Les parties  $X_1 := \bigcup_{e \neq e'} X_{e'}$  et  $X_2 = X_e$  sont ouvertes dans  $\Gamma$  et sont telles que  $X_1 \cup X_2 = \Gamma$ . De plus, l'intersection

$$X_1 \cap X_2 = \bigcup_{v \in V} \mathcal{B}(v, 1/2) \cup T$$

se rétracte par déformation à  $T$  et les espaces  $X_1$  et  $X_2$  se rétractent respectivement à  $\Gamma \setminus \{e\}$  et  $T \cup \{e\}$ , donc l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que  $\pi_1(X_1) = F_{N-1}$  et  $\pi_1(X_2) = \mathbb{Z}$ , où  $F_{N-1}$  est un groupe libre de rang  $N - 1$ . Selon le théorème de VAN KAMPEN, on a  $\pi_1(\Gamma) = F_{N-1} * \mathbb{Z}$ , qui est un groupe libre de rang  $N$ .  $\square$

### 1.3.6 Attacher une cellule : les CW complexes

Soit  $Y$  un espace connexe par arcs et  $N \geq 2$  un entier. Soit  $f : \mathbb{S}^{N-1} \rightarrow Y$  une application continue. On considère l'espace  $X = Y \cup_f \mathbb{B}^N$  obtenu en recollant les espaces  $Y$  et  $\mathbb{B}^N$  au moyen de la fonction  $f$ .

**Théorème 1.3.3.** *Soit  $y_0 \in Y$ .*

- Si  $N = 2$ , alors l'application  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$  représente un élément  $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$  bien défini à conjugaison près, et on a

$$\pi_1(X, y_0) \cong \pi_1(Y, y_0) / \langle\langle [\gamma] \rangle\rangle.$$

- Si  $N > 2$ , on a

$$\pi_1(X, y_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

*Démonstration.* Soit  $O \in \mathbb{B}^N$  le centre de la boule  $\mathbb{B}^N$ . On considère les ouverts  $X_1 = Y \cup (\mathbb{B}^N \setminus \{O\})$  et  $X_2 = \overset{\circ}{\mathbb{B}^N}$ . Alors,  $Y$  se rétracte par déformation sur  $X_1$ , l'ouvert  $X_2$  est contractile, et  $X_1 \cap X_2$  (homéomorphe à  $\overset{\circ}{\mathbb{B}^N} \setminus \{O\}$ ) se rétracte sur  $\{x \in \mathbb{B}^N \mid \|x\| = 1/2\} \cong \mathbb{S}^{N-1}$ .

On suppose  $N \geq 1$ . Alors,  $\pi_1(\mathbb{S}^{N-1})$  est trivial. Soit  $x_0 \in X_1 \cap X_2$ . L'inclusion  $X_1 \hookrightarrow X$  induit un isomorphisme  $\pi_1(X_1, x_0) \cong \pi_1(X_2, x_0)$  par le théorème de VAN KAMPEN. Soit  $\eta$  un chemin joignant  $y_0$  à  $x_0$  dans  $X_1$ . On considère les isomorphismes  $\text{ad}_\eta : \pi_1(X_1, y_0) \rightarrow \pi_1(X_1, x_0)$  et  $\text{ad}_\eta : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ . On trouve alors le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, x_0) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_1(X_1, y_0) & & \text{ad}_\eta \cong \\ \text{ad}_\eta \downarrow \cong & & \downarrow \\ \pi_1(X_1, x_0) & \xrightarrow{\text{V. KAMPEN}} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Ainsi, l'application  $f_* : \pi_1(Y_1, x_1) \rightarrow \pi_1(Y_2, x_2)$  est bijective et on conclut avec le théorème de VAN KAMPEN.

Si  $N = 2$ , on a  $\pi_1(X_1 \cap X_2) \cong \mathbb{Z}$ . On pose  $\gamma_f(t) = f(e^{2i\pi t}) \in Y$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , et  $z_0 = \gamma_f(0) = f(1)$ . Puisque  $\pi_1(X_2) = \{1\}$ , un corollaire du théorème de VAN KAMPEN assure que l'inclusion  $X_1 \hookrightarrow X$  induit un isomorphisme  $\pi_1(X_1, x_0)/I_1 \cong \pi_1(X, x_0)$  avec  $I_1 = \langle\langle \text{Im } i_1 \rangle\rangle$ , où  $i_1 : X_1 \cap X_2 \rightarrow X_1$  est l'inclusion, et où  $x_0$  est un point de  $\{x \in \mathbb{B}^2 \mid \|x\| = 1/2\}$ . Avec  $\gamma'_f(t) = \frac{1}{2}e^{2i\pi t}$ , la classe  $[\gamma'_f]$  engendre  $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$  et la rétraction  $r : X_1 \rightarrow Y$  satisfait  $r_* i_1 [\gamma'_f] = [\gamma_f]$ . Puisque  $I_0 = \langle i_1 [\gamma'_f] \rangle$ , le noyau de  $i_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, z_0)$  est  $\langle\langle [\gamma_f] \rangle\rangle$ . Soit  $\eta$  un chemin de  $y_0$  à  $z_0$  dans  $Y$ . Comme dans le premier cas, on a  $\ker(\pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, y_0)) = \langle\langle \eta \gamma_f \bar{\eta} \rangle\rangle$ . □

**Définition 1.3.7.** Un CW-complexe est un espace topologique obtenu de la manière inductive suivante.

- $X^0$  est un ensemble discret  $I_0$  ;
- $X^n$  est obtenu à partir de  $X^{n-1}$  et d'une union disjointe de boules  $\mathbb{B}_i^n$  avec  $i \in I_n$  en les attachants à  $X^{n-1}$  par des applications continues  $f_i : \partial\mathbb{B}_i^n \rightarrow X^{n-1}$  ;
- $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$  est muni de la topologie faible :  $K \subset X$  est fermé si et seulement si  $K \cap X^n \subset X^n$  est fermé pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Remarque.** Si  $I_n = \emptyset$ , alors  $X^n = X^{n-1}$ .

**Théorème 1.3.4.** Soit  $X$  un CW-complexe et  $x \in X^2$ . Alors, l'inclusion  $X^2 \rightarrow X$  induit un isomorphisme  $\pi_1(X^2, x) \cong \pi_1(X, x)$ .

**Remarque.** Les CW-complexes de dimension 1 sont exactement les graphes.

## 1.4 Revêtements

### 1.4.1 Homéomorphismes locaux

**Définition 1.4.1.** Une application continue  $p : Y \rightarrow X$  est un homéomorphisme local si, pour tout point  $y \in Y$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $y$  et un voisinage ouvert  $V$  de  $p(y)$  tels que la restriction  $p : U \rightarrow V$  soit un homéomorphisme.

**Remarques.**

- Un homéomorphisme local est une application ouverte.
- Soit  $p : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme local, et  $A \subset X$ . Alors,  $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow p(A)$  est un homéomorphisme local.
- En particulier,  $p^{-1}(\{x\})$  est un espace discret pour tout  $x \in X$ .

**Définition 1.4.2.** Un revêtement d'un espace  $X$  est une application surjective  $p : Y \rightarrow X$  telle tout  $x \in X$  possède un voisinage ouvert  $V$  tel que  $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$  où  $\mathcal{U}_i \subset Y$  est un ouvert pour tout  $i \in I$  tel que  $p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \rightarrow p(\mathcal{U}_i) = V$  est un homéomorphisme.

En anglais, on parle de “covering space”.

**Remarques.**

- Les  $\mathcal{U}_i$  sont appelés feuilletés au dessus de  $V$ .
- On appelle l'application inverse  $s_i : V \rightarrow \mathcal{U}_i$  une *section locale*.
- On dit qu'un tel ouvert  $V$  est un ouvert *trivialisant* de  $p$ .
- On dit que  $p : Y \rightarrow X$  est connexe (*resp.* simplement connexe, *resp.* connexe par arcs, etc. . .) si l'espace  $Y$  est connexe (*resp.* simplement connexe, *resp.* connexe par arcs, etc. . .).
- L'application  $p$  est un homéomorphisme local.
- L'application  $x \rightarrow \text{card } p^{-1}(\{x\})$  est localement constante. En particulier, si  $X$  est connexe, cette application est constante.
- Si  $Y$  est connexe (*resp.* connexe par arcs, *resp.* compact), alors  $X$  est connexe (*resp.* connexe par arcs, *resp.* compact).
- Si  $X$  est séparé, alors  $Y$  est séparé.
- En tant qu'espace topologique, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i & \xleftarrow[\cong]{s_i(v) \leftarrow (v,i)} & V \times I \\
 \downarrow p & \swarrow p \circ v_1 & \\
 V & & 
 \end{array}$$

où  $I$  est muni de la topologie discrète.

**Exemples.**

- *Revêtements triviaux.* On appelle revêtement *trivial* tout revêtement où  $X$  est trivialisant, i.e que

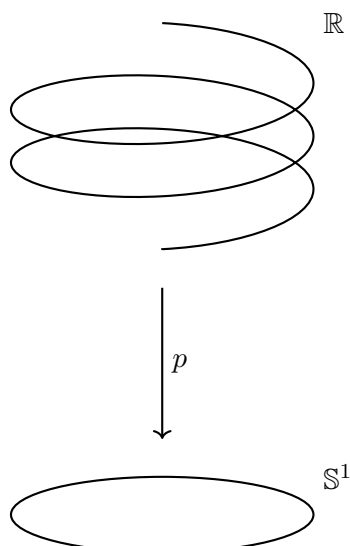
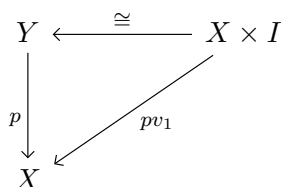


FIGURE 1.6 – Revêtement du cercle  $\mathbb{S}^1$  par la droite réelle.



donc chaque revêtement est trivial.

- Soit  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ . Soit  $V_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$  et  $V_{-1} = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ .  $V_1$  et  $V_2$  sont trivialisants pour  $p$ . En effet, on a  $p^{-1}(V_1) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} ]i, i + 1[$ , et  $p|_{]i, i + 1[} : ]i, i + 1[ \rightarrow V_1$  est un homéomorphisme. De même pour  $V_{-1}$ , on a  $p^{-1}(V_{-1}) = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Z} + 1/2) = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} ]i - 1/2, i + 1/2[$ , et  $p|_{]i - 1/2, i + 1/2[} : ]i - 1/2, i + 1/2[ \rightarrow V_{-1}$  est un homéomorphisme (voir figure 1.6).
- Soit  $p : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto z^n$ , où  $n \geq 1$  est un entier. On reprend la même notation avec les  $V_{\pm 1}$ . On a  $p^{-1}(V_1) = \mathbb{S}^1 \setminus \mu_n$  et  $p^{-1}(V_{-1}) = \mathbb{S}^1 \setminus (\mu_{2n} \setminus \mu_n)$ , où  $\mu_k \subset \mathbb{C}$  est le groupe des racines  $k$ -ièmes de l'unité pour tout  $k \geq 1$ .

**Contre-exemple.** On a vu qu'un revêtement  $p : Y \rightarrow X$  est un homéomorphisme local. Cependant, certains homéomorphismes locaux ne définissent pas de revêtement. Soit

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \cup \mathbb{R} \times \{0\}.$$

La projection  $p : Y \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$  est un homéomorphisme local mais n'est pas un revêtement.

On a tout de même une réciproque partielle.

**Proposition 1.4.1.** *Soit  $p : Y \rightarrow X$  un homéomorphisme local. Si  $Y$  est séparé, et toutes les fibres  $p^{-1}(\{x\})$  ont un même cardinal fini, alors  $p$  est un revêtement.*

*Démonstration.* Soit  $x \in X$  et notons  $p^{-1}(\{x\}) = \{y_1, \dots, y_m\}$ . Puisque  $p$  est un homéomorphisme local, pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , il existe  $\tilde{\mathcal{U}}_i$  un voisinage ouvert de  $y_i$  tel que  $p|_{\tilde{\mathcal{U}}_i} : \tilde{\mathcal{U}}_i \rightarrow p(\tilde{\mathcal{U}}_i)$ .  $Y$  étant séparé, on peut supposer les  $\tilde{\mathcal{U}}_i$  disjoints. Soit  $V = \bigcap_{i=1}^m p(\tilde{\mathcal{U}}_i) \subset X$ .  $V$  est un voisinage ouvert de  $x$ . Soit  $\mathcal{U}_i = p|_{\tilde{\mathcal{U}}_i}^{-1}(V) \subset \tilde{\mathcal{U}}_i$ . C'est un ouvert non vide,  $p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \rightarrow V$  est un homéomorphisme, et

$$\bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i = \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i \subset p^{-1}(V).$$

En effet, si  $x' \in V$ , alors  $\text{card}(p^{-1}(\{x'\}) \cap \mathcal{U}_i) = 1$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Les  $\mathcal{U}_i$  sont disjoints, donc  $\text{card}(p^{-1}(x') \cap \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i) = m$ . Ainsi,  $p^{-1}(\{x'\}) \subset \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i$ , et alors  $p^{-1}(V) \subset \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i$ . On en conclut que  $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i$ , et  $p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \rightarrow V$  est un homéomorphisme.  $\square$

### 1.4.2 Propriétés de relèvement

**Définition 1.4.3.** Soit  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement et  $f : Y \rightarrow X$ . Une application  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  est dit être un relèvement de  $f$  si  $p \circ \tilde{f} = f$ .

**Remarque.** On a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow \tilde{f} & \uparrow p \\ & & \tilde{X} \end{array}$$

**Lemme 1.4.1.** Soient  $\tilde{f}, \tilde{f}' : Y \rightarrow \tilde{X}$  deux relèvements de  $f$ . Si  $Y$  est connexe et s'il existe  $y_0 \in Y$  tel que  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$ , alors  $\tilde{f} = \tilde{f}'$ .

*Démonstration.* Soit  $C = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\} \subset Y$  est un fermé. Montrons que  $C$  est ouvert. Si  $y_0 \in C$ , alors il existe  $\mathcal{U}_i \subset \tilde{X}$  tel que  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0) \in \mathcal{U}_i$  (choisir un trivialisant qui contient  $f(y_0)$ ). En particulier,  $p|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \rightarrow p(\mathcal{U}_i)$  est un homéomorphisme. Soit  $s_i : p(\mathcal{U}_i) \rightarrow \mathcal{U}_i$  la section locale, et  $W := \tilde{f}^{-1}(\mathcal{U}_i) \cap \tilde{f}'^{-1}(\mathcal{U}_i)$  est un ouvert de  $Y$  (autour  $y_0 \in Y$ ). Il suffit alors de montrer que  $W \subset C$ . Si  $y \in W$ , alors  $\tilde{f}(y) \in \mathcal{U}_i$  et  $\tilde{f}(y) = s_i(p(\tilde{f}(y))) = s_i(f(y))$ . De la même manière, on a  $\tilde{f}'(y) = s_i(f(y))$ . Ainsi,  $y \in C$ . On en déduit que  $W \subset C$ , i.e que  $C \subset Y$  est ouvert. Puisque  $C$  est un connexe non vide, on a  $C = Y$ .  $\square$

**Corollaire 1.4.1.** Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin, et  $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}' : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  deux relèvements de  $\gamma$ . Si  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}'(0)$ , alors  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}'$ .

**Théorème 1.4.1.** Soit  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement. On a les propriétés suivantes.

- (i) Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un chemin d'origine  $\gamma(0) = x$  et soit  $\tilde{x} \in p^{-1}(\{x\})$ . Alors, il existe un uniquement relèvement  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  de  $\gamma$  partant de  $\tilde{x}$ .
- (ii) Soit  $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  une application continue. Notons  $f = H(\cdot, 0) : Y \rightarrow X$ , et soit  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  un relèvement de  $f$ . Alors, il existe un unique  $\tilde{H} : Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  relèvement de  $H$  tel que  $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{f}$ .

*Démonstration.* Le second point implique le premier lorsque  $Y$  est un singleton. Montrons donc le second point. On le montre dans le cas où  $Y$  est localement connexe<sup>2</sup> (i.e que pour tout  $y \in Y$ ,  $y$  possède une base de voisinages connexes).

- *Unicité.* Soit  $\tilde{H}'$  un second relèvement de  $H$ . Soit  $C$  une composante connexe de  $Y$  et  $y \in C$ . On a  $\tilde{H}(y, 0) = \tilde{f}(y) = \tilde{H}'(y, 0)$ , donc  $\tilde{H}|_{C \times [0,1]} = \tilde{H}'|_{C \times [0,1]}$ . Puisque  $Y$  est l'union de ses composantes connexes, on en conclut que  $\tilde{H} = \tilde{H}'$ .
- *Existence.* On montre un lemme auxiliaire : pour tout  $y \in Y$ , il existe un voisinage ouvert de  $W_y \subset Y$  de  $y$  tel qu'il existe un relèvement  $\tilde{H}_y$  sur  $W_y \times [0, 1]$ , i.e que  $\tilde{H}_y : W_y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  est tel que  $p \circ \tilde{H}_y = H|_{W_y \times [0,1]}$ , et  $\tilde{H}_y(\cdot, 0) = \tilde{f}|_{W_y}$ . Une fois ce lemme démontré, l'existence est assurée.

En effet. Si  $\tilde{H}_{y_1}$  et  $\tilde{H}_{y_2}$  sont donnés par le lemme et  $W_{y_1} \cap W_{y_2} \neq \emptyset$ , alors si  $y \in W_{y_1} \cap W_{y_2}$ , on a  $\tilde{H}_{y_1}(y, 0) = \tilde{f}(y) = \tilde{H}_{y_2}(y, 0)$ , et  $\tilde{H}_{y_1}(y, \cdot)$  relève le chemin  $t \mapsto H(y, t)$ . Selon le lemme 1.4.1, les deux relèvements  $\tilde{H}_{y_1} = \tilde{H}_{y_2}$  sont égaux. Alors,  $\tilde{H}_{y_1} = \tilde{H}_{y_2}$  sur  $(W_{y_1} \cap W_{y_2}) \times [0, 1]$ . On peut définir  $\tilde{H}(y, t) := \tilde{H}_{y_0}(t)$  où  $y_0$  est tel que  $y \in W_{y_0}$  (car  $Y = \bigcup_{y \in Y} W_y$ ). Cette application est bien définie sur  $Y \times [0, 1]$ , et c'est le relèvement cherché.

Montrons maintenant le lemme auxiliaire. Soit  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  telle que  $H(\{y\} \times [t_j, t_{j+1}])$  est contenu dans un ouvert trivialisant  $V_j \subset X$  pour tout  $j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ . Il est clair que  $W_j \times [t_j, t_{j+1}] \subset H^{-1}(V_j)$ , où  $W_y \subset Y$  est un voisinage ouvert de  $y$ . Puisque  $Y$  est localement connexe, on peut supposer  $W_y$  connexe. On a  $p(\tilde{f}(y)) = f(y) = H(y, 0) \in H(W_y \times [t_0, t_1]) \subset V_0$ . Soit  $\mathcal{U}_0$  le feuillet contenant  $\tilde{f}(y)$  et  $s_0 : V_0 \rightarrow \mathcal{U}_0$  la section locale. On définit  $\tilde{H} = s_0 \circ H|_{W_y \times [t_0, t_1]}$ . On sait que  $H(W_j \times [t_1, t_2]) \subset V_1$ . Alors,  $\tilde{H}(W_y \times \{t_1\})$  est contenu dans un feuillet, disons  $\mathcal{U}_1$ . Soit  $s_1 : V_1 \rightarrow \mathcal{U}_1$  la section locale. Remarquons que  $V_0 \cap V_1$  est trivialisant et les deux feuillets

$$\mathcal{U}_1 \cap p^{-1}(V_0 \cap V_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_2 \cap p^{-1}(V_0 \cap V_1)$$

contiennent  $\tilde{H}(Y \times \{t_1\})$ . Il y a donc égalité et  $s_0|_{V_0 \cap V_1} = s_1|_{V_0 \cap V_1}$ . On définit  $\tilde{H} = s_1 \circ H|_{W_y \times [t_1, t_2]}$  (on vient de montrer que les deux  $\tilde{H}$  coïncident sur  $W_y \times \{y\}$ ). On obtient alors  $\tilde{H}$  sur  $W_y \times [t_0, t_2]$ . On continue ce raisonnement par récurrence, et on obtient à la  $N$ -ième étape  $\tilde{H}$  définie sur  $W_y \times [t_0, t_N] = W_y \times [0, 1]$ . □

**Remarque.** Ce théorème généralise les lemmes 1.2.5 et 1.2.6, qui avaient été étudiés dans le cas  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2\pi it}$ .

**Corollaire 1.4.2.** Soient  $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow X$  deux chemins allant de  $x$  à  $y$  et homotopes à extrémités fixées pour une homotopie  $H$ , et  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement. Soient  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\gamma}'$  les relèvements respectifs de  $\gamma$  et  $\gamma'$  d'origine un même point  $\tilde{x} \in p^{-1}(\{x\})$ . Alors, l'unique application  $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}$  telle que  $\tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{\gamma}$  et  $p \circ \tilde{H} = H$ , est une homotopie à extrémités fixées entre  $\tilde{\gamma}$  et  $\tilde{\gamma}'$ .

*Démonstration.* On a  $p \circ \tilde{H} = H$ , donc  $s \mapsto \tilde{H}(0, s)$  est un relèvement de  $s \mapsto H(0, s)$  (qui est constant égal à  $x$ ). Ainsi, l'application constante à  $\tilde{x}$  et  $s \mapsto \tilde{H}(0, s)$  coïncident. On a donc  $\tilde{H}(0, s) = \tilde{x}$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . De même,  $s \mapsto \tilde{H}(1, s)$  relève  $s \mapsto H(1, s)$  (qui est constant à  $y$ ), et donc doit être constant. Ainsi,  $\tilde{H}$  fixe les extrémités pour tout  $s \in [0, 1]$ . Finalement,  $t \mapsto \tilde{H}(t, 1)$  relève  $t \mapsto H(t, 1) = \gamma'(t)$  partant de  $x$ . Ainsi,  $t \mapsto \tilde{H}(t, 1)$  coïncide avec  $\tilde{\gamma}'(t)$ . □

2. C'est très souvent le cas dans nos applications.

## 1.4.3 Groupe fondamental de revêtements

**Proposition 1.4.2.** Soit  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  et  $x = p(\tilde{x})$ . Alors,

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$$

est injectif et son image est l'ensemble des  $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$  tels que l'unique relèvement de  $\gamma$  dans  $\tilde{X}$  partant de  $\tilde{x}$  est un chemin fermé.

*Démonstration.* Soit  $[\tilde{\gamma}] \in \ker p_*$ . Alors,  $p \circ \tilde{\gamma}$  est homotope à  $\{x\}$  via une homotopie à extrémités fixées  $H$ . Puisque  $H$  se relève à une homotopie à extrémités fixées entre  $\tilde{\gamma}$  et  $\{\tilde{x}\}$ , on  $[\tilde{\gamma}] = 1$ . Soit  $S$  l'ensemble des  $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$  tels que l'unique relèvement de  $\gamma$  dans  $\tilde{X}$  partant de  $\tilde{x}$  est un chemin fermé. Si  $[\gamma] \in S$ , alors  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  où  $\tilde{\gamma}$  est un lacet basé en  $\tilde{x}$ . On a donc  $[\gamma] = p_*[\tilde{\gamma}]$ . Si  $[\gamma] \in \text{Im } p_*$ , alors  $\gamma$  et  $p \circ \tilde{\gamma}$  sont homotopes à extrémités fixées et  $\tilde{\gamma}$  est un lacet de base  $\tilde{x}$ . Ainsi,  $[\gamma] = [p \circ \tilde{\gamma}] \in S$ . On a donc  $S = \text{Im } p_*$ . □

**Remarque.** Dans la proposition précédente, si  $\tilde{x}' \in p^{-1}(\{x\})$  et s'il existe  $\tilde{\eta}$  un chemin de  $\tilde{x}'$  à  $\tilde{x}$  dans  $\tilde{X}$  (par exemple si  $\tilde{X}$  est connexe par arcs), alors on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}') & \xrightarrow[\text{ad}_{\tilde{\eta}}]{\cong} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x) & \xrightarrow[\text{ad}_{\eta}]{\cong} & \pi_1(X, x) \end{array}$$

où  $\eta = p \circ \tilde{\eta}$  est un lacet en  $x$ .

**Proposition 1.4.3.** Soit  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  et  $x \in X$ . Soit  $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$  et  $\tilde{x} \in p^{-1}(\{x\})$ . L'action du groupe  $\pi_1(X, x)$  sur l'ensemble  $p^{-1}(\{x\})$  définie par

$$\tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(\{x\})$$

(où  $\tilde{\gamma}$  est l'unique relèvement de  $\gamma$  partant de  $\tilde{x}$ ) est une action à droite bien définie.

*Démonstration.* Exercice (voir TD). □

**Définition 1.4.4.** L'action de  $\pi_1(X, x)$  sur  $p^{-1}(\{x\})$  est appelée action de monodromie sur la fibre  $p^{-1}(\{x\})$ .

**Proposition 1.4.4.** Soit  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement où  $\tilde{X}$  est connexe par arcs. Soit  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  et  $x = p(\tilde{x})$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  le cardinal de  $p^{-1}(\{x\})$  (indépendant de  $x$ ). Alors,

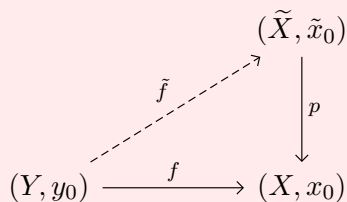
$$p^{-1}(x) \cong \pi_1(X, x) / \text{Im } p_*$$

En particulier,  $n = [\pi_1(X, x) : \text{Im } p_*]$ .

*Démonstration.* Exercice. □



**Théorème 1.4.2.** Soit  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$  un relèvement, et  $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x)$ . On suppose  $Y$  connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors,  $\text{Im } f_* \subset \text{Im } p_*$  si et seulement si  $f$  se relève en une application  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  qui envoie  $y_0$  sur  $\tilde{x}_0$ .



De plus,  $\tilde{f}$  — si elle existe, est unique. Enfin,  $f$  se relève toujours si  $Y$  est simplement connexe.

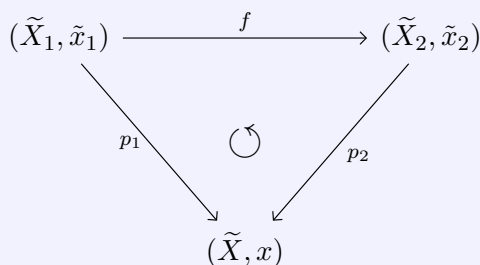
*Démonstration.*  $\Leftarrow$  Si  $\tilde{f}$  existe, alors  $f = p \circ \tilde{f}$  et donc  $\text{Im } f_* \subset \text{Im } p_*$ .

$\Rightarrow$  Supposons que  $\text{Im } f_* \subset \text{Im } p_*$ , et soit  $y \in Y$ . Pour définir  $\tilde{f}(y)$ , on choisit un chemin  $\gamma$  dans  $Y$  de  $y$  à  $y_0$ . Soit  $\tilde{\gamma}$  le relèvement dans  $\tilde{X}$  d'origine  $\tilde{x}_0$  du chemin  $f \circ \gamma$  (de  $x_0$  à  $f(y)$ ). On pose  $\tilde{f}(y) = \tilde{\gamma}(1) \in \tilde{X}$ . Montrons que ceci est bien défini. Soit  $\gamma'$  un autre chemin de  $y_0$  à  $y$ . Le lacet de base  $x_0$   $(f \circ \gamma) \cdot (f \circ \tilde{\gamma}')$  dans  $X$  est dans  $\text{Im } f_*$ , donc dans  $\text{Im } p_*$  (par hypothèse). Il se relève donc à un chemin fermé, mais  $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}'$  est un tel relèvement. Par unicité,  $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}'$  est un chemin fermé. Ainsi,  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}'(1)$ . On a donc montré que  $\tilde{f}(y)$  est bien défini (i.e indépendant du choix de  $\gamma$ ). Notons que  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$  (dans ce cas :  $\gamma = x_0$  et  $\tilde{\gamma} = \tilde{x}_0$ ), et  $p \circ \tilde{f}(y) = f(y)$ . Montrons maintenant que  $\tilde{f}$  est continue. Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage ouvert de  $\tilde{f}(y)$  égal à un feuillet de  $p$  au dessus de l'ouvert trivialisant  $V := p(\mathcal{U})$ . En particulier,  $f(y) \in V$ . Soit  $s : V \rightarrow \mathcal{U}$  la section locale associée. Soit  $W \subset Y$  un voisinage ouvert connexe par arcs de  $y$ . Puisque  $f$  est continue, on peut supposer que  $f(W) \subset V$ . Alors,  $W \subset \tilde{f}^{-1}(\mathcal{U})$ . En effet, si  $y' \in W$ , choisissons  $\gamma'$  un chemin dans  $Y$  de la forme  $\gamma' = \gamma \circ \gamma_1$  avec  $\gamma$  un chemin de  $y_0$  à  $Y$  et  $\gamma_1$  un chemin de  $y$  à  $y'$  dans  $W$  (car  $W$  est connexe par arcs). Pour calculer  $\tilde{f}(y')$ , soit  $\tilde{\gamma}$  le relèvement de  $f \circ \gamma$  (allant de  $x_0$  à  $f(y)$ ) et  $\tilde{\gamma}_1$  le relèvement de  $f \circ \gamma_1$  à  $\mathcal{U}$  de la forme  $s \circ f \circ \gamma_1$ . La concaténation  $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}'$  est l'unique relèvement de  $f \circ \gamma'$  d'origine  $\tilde{x}_0$ . Par définition,  $\tilde{f}(y') = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \in \mathcal{U}$ . On a donc montré que  $y' \in \tilde{f}^{-1}(\mathcal{U})$ , donc  $W \subset \tilde{f}^{-1}(\mathcal{U})$  et ainsi  $\tilde{f}^{-1}(\mathcal{U})$  est ouvert, ce qui montre la continuité de  $\tilde{f}$ . □

#### 1.4.4 Revêtement universel et dualité relativement à un sous-groupe

On spécialise le théorème précédent.

**Corollaire 1.4.3.** Soient  $p_i : (\tilde{X}_i, \tilde{x}_i) \rightarrow (X, x)$  pour  $i \in \{1, 2\}$  deux relèvements tels que  $\tilde{X}_1$  est connexe par arcs et localement connexe par arcs. Alors,  $\text{Im } p_{1*} \subset \text{Im } p_{2*}$  si et seulement s'il existe un unique diagramme commutatif comme suit.



*Démonstration.* Théorème précédent avec  $(Y, y_0) = (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ . □

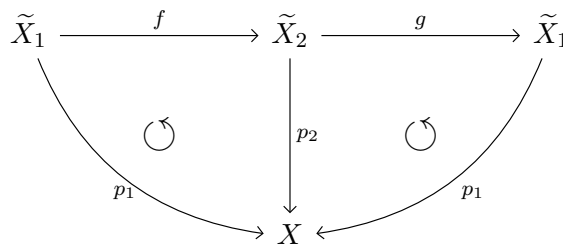
**Définition 1.4.5.** On dit que  $p_1$  et  $p_2$  sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme  $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$  faisant commuter le diagramme précédent.

**Remarque.** C'est une relation d'équivalence sur les relèvements pointés de  $(X, x)$ .

**Lemme 1.4.2.** Soient  $p_1$  et  $p_2$  connexes par arcs et localement connexes par arcs. Alors,  $p_1$  et  $p_2$  sont isomorphes si et seulement si  $\text{Im } p_{1*} = \text{Im } p_{2*}$ .

*Démonstration.*  $\Rightarrow$  Clair car  $p_1 = p_2 \circ f$ .

$\Leftarrow$  Grâce au corollaire 1.4.3, on obtient un relèvement  $f : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$  et  $g : \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1$ . Alors,  $\text{id}_{\tilde{X}_1}$  et  $g \circ f$  sont des relèvements de  $p_1$  qui coïncident à  $\tilde{x}_1$ . Ils coïncident donc partout, i.e  $\text{id} = f \circ g$ . De même,  $\text{id} = g \circ f$ . On a donc montré que  $f$  et  $g$  sont des homéomorphismes.



□

**Définition 1.4.6.** Un revêtement  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  qui est simplement connexe est dit être un revêtement universel de  $X$ .

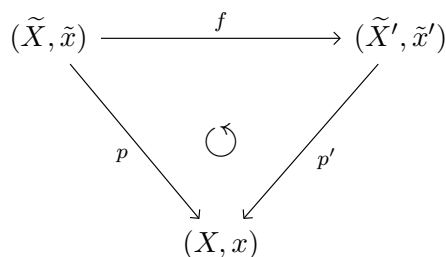
**Exemple.** Le revêtement  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto e^{2i\pi t}$  est universel.

**Rappels.**

- Un espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.
- Si  $X$  est localement connexe par arcs, toute composante connexe par arcs est ouverte.

**Remarques.**

- Soit  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un revêtement. Alors,  $X$  est localement connexe par arcs si et seulement si  $\tilde{X}$  est localement connexe par arcs.
- Si  $X$  est localement connexe par arcs, deux revêtements universels de  $X$  sont isomorphes (on peut donc parler du revêtement universel de  $X$ , par unicité à isomorphisme près).
- La terminologie “universel” vient du fait qu’on a une propriété universelle. Soit  $X$  un espace localement connexe par arcs et  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  le revêtement universel. Pour tout autre revêtement  $p'$ , il existe un unique diagramme commutatif



**Définition 1.4.7.**  $X$  est dit semi-localement simplement connexe si  $X$  est localement connexe par arcs, et si tout  $x \in X$  admet un voisinage (connexe par arcs) dont l'image est  $\{1\}$  dans  $\pi_1(X, x)$ .

**Exemple.** Un espace localement simplement connexe est semi-localement simplement connexe (par exemple localement contractile). Un exemple connexe par arcs, localement connexe par arcs mais pas semi-localement simplement connexe est la “boucle hawaïenne”.

**Théorème 1.4.3.** Soit  $X$  un espace connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Alors,  $X$  admet un revêtement universel.

**Remarque.** La condition “semi-localement simplement connexe” est aussi nécessaire pour l’existence.

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in X$ . Soit  $\tilde{X}$  l’ensemble

$$\{\gamma : [0, 1] \longrightarrow X \mid \gamma(0) = x_0\}$$

quotienté par la relation d’équivalence d’homotopie à extrémités fixées et soit l’application  $p : \tilde{X} \rightarrow X, [\gamma] \rightarrow \gamma(1)$ .

— *Topologie sur  $\tilde{X}$ .* Chaque  $x \in X$  possède une base de voisinages ouverts connexe par arcs  $\mathcal{U}$  tels que les  $\pi_1(\mathcal{U}) \rightarrow \pi_1(X)$  sont triviaux. On dit que  $\mathcal{U}$  est un “bon” voisinage. Soit  $\mathcal{U}$  bon,  $z \in \mathcal{U}$ , et  $\gamma$  un chemin de  $x_0$  à  $z$ . Soit  $\mathcal{U}_{[\gamma]}$  l’ensemble d’homotopie à extrémités fixées de chemins  $[\gamma \cdot \delta]$  avec  $\delta$  un chemin dans  $\mathcal{U}$  d’origine  $z$ . C’est un sous-ensemble de  $\tilde{X}$  qui ne dépend bien que de la classe de  $\gamma$ . Il possède trois propriétés.

- (i) Si  $\alpha$  est un chemin dans  $\mathcal{U}$  d’origine  $z$ , alors  $\mathcal{U}_{[\gamma \cdot \alpha]} = \mathcal{U}_{[\gamma]}$ .
- (ii) Si  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$  est bon et  $z \in \mathcal{U}'$ , alors  $\mathcal{U}'_{[\gamma]} \subset \mathcal{U}_{[\gamma]}$ .
- (iii) Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont deux chemins de  $x_0$  à  $z$ , alors  $\mathcal{U}_{[\gamma]} = \mathcal{U}_{[\gamma']}$  si  $\gamma \sim \gamma'$  à extrémités fixées, et  $\mathcal{U}_{[\gamma]} \cap \mathcal{U}_{[\gamma']} = \emptyset$  sinon (donc  $\mathcal{U}_{[\gamma]}$  ne dépend que de la classe de  $\gamma$ ).

Ces propriétés sont laissées en exercice.

Appelons un sous-ensemble  $W \subset \tilde{X}$  ouvert si  $W \in \{\emptyset, \tilde{X}\}$ , ou si  $W$  est une réunion de  $\mathcal{U}_{[\gamma]}$ . Une intersection finie de  $\mathcal{U}_{[\gamma]}$  non vide s’écrit comme une réunion de  $\mathcal{U}_{[\gamma]}$ . En effet, si  $[\gamma''] \in \mathcal{U}_{[\gamma]} \cap \mathcal{V}_{[\gamma']}$  alors selon (i), on a  $\mathcal{U}_{[\gamma]} = \mathcal{U}_{[\gamma']}$  et  $\mathcal{V}_{[\gamma']} = \mathcal{V}_{[\gamma']}$ . Soit  $W$  bon et contenant  $\gamma''(1)$  et contenu dans  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ . Alors selon (ii),  $W_{[\gamma'']} \subset \mathcal{U}_{[\gamma']} \cap \mathcal{V}_{[\gamma']}$ . Bilan : les  $\mathcal{U}_{[\gamma]}$  forment la base d’une topologie sur  $\tilde{X}$ .

Soit  $\mathcal{U}$  bon. L’application  $p|_{\mathcal{U}_{[\gamma]}} : \mathcal{U}_{[\gamma]} \rightarrow p(\mathcal{U}_{[\gamma]}) = \mathcal{U}$  est une bijection. En effet,  $\mathcal{U}$  est connexe par arcs. Si  $z \in \mathcal{U}$ , il existe un chemin  $\delta$  dans  $\mathcal{U}$  allant de  $z = \gamma(1)$  à  $z'$ . Alors,  $p([\gamma \delta]) = z'$ , donc  $\text{Im } p|_{\mathcal{U}_{[\gamma]}} = \mathcal{U}$ . Pour l’injectivité, soient  $[\gamma']$  et  $[\gamma''] \in \mathcal{U}_{[\gamma]}$  tels que

$\gamma'(1) = \gamma''(1) = z'$ . On a donc  $\gamma' \sim \gamma\delta$  et  $\gamma'' \sim \gamma\beta$  où  $\delta$  et  $\beta$  sont des chemins dans  $\mathcal{U}$ . Ainsi,  $\gamma' \sim \gamma''\bar{\beta}\delta$  donc  $\bar{\beta}\delta \sim \{z\}$  dans  $X$  (car  $\mathcal{U}$  est bon). De plus,  $\bar{\beta}\delta$  est un lacet basé en  $z'$  dans  $\mathcal{U}$ , donc  $\gamma' \sim \gamma''$ .

Soit  $\mathcal{U}$  bon. On a  $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{\gamma} \mathcal{U}_{[\gamma]}$  (où l'union est prise sur les chemins  $\gamma$  partant de  $x_0$  vers un point de  $\mathcal{U}$ ). L'inclusion " $\supset$ " est claire. Pour l'inclusion " $\subset$ ", si  $[\gamma] \in p^{-1}(\mathcal{U})$ , alors  $\gamma$  est un chemin de  $x_0$  partant de  $0$  à un point de  $\mathcal{U}$ , et donc  $[\gamma] = \mathcal{U}_{[\gamma]}$ . Enfin, selon la propriété (iii), la réunion  $\bigsqcup_{\gamma} \mathcal{U}_{[\gamma]}$  est disjointe.

L'application  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  est un revêtement. En effet, l'ensemble des  $\mathcal{U}$  bon constitue une base de la topologie de  $X$  (par définition), et  $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{\gamma} \mathcal{U}_{[\gamma]} \subset \tilde{X}$  est ouvert, donc  $p$  est continue. De plus, l'ensemble des  $\mathcal{U}_{[\gamma]}$  est aussi une base topologique de  $\tilde{X}$ , et  $p(\mathcal{U}_{[\gamma]}) = \mathcal{U}$ , donc  $p$  est ouverte. Enfin,  $p|_{\mathcal{U}_{[\gamma]}} : \mathcal{U}_{[\gamma]} \rightarrow \mathcal{U}$  est bijection continue et ouverte, donc est un homéomorphisme. Puisque  $p^{-1}(\mathcal{U}) = \bigsqcup_{\gamma} \mathcal{U}_{[\gamma]}$  et  $p|_{\mathcal{U}_{[\gamma]}} : \mathcal{U}_{[\gamma]} \rightarrow \mathcal{U}$  est un homéomorphisme,  $p$  est un revêtement et  $\mathcal{U}$  est trivialisant.

Il nous reste à montrer que  $\tilde{X}$  est simplement connexe. Soit  $\tilde{x}_0 = [x_0] \in \tilde{X}$  un point de base. Soit  $\tilde{x} = [\gamma] \in \tilde{X}$  un autre point. Considérons  $\gamma_s(t) = \gamma(ts)$  pour tout  $t, s \in [0, 1]$ , qui est une homotopie entre  $\{x_0\}$  et  $\gamma$ . En effet,  $\gamma_s(0) = x_0$  pour tout  $s \in [0, 1]$ , et  $[\gamma_s] \in \tilde{X}$ . Autrement dit, il existe une application  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ ,  $s \mapsto [\gamma_s]$  telle que  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$  et  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$ . C'est une application continue (donc un chemin). Soit  $\mathcal{U}_{[\gamma']}$  un voisinage contenant le point  $[\gamma_s]$ . En particulier,  $\gamma_s(1) = \gamma(s) \in \mathcal{U}$  et  $\gamma'$  est un chemin allant de  $x_0$  à un point de  $\mathcal{U}$ , et  $\gamma_s \sim \gamma'\alpha$  avec  $\alpha$  un certain chemin de  $\mathcal{U}$ . Puisque  $\gamma$  est continu et  $\gamma(s) \in \mathcal{U}$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $s$  tel que  $\gamma(V) \subset \mathcal{U}$ . Si l'on montre que  $\tilde{\gamma}(V) \subset \mathcal{U}_{[\gamma']}$ , on aura montré que  $\tilde{\gamma}$  est continue. Si  $s' \in V$ , alors  $\gamma_{s'} \sim \gamma'\alpha\beta$  où  $\beta = \gamma_{[s, s']}$  si  $s' \geq s$ . Le chemin  $\alpha\beta$  est dans  $\mathcal{U}$  car  $\beta$  est dans  $\mathcal{U}$ . Ainsi,  $[\gamma_{s'}] \in \mathcal{U}_{[\gamma']}$  donc  $\tilde{\gamma}(V) \subset \mathcal{U}_{[\gamma']}$ . Ainsi,  $[\gamma_{s'}] = \tilde{\gamma}(s)$  et donc  $\tilde{X}$  est connexe par arcs.

Enfin, on montre la simple connexité. Soit  $[\gamma] \in \text{Im } p_*$  avec  $\gamma$  un chemin dans  $X$  tel que  $\gamma(0) = x_0$ . Soit  $p$  le revêtement étudié et  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . L'unique relèvement de  $\gamma$  d'origine  $\tilde{x}_0$  est un chemin fermé. Or,  $\tilde{\gamma}(s) := [\gamma_s]$  est un relèvement d'origine  $\tilde{x}_0$  pour tout  $s \in [0, 1]$ , donc  $[\gamma_1] = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$ . Mais  $\gamma_1 = \gamma$  donc  $[\gamma] = \{x_0\}$ . Ainsi,  $\gamma$  est nullhomotope, et  $\text{Im } p_*$  est trivial. Or,  $p$  est un revêtement donc  $p_*$  est injectif. On en déduit que  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  est trivial. □

**Remarque.** Comme l'indique le lemme 1.4.2, il y a un lien fort entre les sous-groupes de  $\pi_1(X)$  et les revêtements de  $X$ .

**Théorème 1.4.4.** Soit  $X$  un espace connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, et  $x \in X$ . Soit  $C$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des revêtements pointés  $(X', x')$  et  $S$  l'ensemble des sous-groupes de  $\pi_1(X, x)$ . L'application  $p \mapsto \text{Im } p_*$  induit une bijection de  $C$  vers  $S$ . Si  $H$  et  $H'$  sont deux sous-groupes de  $\pi_1(X, x)$ , alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{X}_H, \tilde{x}') & \xrightarrow{f} & (\tilde{X}_{H'}, \tilde{x}'') \\
 & \searrow p_H & \swarrow p_{H'} \\
 & & (X, x)
 \end{array}$$

si et seulement si  $H \subset H'$ .

Démonstration. Admis. □

### 1.4.5 Actions de groupes

On conclut ce chapitre avec un lien avec les actions de groupe. Soit  $Y$  un espace topologique avec une action topologique (à gauche)  $G \times Y \rightarrow Y$  d'un groupe  $G$ , i.e que les applications  $g : Y \rightarrow Y$  sont des homéomorphismes<sup>3</sup>.

L'action est dite *errante* si pour tout point  $y \in Y$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $y$  tel que  $g\mathcal{U} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$  pour tout  $g \neq 1$ . En particulier, une telle action est *libre*, i.e que  $\text{stab}_G(y) = \{1\}$  pour tout  $y \in Y$ .

On dit que l'action est une *action de revêtement* si, en plus, étant donnés deux points  $x, y \in Y$  qui ne sont pas dans la même  $G$ -orbite ( $\{x\} \cap Gy = \emptyset$ ), il existe des voisinages  $U$  et  $V$  respectifs de  $x$  et  $y$  tels que  $U \cap GV = \emptyset$ .

**Théorème 1.4.5.** *Si un groupe  $G$  agit sur un espace  $Y$  connexe par arcs par action de revêtement. Alors,  $Y/G$  (l'espace des orbites) est séparé, et l'application quotient*

$$p : \begin{array}{l} Y \longrightarrow Y/G \\ y \longmapsto Gy \end{array}$$

*est un revêtement. Si  $\bar{\gamma} \in Y/G$  et  $y \in p^{-1}(\bar{\gamma})$ , alors  $p_*\pi_1(Y, y) \subset \pi_1(Y/G, \bar{\gamma})$  est un sous-groupe normal. Puisque l'action de  $G$  est libre, on a un isomorphisme de groupes*

$$G \cong \pi_1(Y/G, \bar{\gamma})/p_*\pi_1(Y, y).$$

*Démonstration.*  $Y/G$  est séparé. En effet, si  $\bar{x} \neq \bar{y}$  dans  $Y/G$ , alors  $\{x\} \cap Gy = \emptyset$ . Il existe donc  $U$  et  $V \subset Y$  des ouverts tels que  $x \in U$ ,  $y \in V$ , et  $U \cap GV = \emptyset$ . Ainsi,  $\bar{u} \in p(U)$ ,  $\bar{v} \in p(V)$ , et  $p(U) \cap p(V) = \emptyset$ . Enfin,  $p(U)$  et  $p(V)$  sont ouverts car

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

et  $g$  agit par homéomorphisme. De même,  $p(V)$  est ouvert.

Montrons que  $p$  est un revêtement. L'action étant errante, si  $\bar{c} \in Y/G$ , alors il existe  $\mathbb{U} \subset Y$  un voisinage ouvert de  $y$  tel que  $g\mathbb{U} \cap \mathbb{U} = \emptyset$  pour tout  $g \neq 1$ . En particulier,

$$p(U) = \bigcup_{u \in U} \bar{u} \ni \bar{y}.$$

Soit  $V = p(U)$ . C'est un ouvert de  $Y/G$  qui contient  $\bar{y}$ . Ainsi,

$$p^{-1}(V) = p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU = \bigsqcup_{g \in G} gU.$$

L'union est bien disjointe car  $gU \cap U = \emptyset$  si  $g \neq 1$ . En effet, si l'on a  $gU \cap hU \neq \emptyset$ , alors  $h^{-1}gU \cap U \neq \emptyset$  et donc  $g = h$ .

De plus,  $p|_{gU} : gU \rightarrow V$  est une bijection continue ouverte. Elle est bien ouverte si  $W \subset gU$  est ouvert, alors  $p^{-1}(p(W)) = gU \cap (\bigcup_{h \in G} hW)$  est un ouvert contenu dans  $gU$ . On a donc montré que  $p$  est un revêtement.

Soit désormais  $\bar{\gamma} \in Y/G$  et  $y \in p^{-1}(\bar{\gamma})$ . Montrons que  $\text{Im } p_* \subset \pi_1(Y/G, \bar{\gamma})$ . Soit  $[\gamma] \in \pi_1(Y/G, \bar{\gamma})$ . Soit  $\tilde{\gamma}$  le relèvement de  $\gamma$  tel que  $\tilde{\gamma}(0) = y$ . On a  $p(y) = \bar{\gamma} = p(\tilde{\gamma}(1))$ . Il existe donc  $g \in G$  tel que  $g \cdot y = \tilde{\gamma}(1)$  ( $G$  agit transitivement sur  $p^{-1}(\bar{\gamma}) = Gy$ ). Alors, si  $\tilde{y} := \tilde{\gamma}(1)$ ,

3. On parle simplement d'action, puisque que tout est considéré continu dans ce cours.

$$\begin{aligned}
 [\gamma]^{-1}p_*\pi_1(Y, y)[\gamma] &= p_*(\pi_1(Y, gy)) \\
 &= p_*(g_*(\pi_1(Y, y))) \\
 &= (p \circ g)_*\pi_1(Y, y) \\
 &= p_*\pi_1(Y, y),
 \end{aligned}$$

car  $g_* : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(Y, gy)$  est un isomorphisme de groupes, et car on a utilisé le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (Y, y) & \xrightarrow{f} & (Y, gy) \\
 & \searrow p & \swarrow p \\
 & & (Y/G, \bar{y})
 \end{array}$$

On en déduit que  $p_*\pi_1(Y, y)$  est normal.

Avant de montrer que  $G \cong \pi_1(Y/G)/\text{Im } p_*$ , on note quelques remarques. Premièrement,  $p^{-1}(\bar{y}) = \bigsqcup_{g \in G} \{gy\}$  est disjoint car l'action de  $G$  est libre. En effet, si  $gy = g'y$ , alors  $g^{-1}g' \in \text{stab}(y)$  et donc  $g = g'$ . Ainsi,  $G$  et  $p^{-1}(\bar{y})$  sont en bijection. Autrement dit,  $G$  agit simplement transitivement sur  $p^{-1}(\bar{y})$ . Soit  $[\gamma] \in \pi_1(Y/G, \bar{y})$ . Avec la notation de l'action (à droite) de monodromie, il existe un unique  $g \in G$  tel que  $gy = y \cdot [\gamma]$  (on rappelle que  $y \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$  où  $\tilde{\gamma}$  est l'unique relèvement de  $\gamma$  d'origine  $y$ ). On définit l'application

$$h : \begin{array}{l} \pi_1(Y/G, \bar{y}) \longrightarrow G \\ [\gamma] \longmapsto g. \end{array}$$

On va montrer que  $h$  est un morphisme de groupe surjectif de noyau  $\ker h = \text{Im } p_*$ . Par définition de  $h$ , on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(Y/G, \bar{y}) & \xrightarrow{\quad} & p^{-1}(\bar{y}) \\
 & \searrow h & \swarrow \cong \\
 & & (Y/G, \bar{y})
 \end{array}$$

Ainsi,  $h$  est surjectif. Montrons maintenant que  $h$  est un morphisme de groupes. Soit  $\gamma, \gamma'$  des lacets de base  $\bar{y}$  et  $\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'$  leurs relèvements respectifs d'origine  $y$ . Soient  $g, g' \in G$  tels que  $gy = \tilde{\gamma}(1)$  et  $g'y = \tilde{\gamma}'(1)$ . En particulier,  $h[\gamma] = g$  et  $h[\gamma'] = g'$  (par définition de  $h$ ). Puisque  $\tilde{\gamma}(g \cdot \tilde{\gamma}')$  est le relèvement de  $\gamma\gamma'$  d'origine  $y$ , on a  $h[\gamma\gamma'] = \tilde{\gamma}(g \cdot \tilde{\gamma}')(1) = g(\tilde{\gamma}'(1)) = g(g'y) = (gg')y$ . On a donc  $h[\gamma\gamma'] = gg' = h[\gamma]h[\gamma']$ . Selon le diagramme commutatif, on a montré que  $[\gamma] \in \ker h$  si et seulement si  $y \cdot [\gamma] = y$ , si et seulement si  $[\gamma] \in \text{Im } p_*$ . Ainsi,  $\ker h = \text{Im } p_*$ . □

**Corollaire 1.4.4.** Avec les hypothèses du théorème précédent, si  $Y$  est simplement connexe, alors

$$G \cong \pi_1(Y/G, \bar{y}).$$

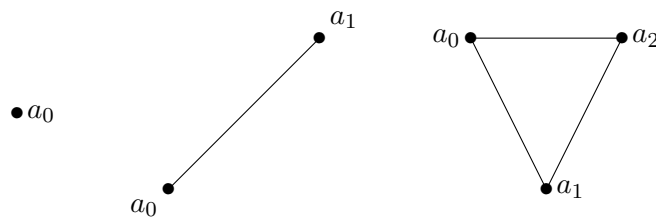


FIGURE 1.7 – De gauche à droite : un 0-simplex, un 1-simplex, et un 2-simplex.

**Exemple.**  $\mathbb{Z}$  opère librement sur  $\mathbb{R}$  via l'action définie par  $a \cdot x = a + x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{Z}$ . C'est une action de revêtement (exercice). En appliquant le théorème précédent, il est clair que

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})/p_*\pi_1(\mathbb{R}) = \pi_1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Le théorème fournit donc une démonstration alternative du fait que  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ .

## 1.5 Homologie simpliciale

L'homologie d'un espace<sup>4</sup> est une construction d'invariants (typiquement des groupes abéliens) qu'on associe à cet espace. On commence par l'homologie la plus simple (pour les calculs) : l'homologie simpliciale.

## 1.6 Complexes simpliciaux

Soit  $N \geq 1$  (généralement un nombre très grand).

**Définition 1.6.1.** Soit  $n \geq 0$ . Un  $n$ -simplexe (ou simplexe de dimension  $n$ ) dans  $\mathbb{R}^N$  est l'enveloppe convexe de  $n + 1$  points  $a_0, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^N$  en position générale, i.e que les  $n$  vecteurs  $\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n}$  sont  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants. Les  $a_0, \dots, a_n$  sont les sommets du simplexe.

Un simplexe ordonné est la donnée d'un simplexe et d'un ordre total sur les sommets. On le note  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ .

**Définition 1.6.2.** Soit  $(x_0, \dots, x_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On appelle  $n$ -simplexe standard  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  le  $n$ -simplexe donné par la famille  $(x_0, \dots, x_n)$ , i.e

$$\Delta^n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

On parle aussi du  $n$ -simplexe standard ordonné  $[x_0, \dots, x_n]$ .

**Remarque.** Pour tout  $n$ -simplexe ordonné  $[a_0, \dots, a_n]$ , il existe une application affine  $f : \Delta^n \rightarrow [a_0, \dots, a_n]$  telle que  $f(x_i) = a_i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et qui est un homéomorphisme. En particulier, les  $n$ -simplexes ordonnés sont homéomorphes à  $\Delta^n$ .

4. Il existe plusieurs types d'homologie : simpliciale, singulière, ...

**Définition 1.6.3** (faces d'un simplexe). *On appelle faces du simplexe  $[a_0, \dots, a_n]$  les complexes  $[a_{i_0}, \dots, a_{i_k}]$  (avec l'ordre induit) avec  $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$  avec  $k \geq 0$ .*

**Remarques.**

- Il y a  $2^{n+1} - 1$  face car l'ensemble n'est pas un simplexe<sup>5</sup>
- Pour  $n \geq 1$ , il y a  $n + 1$  faces de codimension 1 obtenues en enlevant un des  $a_i$  (noté  $[a_0, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n]$ ).

**Définition 1.6.4** (bord et intérieur d'un simplexe). *On appelle bord d'un  $n$ -simplexe  $\Delta$  la réunion de ses faces de codimension 1, notée  $\partial\Delta$ . On appelle intérieur de  $\Delta$  l'ensemble*

$$\overset{\circ}{\Delta} = \Delta \setminus \partial\Delta.$$

On introduit maintenant la classe d'espaces pour laquelle on dispose d'une homologie "simpliciale".

**Définition 1.6.5.** *Un complexe simpliciale fini  $X$  est un ensemble fini de simplexes de  $\mathbb{R}^N$  ordonnés tels que*

- (i) *si  $\sigma \in X$ , toutes les faces (avec l'ordre induit) sont éléments de  $X$  ;*
- (ii) *si  $\sigma, \tau \in X$  sont tels que  $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ , alors  $\sigma \cap \tau$  est une face de  $\sigma$  et de  $\tau$  et les ordres induits par (les sommets de)  $\sigma$  et  $\tau$  coïncident.*

*La réalisation géométrique  $|X|$  de  $X$  est la réunion dans  $\mathbb{R}^N$  des simplexes de  $X$ , i.e que*

$$|X| = \bigcup_{\sigma \in X} \sigma \subset \mathbb{R}^N$$

*avec la topologie induite de  $\mathbb{R}^N$ .*

**Remarque.**  $|X|$  est un CW-complexe. On appelle *dimension* de  $X$  la dimension maximale d'un simplexe contenu dans  $X$ .

**Exemples.**

- Dans la figure 1.8a,  $X$  possède cinq sommets, six arêtes, et un triangle qu'on note  $\Delta$ . La dimension de  $X$  est de 2 (c'est la dimension de  $\Delta$ ). On a  $\partial\Delta = [a, c] \cup [b, c] \cup [a, b]$ .
- En figure 1.8b considère  $X$  le complexe simpliciale à une arête et un sommet. On a alors  $|X| \cong \mathbb{S}^1$ .

### 1.6.1 Homologie simpliciale

Le but est de définir l'homologie simpliciale pour un complexe simplicial  $X$ .

---

5. Du moins dans notre étude.



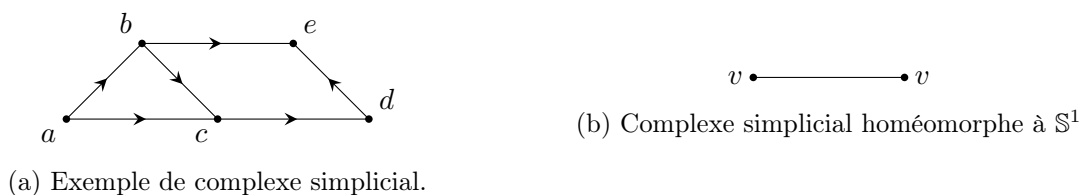


FIGURE 1.8

**Définition 1.6.6.** Une chaîne simpliciale de dimension  $n$  (ou un  $n$ -chaîne) est une somme formelle finie de  $n$ -simplexes ordonnés

$$\sum_{\substack{\sigma \in X \\ \dim \sigma = n}} k_\sigma \sigma$$

avec  $k_\sigma \in \mathbb{Z}$  pour tout  $\sigma \in \mathbb{Z}$ . On note  $C_n^\Delta(X)$  l'ensemble des  $n$ -chaînes simpliciales.

**Remarque.**  $C_n^\Delta(X)$  est le  $\mathbb{Z}$ -module libre dont une base est la famille de  $n$ -simplexes dans  $X$ . Autrement dit,

$$C_n^\Delta(X) = \bigoplus_{\substack{\sigma \in X \\ \dim \sigma = n}} \mathbb{Z}\sigma.$$

On va montrer que  $C_n^\Delta(X)$  est trivial s'il n'y a pas de simplexe de dimension  $n$  dans  $X$ .

**Exemple.** Dans le dernier exemple de la sous-section précédente, on a les observations et exemples suivants.

- $7[a, b, c]$  est une 2-chaîne, élément de  $C_2^\Delta(X)$ .
- $8[a, b] - 13[d, e] + 6[b, c]$  est une 1-chaîne.
- $[c, e]$  n'est pas une 1-chaîne ( $[c, e]$  n'est pas un simplexe dans  $X$ ).

Soit  $[a_0, \dots, a_n] \subset \mathbb{R}^N$ . Son bord est la réunion

$$\bigcup_{i=0}^n [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n]$$

qu'on voit comme une  $n - 1$ -chaîne. On met un signe  $(-1)^i$  pour tenir compte de l'orientation et on a

$$\partial[a_0, \dots, a_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n] \in C_{n-1}^\Delta(X).$$

**Exemples.**

- En figure 1.9a, on a  $\partial[a_0, a_1] = [a_1] - [a_0]$ .
- En figure 1.9b, on  $\partial[a_0, a_1, a_1] = [a_1, a_2] - [a_0, a_2] + [a_0, a_1]$ .

Cette définition s'étend par linéarité à toute chaîne.



FIGURE 1.9

**Définition 1.6.7.** On définit le morphisme bord  $\partial_n^\Delta : C_n^\Delta(X) \longrightarrow C_{n-1}^\Delta(X)$  comme l'application  $\mathbb{Z}$ -linéaire définie sur la base par

$$\partial[a_0, \dots, a_n] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n] \in C_{n-1}^\Delta(X).$$

Autrement dit, on a

$$\partial_n^\Delta \left( \sum_{\substack{\sigma \in X \\ \dim \sigma = n}} k_\sigma \sigma \right) = \sum_{\substack{\sigma \in X \\ \dim \sigma = n}} k_\sigma \partial_n^\Delta(\sigma).$$

Enfin, on pose  $\partial_0^\Delta = 0$ . L'application  $\partial_n^\Delta$  est un morphisme de groupes.

**Définition 1.6.8.** Un cycle dans  $C_n^\Delta(X)$  est un chaîne dont le bord est nul. On note  $Z_n^\Delta = \ker \partial_n^\Delta \subset C_n^\Delta(X)$  le sous-espaces des cycles de dimension  $n$ . Un bord dans  $C_n^\Delta(X)$  est une chaîne qui peut s'écrire comme le bord d'une chaîne dans  $C_{n+1}^\Delta$ . On note  $B_n^\Delta = \text{Im } \partial_{n+1}^\Delta \subset C_n^\Delta(X)$  le sous-groupe des bords de dimension  $n - 1$ .

**Exemple.** Soit  $X$  le complexe simplicial donné par la figure 1.8a, on a les exemples suivants.

—  $[b, c] + [c, d] + [d, e] - [b, e] \in C_1^\Delta(X)$  est un cycle. Son bord

$$[c] - [b] + [d] - [e] + [e] - [d] - ([e] - [b]) = 0.$$

—  $[e] - [a] \in C_1^\Delta(X)$  est un bord. En effet,

$$\partial([a, b] + [b, e]) = [e] - [a].$$

**Proposition 1.6.1.** On a  $\partial_{n-1}^\Delta \circ \partial_n^\Delta = 0$  pour tout  $n \geq 1$ . Autrement dit,  $B_n^\Delta \subset Z_n^\Delta$  pour tout  $n \geq 1$ .

*Démonstration.* On montre ce fait sur la base de  $C_n^\Delta(X)$ . Soit  $[a_0, \dots, a_n] \in C_n^\Delta(X)$ . On a

$$\begin{aligned}
 \partial_{n-1}^\Delta(\partial_n^\Delta[a_0, \dots, a_n]) &= \partial_{n-1}^\Delta \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n] \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_{n-1}^\Delta [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n] \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sum_{\substack{j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket \\ j < i}} (-1)^j [a_0, \dots, \widehat{a}_j, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n] \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j > i} (-1)^{j-1} [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_n].
 \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j > i} (-1)^{j-1} [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_n] = - \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j > i} (-1)^j [a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_n].$$

Ainsi, les deux termes se compensent. □

Cette propriété montre qu'on dispose d'un complexe  $(C_n^\Delta(X), \partial_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au sens suivant.

**Définition 1.6.9.** *Un complexe de chaînes  $(C_n, \partial_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la donnée d'une suite des  $\mathbb{Z}$ -modules  $C_n$  (non nécessairement libre) muni de morphismes*

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

tels que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On définit  $B_n = \text{Im } \partial_{n+1}$  et  $Z_n = \ker \partial_n$  (donc  $B_n \subset Z_n$ ). Le  $n$ -ième groupe d'homologie du complexe  $(C_k, \partial_k)_k$  (pour  $n \geq 0$ ) est le groupe

$$H_n(C, \partial) = Z_n / B_n.$$

Ses éléments sont les classes d'homologie de dimension  $n$ .

**Définition 1.6.10.** *Soit  $X$  un complexe simplicial. Les groupes d'homologies simpliciales de  $X$  sont les groupes*

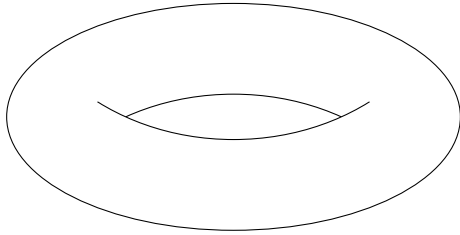
$$H_n^\Delta(X) = Z_n^\Delta / B_n^\Delta$$

pour  $n \geq 0$ . Autrement dit, ce sont les groupes d'homotopies associés au complexe  $(C^\Delta(X), \partial^\Delta)$ .

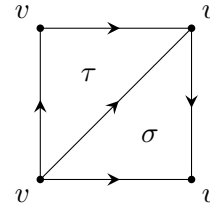
**Remarque.** Si  $\dim X = n$ , alors  $C_m^\Delta(X) = \{0\}$  pour tout  $m > n$ . On a donc  $Z_m^\Delta = \{0\}$  et  $H_m^\Delta = \{0\}$  pour tout  $m > n$ .

**Exemples.**

- Soit  $X$  le complexe simplicial “ $\mathbb{S}^1$ ” composé d'un sommet  $v$  et d'une arête  $a$  (figure 1.8b). On a  $C_0 = \mathbb{Z}v \cong \mathbb{Z}$ ,  $C_1 = \mathbb{Z}a \cong \mathbb{Z}$ , et  $C_n = \{0\}$  pour tout  $n \geq 2$ . On a  $H_0 = Z_0 / B_0 \cong \mathbb{Z}$  et  $H_1 = Z_1 / B_1 \cong \mathbb{Z}$ .



(a) Réalisation géométrique du complexe “ $\mathbb{T}^2$ ”



(b) Complexe simplicial du tore “ $\mathbb{T}^2$ ”.

FIGURE 1.10

- Soit  $X = \Delta^2$ . On peut montrer que  $H_0^\Delta = \mathbb{Z}$  et  $H_n^\Delta = \{0\}$  pour tout  $n \geq 1$ .
- Soit  $X$  le complexe simplicial “ $\mathbb{T}^2$ ” (voir figure 1.10). On a

$$H_n^\Delta(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n \in \{0, 2\}, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

**Théorème 1.6.1.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux complexes simpliciaux tels que  $|X| \cong |Y|$ , alors  $H_n^\Delta(X) \cong H_n^\Delta(Y)$  pour tout  $n \geq 0$ .

*Démonstration.* Plus tard si on a le temps. □

### 1.6.2 Nombres de BETTI et caractéristiques d’EULER

Soit  $X$  un complexe simplicial. Pour tout  $n \geq 0$ , on note  $k_n$  le nombre de complexes de dimension  $n$  dans  $X$ .

**Définition 1.6.11.** On appelle caractéristique d’EULER (ou caractéristique d’EULER-POINCARÉ) de  $X$  l’entier

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n k_n.$$

**Exemple.** Si  $X$  est un graphe fini connexe, alors  $\chi(X)$  est le nombre de sommets moins le nombre d’arêtes. En particulier,  $\chi(X) = 1$  si et seulement si  $X$  est un arbre (exercice).

On va interpréter  $\chi$  en terme de dimension (ou rang) en homologie.

**Rappel.** Soit  $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module de type fini. Alors, on peut écrire  $M \cong \mathbb{Z}^r \oplus T$  où  $T$  est de cardinal fini (groupe de torsion). On appelle l’entier  $r$  le rang de  $M$  (noté  $\text{rg}(M)$ ).

**Lemme 1.6.1.** Soit  $N \subset M$  un sous-module. Alors,  $N$  et  $M/N$  sont de types finis et  $\text{rg}(M/N) = \text{rg}(M) - \text{rg}(N)$ .

**Rappel.** Soit  $S$  un ensemble. On note  $\mathbb{Z}S$  le groupe abélien libre engendré par  $S$ . On a en fait

$$\mathbb{Z}S = \left\{ \sum_{s \in S} a_s s \mid (a_s)_s \in \mathbb{Z}^{(S)} \right\}$$

( $\mathbb{Z}$ -module de sommes formelles (finies) d'éléments de  $S$ ).

**Exemples.**

- $S = (X_n)_{n \geq 0}$ , alors  $\mathbb{Z}S = \mathbb{Z}[X]$ .
- Soit  $X$  un complexe simplicial,  $n \geq 1$ , et  $S$  l'ensemble des simplexes de  $X$  de dimension  $n$ . On a alors

$$\mathbb{Z}S = C_n^\Delta(X) = \bigoplus_{\substack{\sigma \in X \\ \dim \sigma = n}} \mathbb{Z}\sigma.$$

**Définition 1.6.12.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le rang de  $H_n^\Delta(X)$  s'appelle le  $n$ -ième nombre de BETTI, et se  $\beta_n(X)$ .

**Théorème 1.6.2.** On a égalité suivante.

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \beta_n(X).$$

*Démonstration.* Conséquence du lemme général suivant. □

**Lemme 1.6.2.** Soit

$$\cdots \rightarrow C_N \xrightarrow{\partial_N} C_{N-1} \xrightarrow{\partial_{N-1}} \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

un complexe de chaînes de modules de type fini. Alors,

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \operatorname{rg}(C_n) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \operatorname{rg}(H_n(C)).$$

*Démonstration.* On applique le lemme 1.6.1 à

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \xrightarrow{\partial_n} H_n(C) \rightarrow 0.$$

On a alors

$$\operatorname{rg}(B_{n-1}) + \operatorname{rg}(Z_{n-1}) = \operatorname{rg}(C_n)$$

(en convenant que  $B_{-1} := \{0\}$ ) et

$$\operatorname{rg}(Z_n) - \operatorname{rg}(B_n) = \operatorname{rg}(H_n(C))$$

pour tout  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$  (car  $B_N = \{0\}$ ). On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (-1)^n \operatorname{rg}(C_n) &= \sum_{n=0}^N (-1)^n [\operatorname{rg}(B_{n-1}) + \operatorname{rg}(Z_n)] \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^n \operatorname{rg}(Z_n) + \sum_{n=-1}^{N-1} (-1)^{n+1} \operatorname{rg}(B_n) \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^n [\operatorname{rg}(Z_n) - \operatorname{rg}(B_n)] \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^n \operatorname{rg}(H_n(C)). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.6.1.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux complexes simpliciaux. Si  $|X|$  et  $|Y|$  sont homéomorphes, alors*

$$\chi(X) = \chi(Y).$$

*La caractéristique d'EULER-POINCARÉ est un invariant topologique.*

*Démonstration.* Si  $|X| \cong |Y|$ , alors  $H_n^\Delta(X) \cong H_n^\Delta(Y)$  pour tout  $n \geq 0$ . Ainsi,  $\beta_n(X) = \beta_n(Y)$  pour tout  $n \geq 0$ . On a alors

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \beta_n(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \beta_n(Y) = \chi(Y).$$

□

### 1.6.3 Plus d'algèbre homologique

**Définition 1.6.13.** *Un morphisme  $f : C \rightarrow C'$  de deux complexes de chaînes est la donnée d'une suite de morphismes  $(f_n)_n \in \mathbb{N}$  telle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\partial_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$ .*

**Lemme 1.6.3.** *Un morphisme  $f : C \rightarrow C'$  induit des morphismes*

$$H_n(f) : H_n(C) \rightarrow H_n(C')$$

*pour tout  $n \geq 0$ . Ces morphismes sont fonctoriels : pour tout  $n \geq 0$ ,  $f : C \rightarrow C'$  et  $g : C' \rightarrow C''$  des morphismes de chaînes,*

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f),$$

*et  $H_n(\operatorname{id}_{C_n}) = \operatorname{id}_{H_n(C)}$ .*

*Démonstration.* Exercice.

□

**Définition 1.6.14.** On dit qu'une suite

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

de  $\mathbb{Z}$ -module est exacte à  $B$  si  $\ker g = \text{Im } f$ .

**Exemples.**

— Une suite exacte courte est une suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

exacte partout (i.e en  $A$ , en  $B$ , et en  $C$ ). Cela signifie que  $f$  est injectif,  $\text{Im}(f) = \ker(g)$ , et  $g$  est surjectif.

— Une suite de complexe de chaîne  $C$  est exact en un  $C_n$  (avec  $n \geq 0$ ) si  $H_n(C) = \{0\}$ .

**Définition 1.6.15.** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des complexes de chaînes. Une suite exacte courte de complexes de chaînes est la donnée de morphismes

$$f : A \rightarrow B \quad \text{et} \quad g : B \rightarrow C$$

telle que la suite

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f_n} B \xrightarrow{g_n} C \rightarrow 0$$

est exacte pour tout  $n \geq 0$ .

**Proposition 1.6.2.** Soit

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

une suite exacte courte. Alors, pour tout  $n \geq 1$ , il existe un morphisme

$$\delta_n : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$$

(appelé connectant) tel qu'on ait une suite exacte "longue" en homologie, i.e

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On construit  $\delta_n : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ .

- (i) On fixe  $[c] \in H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$ .
- (ii) Par surjectivité, il existe  $b \in B_n$  tel que  $g_n(b) = c$ .
- (iii) Puisque  $c$  est un cycle, on a

$$0 = \partial_n c = \partial_n g_n(b) = g_{n-1} \partial_n(b).$$

Soit alors  $b' \in \ker g_{n-1}$ .

- (iv) La suite est exacte, il existe donc  $a' \in A_{n-1}$  tel que  $f_{n-1}(a') = b'$ .
- (v) On remarque que  $a'$  est un cycle. En effet,

$$f_{n-2} \partial_{n-1}(a') = \partial_{n-1} f_{n-1}(a') = \partial_{n-1}(b') = \partial_{n-1} \partial_n(b) = 0.$$

Par injectivité de  $f_{n-2}$ , on a  $\partial_{n-1}(a') = 0$ . On définit donc  $\delta_n[c] := [a'] \in H_{n-1}(A)$ . En résumé,  $a'$  est défini par le "serpent" suivant.

Pour montrer que  $\delta_n$  est bien défini, il suffit de voir que si  $c$  est un bord, alors  $a'$  est aussi un bord. Si  $c = \partial_{n+1}\hat{c}$  avec  $\hat{c} \in C_{n+1}$ , on relève  $\hat{c}$  en  $\hat{b} \in B_{n+1}$  par surjectivité de  $g_{n+1}$ . On a alors

$$g_n(b - \partial_{n+1}\hat{b}) = c - g_n\partial_{n+1}\hat{b} = c - \partial_{n+1}g_{n+1}(\hat{b}) = c - \partial_{n+1}\hat{c} = c - c = 0.$$

On a  $b - \partial_{n+1}\hat{b} \in \ker g_n$  et  $b - \partial_{n+1}\hat{b} = f_n(a)$ . On a donc

$$\mathcal{F}_{n-1}(\partial_n a) = \partial_n f_n(a) = \partial_n(b - \partial_{n+1}\hat{b}) = \partial_n b = b' = f_{n-1}(a').$$

On a donc  $\partial_n a = a'$  et donc  $a' \in B_{n-1}(A)$ .

La construction du serpent montre que  $\partial_n$  est  $\mathbb{Z}$ -linéaire. Il reste à voir que la suite longue exacte à chaque maillon. Il existe trois cas à considérer (exactitude à  $H_n(A)$ , à  $H_n(B)$ , et à  $H_n(C)$ ).  $\square$

**Proposition 1.6.3.** *On considère deux suites exactes courtes de complexes de chaînes, avec des morphismes de l'une vers l'autre*

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{(exacte)} & 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ \text{(exacte)} & 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de sorte que les carrés soient tous deux commutatifs. Alors, un diagramme "long"

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(B) & \xrightarrow{g_*} & H_n(C) & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_{n-1}(C') & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & H_n(A') & \xrightarrow{f'_*} & H_n(B') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(C') & \xrightarrow{\delta'_n} & H_{n-1}(A') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

où tous les carrés commutent.

*Démonstration.* Exercice (il suffit de montrer la commutatif dans le premier et le dernier carré).  $\square$



## Chapitre 2

# Homologie singulière

Soit  $X$  un espace topologique arbitraire. On va définir ses groupes d'homologie singulière.

### 2.1 Définition de groupes d'homologie

**Définition 2.1.1.** *Un  $n$ -simplexe singulier de  $X$  est une application continue  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  où  $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est le  $n$ -simplexe standard. Une  $n$ -chaîne singulière est un élément du  $\mathbb{Z}$ -module libre*

$$C_n(X) = \bigoplus_{\substack{\sigma \\ n\text{-simplexe} \\ \text{singulier}}} \mathbb{Z}\sigma.$$

#### Exemples.

- Un 0-simplexe singulier est un point de  $X$ .
- Un 1-simplexe singulier est un chemin dans  $X$  (potentiellement constant).

**Remarque.** L'expression "simplexe singulier" vient du fait que l'image de  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  peut être complexe (par exemple dans un cas dégénéré) et en général et ne ressemble pas à un simplexe géométrique ( $\sigma$  n'est pas injectif *a priori*).

**Définition 2.1.2.** *On appelle application bord l'application  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  définie pour tout  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  par*

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$$

(où  $(v_0, \dots, v_n)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) qu'on étend  $\mathbb{Z}$ -linéairement à  $C_n(X)$ .

**Conventions.** On pose  $C_{-1}(X) = 0$  et  $\partial_0 = 0$ .

**Remarque.** Il y a un sous-entendu dans cette définition : la restriction  $\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}$  est vue comme un  $(n-1)$ -simplexe singulier en utilisant l'identification affine

$$\Delta^{n-1} \xrightarrow{\cong} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

---

qui envoie sommet sur sommet en préservant l'ordre.

**Lemme 2.1.1.**  $(C(X), \partial)$  est un complexe de chaînes.

*Démonstration.* Exercice (pareil qu'en homologie simpliciale). □

**Définition 2.1.3.** On note  $Z_n(X) = \ker \partial_n$  et  $B_n(X) = \text{Im } \partial_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On définit le  $n$ -ième groupe d'homologie singulière de  $X$  par

$$H_n(X) = Z_n(X) / B_n(X)$$

pour tout  $n \geq 0$ .

**Exemple (homologie du point).** Soit  $X = \{x\}$  un singleton. Alors,  $H_n(X) = 0$  si  $n \geq 1$  et  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . En effet,  $C_n(X) = \mathbb{Z}\sigma_n$  (car il existe un unique  $n$ -simplexe singulier  $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow X$  constant). On a donc

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_n|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} = \left[ \sum_{i=0}^n (-1)^i \right] \sigma_{n-1},$$

donc  $\partial_n(\sigma) = \sigma_{n-1}$  si  $n$  est pair, et vaut 0 sinon. On a la suite suivante.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}\sigma_{2n+1} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{Z}\sigma_{2n} & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}\sigma_{2n-1} & \xrightarrow{\sigma} & \cdots & & \\ & & & & & & & & & \nearrow & \\ \cdots & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{Z}\sigma_3 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{Z}\sigma_2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}\sigma_1 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{Z}\sigma_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On a donc  $H_0(X) = \mathbb{Z}\sigma_0 = \mathbb{Z}$ , puis

$$H_{2n+1}(X) \cong Z_{2n+1} / B_{2n+1} \cong C_{n+1} / C_{n+1} = 0$$

et

$$H_{2n}(X) \cong Z_{2n} / B_{2n} = 0$$

lorsque  $n > 0$ . Pour les calculs, il est souvent mieux que l'homologie du point soit triviale en toute dimension.

**Définition 2.1.4.** Soit  $X$  un espace topologique non vide. On appelle homologie réduite  $\tilde{H}_n(X)$  l'homologie du complexe de "chaînes augmenté"

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_n} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

**Remarque.** On a bien  $\varepsilon \circ \delta_1 = 0$  (exercice). Remarquons aussi que puisque  $X$  est non vide, alors  $C_0(X)$  est non trivial.

**Proposition 2.1.1.** Si  $X \neq \emptyset$  et  $n \geq 0$ , on a

$$H_n(X) = \begin{cases} \tilde{H}_n(X) & \text{si } n \geq 1, \\ \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

En particulier,  $\tilde{H}_0(X) = 0$  lorsque  $X$  est un singleton.

*Démonstration.* Exercice. □

## 2.2 Calcul des groupes d'homologies $H_0$ et $H_1$

**Lemme 2.2.1.** Soit  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$  la décomposition en composantes connexes par arcs. Alors on a pour tout  $n \geq 0$  l'isomorphisme

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$$

induit par les inclusions  $X_i \rightarrow X$ .

*Démonstration.* À FINIR. □

**Proposition 2.2.1.** Si  $X \neq \emptyset$  est connexe par arcs, alors

$$\tilde{H}_0(X) = 0 \quad \text{et} \quad H(X) = \mathbb{Z}.$$

*Démonstration.*  $X$  est non vide, donc l'application  $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\sum n_\sigma \sigma \mapsto \sum n_\sigma$  est surjective. On sait que  $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ , donc  $\text{Im } \partial_1 \subset \ker \varepsilon$ . Réciproquement, soit  $c = \sum_i n_i x_i \in \ker \varepsilon$  et soit  $z \in X$ . Soit  $\sigma_i : \Delta^1 \rightarrow X$  une chemin reliant  $z$  à  $x_i$ . On a alors  $\partial \sigma_i = x_i - z$ . Soit  $c' = \sum_i n_i \sigma_i \in C_1(X)$ . On a

$$\partial c' = \sum_u n_u (x_u - z) = c - \left( \sum_i n_i \right) z = c.$$

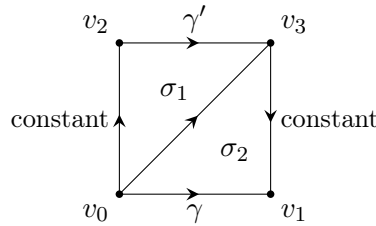
Ainsi,  $c \in \text{Im } \partial_1$ . On a donc montré que  $\ker \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ . D'une part,

$$\tilde{H}_0(X) = \ker \varepsilon / \text{Im } \partial_1.$$

D'autre part,

$$H(X) = C(X) / \text{Im } \partial_1 = C(X) / \text{Im } \ker \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon]{\cong} \mathbb{Z}.$$

□


 FIGURE 2.1 – Subdivision du carré  $I^2$ .

**Remarque.** Il y a un lien entre  $\pi_1(X)$  et  $H_1(X)$ . Ce lien surgit de l'observation suivante : si un chemin  $\gamma : I \rightarrow X$  peut être vu comme un 1-simplex singulier. Si  $\gamma$  est un lacet, ce 1-simplex est un 1-cycle (puisque  $\partial\gamma = \gamma(1) - \gamma(0)$ ).

**Théorème 2.2.1.** Soit  $x \in X$ . Un lacet vu comme un 1-cycle singulier donne un morphisme de groupes

$$h : \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X).$$

Si  $X$  est connexe par arcs,  $h$  est surjectif avec  $\ker h = [\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)]$  (sous-groupe des commutateurs). Dans ce cas,  $h$  induit un isomorphisme de groupes

$$\pi_1(X, x)^{\text{ab}} \cong H_1(X).$$

*Démonstration.* On note ici  $\gamma \sim \gamma'$  si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont des lacets homotopes à extrémités fixées. On note  $\gamma \sim_c \gamma'$  si les deux 1-cycles diffèrent par un bord, i.e que  $\gamma - \gamma' \in B_1(X)$  (et donc  $[\gamma] = [\gamma'] \in H_1(X)$ ). On énonce quelques propriétés.

- (i) Si  $\gamma$  est un chemin constant, alors  $\gamma \sim_c 0$ . En effet, si  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$  est constant à la valeur  $\gamma(0)$ , alors  $\partial\sigma = \sigma|_{[v_1, v_2]} - \sigma|_{[v_0, v_2]} + \sigma|_{[v_0, v_1]} = \gamma - \gamma + \gamma = \gamma$ .
- (ii) Si  $\gamma \sim \gamma'$ , alors  $\gamma \sim_c \gamma'$  (et l'application  $h$  est donc bien définie). En effet, si  $H : I^2 \rightarrow X$  est une homotopie à extrémités fixées entre  $\gamma$  et  $\gamma'$ . On sous-divise le carré en deux triangles  $[v_0, v_1, v_3]$  et  $[v_0, v_2, v_3]$ .

Soit  $\sigma_1 = H|_{[v_0, v_1, v_3]}$  et  $\sigma_2 = H|_{[v_0, v_2, v_3]}$ . Alors,  $\sigma_2 \in C_2(X)$ . On a

$$\begin{aligned} \partial(\sigma_1 - \sigma_2) &= \partial\sigma_1 - \partial\sigma_2 \\ &= (H|_{[v_1, v_3]} - H|_{[v_0, v_3]} + H|_{[v_0, v_1]}) - (H|_{[v_2, v_3]} - H|_{[v_0, v_3]} + H|_{[v_0, v_2]}) \\ &= \gamma - \gamma' \end{aligned}$$

car  $H|_{[v_0, v_1]} = \gamma$  et  $H|_{[v_2, v_3]} = \gamma'$ . On a donc montré bien montré que  $\gamma - \gamma' \in B_1(X)$ .

- (iii) Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont deux lacets, alors  $\gamma\gamma' \sim_c \gamma + \gamma'$ . Soit  $\sigma : \Delta^2 \rightarrow X$  la composition de la projection orthogonale de  $\Delta^2 = [v_0, v_1, v_2]$  sur  $[v_0, v_2]$  avec  $\gamma\gamma'$ .
- (iv) Si  $\gamma$  est un lacet, alors  $\bar{\gamma} \sim_c -\gamma$ . En effet,  $\gamma + \bar{\gamma} \sim_c \gamma\bar{\gamma} \sim_c 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} \partial\sigma &= \sigma|_{[v_1, v_2]} - \sigma|_{[v_0, v_2]} + \sigma|_{[v_0, v_1]} \\ &= \gamma' - \gamma\gamma' + \gamma. \end{aligned}$$

On a donc montré que  $\gamma\gamma' - (\gamma + \gamma') = -\partial\sigma \in B_1(X)$ .

Les points (ii) et (iii) montrent en fait que  $h$  est un morphisme de groupes bien défini.

- *Surjectivité.* Soit  $c = \sum_i n_i \sigma_i \in Z_1(X)$ . Quitte à introduire des répétitions (en ajoutant des  $\sigma_i$ ), on peut supposer que  $n_i = \pm 1$  pour tout  $i$ . Selon la propriété (iv), on peut même supposer  $n_i = 1$  pour tout  $i$  sans changer la classe de  $c$  dans  $H_1(X)$ . On suppose donc maintenant que  $c = \sum_i \sigma_i$ . Puisque  $c \in Z_1(X)$ , on a

$$0 = \partial c = \sum_i \partial \sigma_i = \sum_i (\sigma_i(1) - \sigma_i(0)).$$

Supposons qu'un certain  $\sigma_i$  n'est pas un lacet. Il existe donc un  $\sigma_j$  tel que  $\sigma_j(0) = \sigma_i(1)$ . On peut donc concaténer. Selon le point (iii), on peut remplacer  $\sigma_i + \sigma_j$  par  $\sigma_i \sigma_j$ . Par récurrence, on peut supposer que tous les  $\sigma_i$  sont des lacets (chacun basé en un certain  $x_i$ ). Soit  $\gamma_i$  un chemin allant de  $x$  à  $x_i$  (qui existe par connexité par arcs de  $X$ ). Les points (iii) et (iv) permettent d'affirmer que  $\gamma_i \sigma_i \bar{\gamma}_i \sim_c 0$  ( $\gamma_i \sigma_i \bar{\gamma}_i$  est bien un lacet basé en  $x$ ). On peut donc supposer que tous les  $\sigma_i$  sont des lacets basés en  $x$  (quitte à les conjuguer par les  $\sigma_i$ ). Selon le point (iii),

$$\prod_i \sigma_i \sim_c \sum_i \sigma_i$$

et  $[\prod_i \sigma_i] \in \pi_1(X, x)$  est envoyé à  $[c]$  par  $h$ .

- *Noyau de  $H_1(X)$ .* On remarque que  $[\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)] \subset \ker h$ . Réciproquement, on va montrer que le morphisme induit par  $h$ ,

$$\pi_1(X, x)^{\text{ab}} = \pi_1(X, x) / [\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)] \longrightarrow H_1(X)$$

est injectif, *i.e* que chaque élément du noyau  $\ker h$  devient trivial dans  $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ . Soit  $[\gamma] \in \ker h$ . Alors,  $\gamma$  (vu comme 1-cycle) est un bord. On note  $c = \sum_i n_i \sigma_i \in C_2(X)$  avec  $\gamma = \partial c$ . Comme lors de la démonstration de la surjectivité, on peut supposer que  $n_i = \pm 1$  pour tout  $i$ .

On va montrer qu'on peut se ramener au cas où pour tout  $\sigma_i$ , tous les trois sommets de  $\Delta^2$  sont envoyés par l'application  $\sigma_i$  à  $x$ . En effet, on a la formule usuelle

$$\partial \sigma_i = \tau_{i,0} - \tau_{i,1} + \tau_{i,2}$$

avec  $\tau_{i,0}$ ,  $\tau_{i,1}$ , et  $\tau_{i,2}$  des 1-simplexes singuliers. Dans  $C_1(X)$ , on a

$$\begin{aligned} \gamma = \partial c &= \partial \left( \sum_i n_i \sigma_i \right) \\ &= \sum_i n_i \partial \sigma_i \\ &= \sum_i n_i \sum_{j=0}^2 (-1)^j \tau_{i,j}. \end{aligned}$$

Cela signifie que dans la somme, les  $\tau_{i,j}$  apparaissent par paires, sauf un certain  $\tau_{i_0, j_0}$ , où les coefficients sont  $+1$  et  $-1$  respectivement. L'élément  $\tau_{i_0, j_0}$  qui reste est donc égal à  $\gamma$ . Pour chaque point  $y \in X$  qui apparaît comme sommet d'un  $\sigma_i$ , on choisit un chemin  $\gamma_y$  de  $x$  à  $y$  (qui existe par connexités par arcs de  $X$ ). Pour chaque triangle  $\sigma_i$ , on modifie chaque arête  $\tau_{i,j}$  en

$$\tau'_{i,j} = \gamma_{o(\tau_{i,j})} \tau_{i,j} \overline{\gamma_{t(\tau_{i,j})}}$$

où  $o$  désigne l'origine et  $t$  le terminus. On peut ensuite remplacer  $\sigma_i : \Delta^2 \rightarrow X$  dont les bords sont les  $\tau'_{i,j}$ . En effet, fixons un homéomorphisme  $(\mathbb{B}^2, \partial\mathbb{B}^2 = \mathbb{S}^1) \cong (\Delta^2, \partial\Delta^2)$  et regardons l'application  $\sigma_i|_{\partial\Delta^2} \rightarrow X$  vue comme une application  $\mathbb{S}^1 \rightarrow X$  (avec  $1 \mapsto o(\tau_{i,0})$ ). Cette application s'étend à  $\mathbb{B}^2$  grâce à l'isomorphisme. Selon la proposition 1.2.3, on peut affirmer que  $\mathbb{S}^1 \rightarrow X$  est nullhomotope, donc homotope à l'application constante à  $o(\tau_{i,0})$ . On en déduit que l'application continue

[À FINIR]

Selon la proposition 1.2.3, l'application s'étend à une application  $\Delta^2 \rightarrow X$  qu'on appelle  $\sigma'_i$ . Soit  $c' = \sum_i n_i \sigma'_i$ . Puisque  $\partial\sigma'_i = \tau'_{i,0} - \tau'_{i,1} + \tau'_{i,2}$ , les  $\tau'_{i,j}$  apparaissent par paires comme les  $\tau_{i,j}$  (si  $\tau_{i,j}, \tilde{\tau}_{i,j}$  forment une paire, alors  $\tau'_{i,j}, \tilde{\tau}'_{i,j}$  aussi), sauf  $\tau'_{i_0, j_0}$  et donc

$$\partial c' = \sum_i n_i \sigma'_i = \sum_i n_i (-1)^j \tau'_{i,j} = \tau'_{i_0, j_0} = \tau_{i_0, j_0} = \gamma.$$

On peut donc remplacer les  $\sigma_i$  par les  $\sigma'_i$ .

On va donc supposer que  $c = \sum_i n_i \sigma_i$  avec  $\tau_{i,j}$  des lacets basés en  $x$ . On peut donc considérer les classes  $[\tau_{i,j}] \in \pi_1(X)$ . On note  $[\gamma]^{\text{ab}}$  pour  $[\gamma] \bmod [\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)]$  dans  $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ . On veut donc montrer que  $[\gamma]^{\text{ab}}$ . Ici, on écrit additivement dans  $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ . On considère l'élément

$$\sum_{i,j} (-1)^j n_i [\tau_{i,j}] \in \pi_1(X, x)^{\text{ab}}.$$

L'annulation des  $\tau_{i,j}$  par paires signifie que cet élément est égal à  $[\tau_{i_0, j_0}]^{\text{ab}}$  qui est égal à  $[\gamma]^{\text{ab}}$ . On réécrit la sommation comme

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (-1)^j n_i [\tau_{i,j}]^{\text{ab}} &= \sum_i n_i \sum_{j=0}^2 (-1)^j [\tau_{i,j}]^{\text{ab}} \\ &= \sum_i n_i [\partial\sigma_i]^{\text{ab}} \end{aligned}$$

avec  $[\partial\sigma_i]^{\text{ab}} = [\tau_{i,0}]^{\text{ab}} - [\tau_{i,1}]^{\text{ab}} + [\tau_{i,2}]^{\text{ab}} \in \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$  (on rappelle que les  $\tau_{i,j}$  sont bien des lacets basés en  $x$ ). Or l'existence de  $\sigma_i : \Delta^2 \rightarrow X$  montre que le lacet  $\sigma_i|_{\partial\Delta^2} = \tau_{i,0}\bar{\tau}_{i,1}\tau_{i,2}$  (toujours selon la proposition 1.2.3) est nullhomotope. Ainsi,  $[\tau_{i,0}\bar{\tau}_{i,1}\tau_{i,2}] = 1$  dans  $\pi_1(X, x)$ . Il en est donc de même pour son image  $[\partial\sigma_i]^{\text{ab}} \in \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ . On a donc

$$[\gamma]^{\text{ab}} = \sum_i n_i [\partial\sigma_i]^{\text{ab}} = 0.$$

Cela montre que  $\ker h = [\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)]$ , ce qui termine la démonstration du théorème. □