École Normale Supérieure de Rennes

Représentation irréductibles des groupes symétriques Introduction aux éléments de Garnir

Victor Lecerf Maxime Moscatelli

encadré par Salim Rostam

Résumé

Notre objectif dans cet article est de démontrer (partiellement) que les polytabloïdes standards de forme $\mu \vdash n$ engendre le module de Specht S^{μ}. Il a été montré dans les séances précédentes que cette famille était libre. Une fois ces résultats acquis, nous aurons donc déterminer une base pour chacun des modules de Specht. Pour cela, on introduit les éléments de Garnir, qui étant donné un polytabloïde (*a priori* non standard) agît par sommes complexes permutations sur ce dernier pour obtenir un tabloïde nul, et permettent de décomposer en polytabloïdes (presque standard. On parle alors d'*algorithme de lissage*.

Notation. Dans tout cet article, n désigne un entier naturel, et λ et ν deux partition de l'entier n. On note $A \subset B$ si A est un-sous ensemble de B (ou égal), et $A \subsetneq B$ si A est strictement inclus dans B. Enfin, on note $\mathfrak{S}_X$ le groupe des permutation de l'ensemble X et $\mathfrak{S}_n$ le n-ième groupe symétrique.

1 Observation et idée de démonstration

Notons avant tout que notre travail est basé sur le livre de B. Sagan *The Symmetric Group* publié aux éditions Springer. Nous allons donc *via* un algorithme montrer qu'un tableau tabloïde e_t est somme de tabloïds standards (où t est un tableau de forme μ). Remarquons d'abord qu'on peut supposer sans perte de généralité que t a des colonnes *croissantes*. Si ce n'est pas le cas, on peut trouver une permutation σ telle que $s := \sigma t$ a des colonnes croissantes. Alors, e_s est combinaison linéaires de polytabloïdes standards *si et seulement si* e_t l'est puisque

$$e_s = \sigma e_t = \varepsilon(\sigma) e_t.$$

Supposons donc que les colonnes de t sont croissantes. L'objectif va maintenant d'éliminer dans t sur chaque ligne les pairs d'éléments adjacents mais dans un ordre décroissant, *i.e* que pour toute ligne i, on cherche à trouver des permutations permettant d'éliminer les décroissances dans la ligne i (pas forcément en même temps). Si P désigne une telle famille de permutations, et que l'élément

$$g = 1 + \sum_{\pi \in P} \varepsilon(\pi)\pi$$

est tel que $ge_t = 0$, alors on aura

$$e_t = -\sum_{\pi \in P} e_{\pi t}.$$

On se rapproche grandement du résultat attendu, mais e_t n'est pas encore combinaison linéaire de polytabloïdes standards. En fait, l'idée que e_t est désormais combinaison linéaire de polytabloïdes *un peu plus standard* que e_t. Un raisonnement par récurrence permettra alors de démontrer que e_t est en fait bien combinaison linéaire de polytabloïdes standards.

2 Définition

Comme annoncé, on introduit des permutations appelées *éléments de Garnir* [1] qui nous permettront d'entamer une réponse à la génération de la famille des polytabloïdes.

Définition 2.1 (élément de Garnir). *Soient $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ deux ensembles finis disjoints, et $\pi_1, \dots, \pi_r \in \mathfrak{S}_{A \sqcup B}$ tels que*

$$\mathfrak{S}_{A \sqcup B} = \bigsqcup_{i=1}^{r} \pi_i (\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)$$

où on identifie $\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B$ au sous-groupe des éléments σ de $\mathfrak{S}_{A \sqcup B}$ tels que $\sigma(A) = A$ et $\sigma(B) = B$. Dans ce cas, on appelle élément de Garnir associé à (A, B) l'élément noté

$$g_{A,B} = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon(\pi_i)\pi_i.$$

Remarques.

- Cette définition de $g_{A,B}$ dépend naturellement de A et B mais aussi des permutations π_i choisies qui ne sont pas nécessairement uniques. Nous préciserons une manière standard de choisir les représentations plus tard.
- Une telle famille de représentant existe toujours : on commence par remarquer que $\mathfrak{S}_{A \sqcup B}$ agît sur l'ensemble

$$X = \left\{ (A', B') \in \mathcal{P}(A \sqcup B)^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} (\operatorname{card} A', \operatorname{card} B') = (\operatorname{card} A, \operatorname{card} B) \\ A' \sqcup B' = A \sqcup B \end{array} \right\}.$$

1. Henri Georges Garnir (1921–1985) était un mathématicien belge. Ses sujets de recherches furent variés : application de l'algèbre linéaire à la physique quantique, application de la théorie des groupes à la chimie théorique, analyse fonctionnelle (transformée de Laplace des distributions, théorie des espaces de Hilbert appliquée en physique), problème de conditions limites aux équations aux dérivées partielles, et bien évidemment étude des représentations des groupes symétriques et alternés.

Il est clair que cette action est transitive. Pour tout $(A', B') \in X$, notons

$$\mathfrak{S}_{A',B'} = \{\pi \in \mathfrak{S}_{A \sqcup B} \,|\, \pi(A,B) = (A', B')\}.$$

En vertu de la remarque précédente, $S_{A',B'}$ est non vide. Soit alors $\pi_{A',B'} \in \mathfrak{S}_{A',B'}$. On a

$$\pi_{A',B'}^{-1}(S_{A',B'}) = \mathfrak{S}_{A,B} = \mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B$$

d'où $\mathfrak{S}_{A',B'} = \pi_{A',B'}(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)$. On a

$$\mathfrak{S}_{A \sqcup B} = \bigsqcup_{(A',B') \in X} \mathfrak{S}_{A',B'} = \bigsqcup_{(A',B') \in X} \pi_{A',B'}(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B).$$

Exemples.

— Soit $A = \{5,6\}$, $B = \{2,4\}$, et alors $A \cup B = \{2,4,5,6\}$. On a

$$X = \{(A,B), (\{2,5\},\{4,6\}), (\{4,5\},\{2,6\}), (B,A), (\{4,6\},\{2,5\}), (\{2,6\},\{4,5\})\}.$$

On associe à chaque élément de X un représentant π (dans l'ordre) :

$$\mathrm{id}, (2\,6), (4\,6), (2\,5)(4\,6), (4\,5)(2\,6).$$

L'élément de Garnir correspondant est

$$g_{A,B} = \mathrm{id} - (2\,6) - (4\,6) + (2\,5)(4\,6) - (4\,5) - (5\,2).$$

— Soit $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4,5\}$, et alors $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$. On a

$$\begin{aligned} X = \{&(A,B), (\{1,3\},\{2,4,5\}), (\{1,4\},\{2,3,5\}), (\{1,5\},\{2,3,4\}), \\ &(\{2,3\},\{1,4,5\}), (\{2,4\},\{1,3,5\}), (\{2,5\},\{1,3,4\})\}. \end{aligned}$$

de permutations associées... en fait non c'est un peu long.

Le choix des représentants n'est pas unique car pour chaque $(A', B') \in X$ on a le choix parmi $|\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B| = \mathrm{card}(A)!\,\mathrm{card}(B)!$ représentants. Soit un tableau t de forme μ, et soit A un sous-ensemble des éléments de la j-ième colonne de t et B un sous-ensemble des éléments de la $(j+1)$-ième.

Proposition 2.1. *Il existe une famille de représentants $(\pi_i)_{1 \le i \le r}$ d'éléments de $\mathfrak{S}_{A \sqcup B}$ telle que*

$$\mathfrak{S}_{A \sqcup B} = \bigsqcup_{i=1}^{r} \pi_i(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)$$

et telle que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, les éléments de $A \sqcup B$ dans le tableau $\pi_i t$ sont croissants en descendant les colonnes.

Démonstration. Soit $\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_r$ des représentants obtenus par la méthode précédente. Soit $i \in [\![1, r]\!]$, j un indice des colonnes de t, et soit X_j les éléments de la j-ième colonne de $\tilde{\pi}_i t$ et X_{j+1} ceux de la $(j+1)$-ième. Il est clair qu'on dispose de $\sigma \in \mathfrak{S}_{X_j} \times \mathfrak{S}_{X_{j+1}}$ telle que les éléments de $A \sqcup B$ sont ordonnés en descendant dans les colonnes de $\sigma \tilde{\pi}_i t$. Alors, $\tilde{\pi}_i^{-1}(\sigma \tilde{\pi}_i)$ est élément de $\mathfrak{S}_{\pi^{-1}(X_j)} \times \mathfrak{S}_{\pi^{-1}(X_{j+1})} = \mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B$. Ainsi,

$$\sigma \tilde{\pi}_i = \tilde{\pi}_i(\tilde{\pi}_i^{-1} \sigma \tilde{\pi}_i) \in \tilde{\pi}_i(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)$$

peut être choisi comme représentant, et vérifie la propriété.

$\square$

Exemple. Soit

$$t = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ 9 & \end{matrix},$$

$\pi = (1\,7)(3\,4\,5)(9\,8)(2\,6)$, $\sigma = [(2\,7)(3\,4)][(1\,6)]$. On a alors

$$\sigma\pi = (1\,2)(4\,5)(6\,7)(8\,9).$$

On a alors les modifications

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ 9 & \end{matrix} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] \arrow[dr, "\sigma\pi"] & \begin{matrix} 7 & 6 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 2 & 9 \\ 8 & \end{matrix} \arrow[d, "\sigma"] \\
\begin{matrix} 6 & 7 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 8 \\ 9 & \end{matrix} \arrow[r] & \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \\ 8 & \end{matrix}
\end{tikzcd}$$

qui se résument par le résultat escompté

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ 9 & \end{matrix} \xrightarrow{\sigma\pi} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 7 & 9 \\ 8 & \end{matrix}.$$

Définition 2.2 (élément de Garnir associé à (t, A, B))**.** *Avec les notations de la proposition 2.1, l'élément de Garnir associé à (t, A, B) est*

$$g_{A,B} = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon(\pi_i)\pi_i.$$

Remarque. Encore une fois, un élément de Garnir $g_{A,B}$ dépend des π_i, mais c'est sans importance ici.

Exemple. Soit

$$t = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & \\ 6 & & \end{array},$$

$A = \{5, 6\}$, et $B = \{2, 4\}$. On choisit alors

$$g_{A,B} = \mathrm{id} - (4\,5) + (2\,4\,5) + (4\,6\,5) - (2\,4\,6\,5) + (2\,5)(4\,6)$$

avec pour tableaux associés

$$t, \quad t_2 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \\ 6 & & \end{array}, \quad t_3 = \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & \\ 6 & & \end{array}, \quad t_4 = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & \\ 5 & & \end{array}, \quad t_5 = \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & \\ 5 & & \end{array}, \quad t_6 = \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & \\ 4 & & \end{array}.$$

On remarque alors que $g_{A,B}e_t = 0$ (par pitié croyez-nous, il y trente-six termes à déterminer pour effectuer le calcul). Cette observation se généralise sous certaines conditions.

3 Propriété des éléments de Garnir

Rappel. Si H est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, t un tableau de forme μ, et b et c sont des éléments d'une même ligne de t tels que $(b\,c) \in H$, alors $H^-\{t\} = 0$. C'est le quatrième résultat du lemme du signe.

Proposition 3.1. *Soit t un tableau de forme μ et j un indice d'une colonne de t. Soit de plus A un sous-ensemble des éléments de la j-ième colonne de t et B un sous-ensemble des éléments de la $(j+1)$-ième colonne de t. Si $\mathrm{card}(A \sqcup B)$ est strictement plus grand que le nombre d'éléments de la j-ième colonne de t, alors $g_{A,B}e_t = 0$.*

Remarque. Le résultat est *indépendant* des représentants π_i choisis pour définir l'élément de Garnir $g_{A,B}$.

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathfrak{S}_{A\sqcup B}e_t = 0$. Soit $\sigma \in C_t$ un stabilisateur des colonnes. Par hypothèse sur $\mathrm{card}(A \sqcup B)$, on peut trouver des éléments $a, b \in A \sqcup B$ tels que a et b sont dans la même colonne de σt. Or, $(a\,b) \in \mathfrak{S}_{A\sqcup B}$ donc $\mathfrak{S}^-_{A\sqcup B}\{\sigma t\} = 0$ (selon le lemme du signe). Puisque $\kappa_t = C_t^-$, et donc que chaque $\sigma \in C_t$ apparaît dans κ_t, on a bien $\mathfrak{S}_{A\sqcup B}e_t = 0$. Soit $(\pi_i)_{1\leq i\leq r}$ des permutations définissant un élément de Garnir. On a $\mathfrak{S}_{A\sqcup B} = \bigsqcup_{i=1}^r \pi_i(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)$, donc $\mathfrak{S}_{A\sqcup B} = g_{A,B}(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)^-$. Puisque $\mathfrak{S}_{A\sqcup B}e_t = 0$, on obtient

$$g_{A,B}(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)^- e_t = 0.$$

Or, $\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B \subset C_t$. On en déduit que si $\sigma \in \mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B$, le premier résultat du lemme du signe permet d'affirmer que

$$\sigma^- e_t = \sigma^- C_t^-\{t\} = C_t^-\{t\} = e_t.$$

On a donc $(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)^- e_t = |\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B| e_t$. En rassemblant les faits démontrés, on a $g_{A,B}(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)^- e_t = 0$ et $(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)^- e_t = |\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B| e_t$, ce qui permet de conclure.

□

Remarque. Bien évidemment, les modifications effectués sur un tableau par un élément de Garnir ne résolvent pas exactement le problème. Dans l'exemple précédent, la permutation $(2\,4\,5)$ qui a donné le tableau t_3 a permis d'éliminer la décroissance "$4\,5$" dans la seconde colonne, mais en a créé une nouvelle dans la première avec "$1\,4\,3$". Il nous est désormais nécessaire d'introduire une mesure de la "standardité" d'un tableau. En effet, il est naturel de penser les tableaux t_2, t_3, t_4, t_5 et t_6 comme "plus standard" que le tableau t.

Dans ce but, on s'intéresse désormais aux classes d'équivalences des tableaux possédant les mêmes éléments dans chaque colonne. Pour tout tableau t, on note

$$[t] = C_t t$$

(comme on avait $\{t\} = R_t t$) le *tabloïde colonne* associé à t. Dans les cas concrets, on utilise des lignes verticales pour noter ces tabloïds colonnes. Par exemple,

$$\left|\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right| = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{matrix}, \begin{matrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{matrix}, \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{matrix}, \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\}.$$

De plus, on peut remplacer "ligne" par "colonne" dans la définition de dominance de tabloïde pour parler de dominance de tabloïde colonne. On utilisera pour cela le même symbole (la distinction se fait dans l'utilisation des crochets, plutôt que des accolades).