Algèbres de Novikov libres et algèbres de Hopf de multi-indices

Dominique Manchon
CNRS-Université Clermont Auvergne

Avec X. Gao et Z. Zhu (Univ. Lanzhou)

Decorated tree-like structures for singular dynamics,
Arbres et structures apparentées en dynamique singulière

IECL, Nancy, 27-29 mai 2024

Algèbres pré-Lie

- Une algèbre pré-Lie à gauche sur un corps **k** est un espace vectoriel $\mathcal{L}$ muni d'un produit bilinéaire $\rhd : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ vérifiant l'identité pré-Lie à gauche

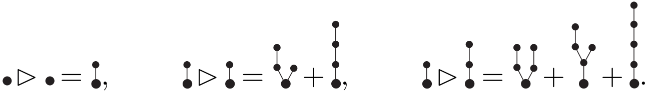
$$x \rhd (y \rhd z) - (x \rhd y) \rhd z = y \rhd (x \rhd z) - (y \rhd x) \rhd z.$$

Algèbres pré-Lie

- Une algèbre pré-Lie à gauche sur un corps **k** est un espace vectoriel $\mathcal{L}$ muni d'un produit bilinéaire $\rhd : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ vérifiant l'identité pré-Lie à gauche

$$x \rhd (y \rhd z) - (x \rhd y) \rhd z = y \rhd (x \rhd z) - (y \rhd x) \rhd z.$$

- **L'algèbre pré-Lie libre** $\mathrm{PL}(A)$ engendrée par un ensemble A est donné par les arbres enracinés décorés par A munis de la loi de greffe:



(F. Chapoton, M. Livernet 2001 - A. Dzhumadil'daev, C. Löfwall 2002 ... et A. Cayley 1857).

L'algèbre enveloppante d'une algèbre pré-Lie $\mathcal{L}$ se décrit comme suit (D. Guin, J.-M. Oudom, 2005) :

- La loi pré-Lie s'étend de manière unique à l'algèbre symétrique $S(\mathcal{L})$ de manière à ce que pour tout $x \in \mathcal{L}$ et $u, v \in S(\mathcal{L})$ on a

$$\begin{aligned} x \rhd (uv) &= (x \rhd u)v + u(x \rhd v), \\ (xu) \rhd v &= x \rhd (u \rhd v) - (x \rhd u) \rhd v. \end{aligned}$$

L'algèbre enveloppante d'une algèbre pré-Lie $\mathcal{L}$ se décrit comme suit (D. Guin, J.-M. Oudom, 2005) :

- La loi pré-Lie s'étend de manière unique à l'algèbre symétrique $S(\mathcal{L})$ de manière à ce que pour tout $x \in \mathcal{L}$ et $u, v \in S(\mathcal{L})$ on a

$$\begin{aligned} x \rhd (uv) &= (x \rhd u)v + u(x \rhd v), \\ (xu) \rhd v &= x \rhd (u \rhd v) - (x \rhd u) \rhd v. \end{aligned}$$

- Le **produit de Grossman-Larson**

$$u \star v := \sum_{(u)} u_1 (u_2 \rhd v)$$

est associatif, unitaire d'unité $\mathbf{1}$, et vérifie $(u \star v) \rhd w = u \rhd (v \rhd w)$ pour tout $u, v, w \in S(\mathcal{L})$,

L'algèbre enveloppante d'une algèbre pré-Lie $\mathcal{L}$ se décrit comme suit (D. Guin, J.-M. Oudom, 2005) :

- La loi pré-Lie s'étend de manière unique à l'algèbre symétrique $S(\mathcal{L})$ de manière à ce que pour tout $x \in \mathcal{L}$ et $u, v \in S(\mathcal{L})$ on a

$$\begin{aligned} x \rhd (uv) &= (x \rhd u)v + u(x \rhd v), \\ (xu) \rhd v &= x \rhd (u \rhd v) - (x \rhd u) \rhd v. \end{aligned}$$

- Le **produit de Grossman-Larson**

$$u \star v := \sum_{(u)} u_1 (u_2 \rhd v)$$

est associatif, unitaire d'unité $\mathbf{1}$, et vérifie $(u \star v) \rhd w = u \rhd (v \rhd w)$ pour tout $u, v, w \in S(\mathcal{L})$,
- $\big(S(\mathcal{L}), \star, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}\big)$ et $\big(\mathcal{U}(\mathcal{L}_{\mathrm{Lie}}), \cdot, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}\big)$ sont deux algèbres de Hopf isomorphes.

Exemple des forêts

La loi $\rhd$ est donnée par la greffe simultanée

$$t_1 \cdots t_n \rhd f = \sum_{v_1,\ldots,v_n \in \mathcal{V}(f)} t_1 \to_{v_1} \Big(t_2 \to_{v_2} \big(\cdots (t_n \to_{v_n} f)\big) \ldots \Big),$$

et le produit de Grossman-Larson est donné par la formule "greffer ou laisser tomber"

$$f \star g = B_-\Big(f \rhd B_+^a(g)\Big).$$

Exemple des forêts

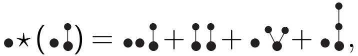
La loi $\rhd$ est donnée par la greffe simultanée

$$t_1 \cdots t_n \rhd f = \sum_{v_1,\ldots,v_n \in \mathcal{V}(f)} t_1 \to_{v_1} \Big(t_2 \to_{v_2} \big(\cdots (t_n \to_{v_n} f)\big)\ldots\Big),$$

et le produit de Grossman-Larson est donné par la formule "greffer ou laisser tomber"

$$f \star g = B_-\Big(f \rhd B_+^a(g)\Big).$$

Exemples :



Exemple des forêts

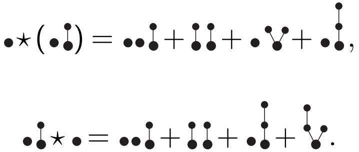
La loi $\rhd$ est donnée par la greffe simultanée

$$t_1 \cdots t_n \rhd f = \sum_{v_1,\ldots,v_n \in \mathcal{V}(f)} t_1 \to_{v_1} \Big(t_2 \to_{v_2} \big(\cdots (t_n \to_{v_n} f)) \ldots \Big),$$

et le produit de Grossman-Larson est donné par la formule "greffer ou laisser tomber"

$$f \star g = B_- \Big(f \rhd B_+^a(g) \Big).$$

Exemples :



Algèbres de Novikov

- Une **algèbre de Novikov** est un espace vectoriel N sur un corps $\mathbf{k}$, muni d'un produit bilinéaire $\rhd : N \times N \to N$ vérifiant l'identité pré-Lie à gauche et l'identité NAP à droite:

$$x \rhd (y \rhd z) - (x \rhd y) \rhd z = y \rhd (x \rhd z) - (y \rhd x) \rhd z,$$
$$(x \rhd y) \rhd z = (x \rhd z) \rhd y.$$

Algèbres de Novikov

- Une **algèbre de Novikov** est un espace vectoriel N sur un corps **k**, muni d'un produit bilinéaire $\rhd : N \times N \to N$ vérifiant l'identité pré-Lie à gauche et l'identité NAP à droite:

$$x \rhd (y \rhd z) - (x \rhd y) \rhd z = y \rhd (x \rhd z) - (y \rhd x) \rhd z,$$
$$(x \rhd y) \rhd z = (x \rhd z) \rhd y.$$

- **Exemple canonique (Gel'fand-Dorfman, 1979)** : $(\mathcal{A}, .)$ algèbre associative commutative, $\partial : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dérivation de $\mathcal{A}$, et

$$x \rhd y := x.\partial y.$$

Algèbres de Novikov libre (Dzhumadil'daev-Löfwall 2002)

- Soit $\overline{\mathrm{N}}(A)$ l'algèbre commutative des polynômes en les variables x_i^a, $(a,i) \in A \times \{-1,0,1,2,\ldots\}$, soit ∂ l'unique dérivation de $\overline{\mathrm{N}}(A)$ telle que $\partial x_i^a = x_{i+1}^a$.

Algèbres de Novikov libre (Dzhumadil'daev-Löfwall 2002)

- Soit $\overline{\mathrm{N}}(A)$ l'algèbre commutative des polynômes en les variables x_i^a, $(a,i) \in A \times \{-1,0,1,2,\ldots\}$, soit ∂ l'unique dérivation de $\overline{\mathrm{N}}(A)$ telle que $\partial x_i^a = x_{i+1}^a$. En d'autres termes,

$$\partial = \sum_{a,i} x_{i+1}^a \partial_{x_i^a}.$$

Algèbres de Novikov libre (Dzhumadil'daev-Löfwall 2002)

- Soit $\overline{\mathrm{N}}(A)$ l'algèbre commutative des polynômes en les variables x_i^a, $(a,i) \in A \times \{-1,0,1,2,\ldots\}$, soit ∂ l'unique dérivation de $\overline{\mathrm{N}}(A)$ telle que $\partial x_i^a = x_{i+1}^a$. En d'autres termes,

$$\partial = \sum_{a,i} x_{i+1}^a \partial_{x_i^a}.$$

- L'entier $i \geq -1$ est le *poids* de la variable x_i^a. Le poids induit une unique $\mathbb{Z}$-graduation de l'algèbre $\overline{\mathrm{N}}(A)$ pour laquelle la dérivation ∂ est homogène de degré 1.

Algèbres de Novikov libre (Dzhumadil'daev-Löfwall 2002)

- Soit $\overline{\mathrm{N}}(A)$ l'algèbre commutative des polynômes en les variables x_i^a, $(a,i) \in A \times \{-1,0,1,2,\ldots\}$, soit ∂ l'unique dérivation de $\overline{\mathrm{N}}(A)$ telle que $\partial x_i^a = x_{i+1}^a$. En d'autres termes,

$$\partial = \sum_{a,i} x_{i+1}^a \partial_{x_i^a}.$$

- L'entier $i \geq -1$ est le *poids* de la variable x_i^a. Le poids induit une unique $\mathbb{Z}$-graduation de l'algèbre $\overline{\mathrm{N}}(A)$ pour laquelle la dérivation ∂ est homogène de degré 1.
- Le produit bilinéaire $P \triangleright Q := P.\partial Q$ munit $\overline{\mathrm{N}}(A)$ d'une structure d'algèbre de Novikov, et l'algèbre de Novikov libre $\mathrm{N}(A)$ est la composante homogène de poids -1 de $\overline{\mathrm{N}}(A)$.

Algèbres de Novikov libre (Dzhumadil'daev-Löfwall 2002)

- Soit $\overline{\mathrm{N}}(A)$ l'algèbre commutative des polynômes en les variables x_i^a, $(a,i) \in A \times \{-1,0,1,2,\ldots\}$, soit ∂ l'unique dérivation de $\overline{\mathrm{N}}(A)$ telle que $\partial x_i^a = x_{i+1}^a$. En d'autres termes,

$$\partial = \sum_{a,i} x_{i+1}^a \partial_{x_i^a}.$$

- L'entier $i \geq -1$ est le *poids* de la variable x_i^a. Le poids induit une unique $\mathbb{Z}$-graduation de l'algèbre $\overline{\mathrm{N}}(A)$ pour laquelle la dérivation ∂ est homogène de degré 1.
- Le produit bilinéaire $P \rhd Q := P.\partial Q$ munit $\overline{\mathrm{N}}(A)$ d'une structure d'algèbre de Novikov, et l'algèbre de Novikov libre $\mathrm{N}(A)$ est la composante homogène de poids -1 de $\overline{\mathrm{N}}(A)$.
- L'inclusion de A dans $\mathrm{N}(A)$ est donnée par $a \mapsto x_{-1}^a$.

- Une base de l'algèbre de Novikov libre est donnée par les **multi-indices**

$$\mathbf{x}^\alpha = \prod_{a\in A, j\geq -1} (x_j^a)^{\alpha_j^a}$$

vérifiant la **condition de population**

$$\mathrm{wt}\,\mathbf{x}^\alpha = \sum_{a\in A, j\geq -1} j\alpha_j^a = -1.$$

- Une base de l'algèbre de Novikov libre est donnée par les **multi-indices**

$$\mathbf{x}^{\alpha} = \prod_{a \in A, j \geq -1} (x_j^a)^{\alpha_j^a}$$

vérifiant la **condition de population**

$$\mathrm{wt}\, \mathbf{x}^{\alpha} = \sum_{a \in A, j \geq -1} j \alpha_j^a = -1.$$

Le **degré** d'un multi-indice est donné comme d'habitude par

$$|\mathbf{x}^{\alpha}| = \sum_{a \in A, j \geq -1} \alpha_j^a.$$

- Il existe une unique morphisme pré-Lie $\Phi : \mathrm{PL}(A) \to \mathrm{N}(A)$ tel que $\Phi(\bullet_a) = x^a_{-1}$ pour tout $a \in A$.
- Φ est l'**application de fertilité**:

$$\Phi(t) = \prod_{v \in \mathcal{V}(t)} x^{d(v)}_{f(v)-1}.$$

- Il existe une unique morphisme pré-Lie $\Phi : \mathrm{PL}(A) \to \mathrm{N}(A)$ tel que $\Phi(\bullet_a) = x^a_{-1}$ pour tout $a \in A$.
- Φ est l'**application de fertilité**:

$$\Phi(t) = \prod_{v \in \mathcal{V}(t)} x^{d(v)}_{f(v)-1}.$$

Par exemple, $\Phi($  $) = \Phi($  $) = (x_{-1})^2 x_0 x_1$.

- Il existe une unique morphisme pré-Lie $\Phi : \mathrm{PL}(A) \to \mathrm{N}(A)$ tel que $\Phi(\bullet_a) = x^a_{-1}$ pour tout $a \in A$.
- Φ est l'**application de fertilité**:

$$\Phi(t) = \prod_{v \in \mathcal{V}(t)} x^{d(v)}_{f(v)-1}.$$

Par exemple, $\Phi($  $) = \Phi($  $) = (x_{-1})^2 x_0 x_1.$

- On a donc pour deux arbres s et t:

$$\Phi(s \rhd t) = \Phi(s)\partial\Phi(t).$$

- La construction de Guin-Oudom s'applique à $\mathrm{N}(A)$ comme à toute algèbre pré-Lie. L'algèbre de Hopf des multi-indices est définie par

$$\mathcal{H}^{A}_{\mathrm{LOT}} := \Big(S\big(\mathrm{N}(A)\big), \star, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \mathbf{1}, \varepsilon\Big)^{\circ},$$

où $(-)^{\circ}$ indique le dual gradué. Une base de $S\big(\mathrm{N}(A)\big)$ est donnée par les *forêts de multi-indices* $\mathbb{M} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_1} \odot \cdots \odot \mathbf{x}^{\mathbf{k}_r}$, où les composantes $\mathbf{x}^{\mathbf{k}_j}$ vérifient la condition de poids -1.

- La construction de Guin-Oudom s'applique à $\mathrm{N}(A)$ comme à toute algèbre pré-Lie. L'algèbre de Hopf des multi-indices est définie par

$$\mathcal{H}^{A}_{\mathrm{LOT}} := \Big(S\big(\mathrm{N}(A)\big), \star, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \mathbf{1}, \varepsilon\Big)^{\circ},$$

où $(-)^{\circ}$ indique le dual gradué. Une base de $S\big(\mathrm{N}(A)\big)$ est donnée par les *forêts de multi-indices* $\mathbb{M} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_1} \odot \cdots \odot \mathbf{x}^{\mathbf{k}_r}$, où les composantes $\mathbf{x}^{\mathbf{k}_j}$ vérifient la condition de poids -1.

- L'extension de $\triangleright$ aux forêts de multi-indices est particulièrement simple :

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}_1} \odot \cdots \odot \mathbf{x}^{\mathbf{k}_r} \triangleright \mathbf{x}^{\ell} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_1+\cdots+\mathbf{k}_r} \partial^r \mathbf{x}^{\ell}.$$

- La construction de Guin-Oudom s'applique à $\mathrm{N}(A)$ comme à toute algèbre pré-Lie. L'algèbre de Hopf des multi-indices est définie par

$$\mathcal{H}^A_{\mathrm{LOT}} := \Big(S\big(\mathrm{N}(A)\big), \star, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \mathbf{1}, \varepsilon\Big)^{\circ},$$

où $(-)^{\circ}$ indique le dual gradué. Une base de $S\big(\mathrm{N}(A)\big)$ est donnée par les *forêts de multi-indices* $\mathbb{M} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_1} \odot \cdots \odot \mathbf{x}^{\mathbf{k}_r}$, où les composantes $\mathbf{x}^{\mathbf{k}_j}$ vérifient la condition de poids -1.

- L'extension de $\triangleright$ aux forêts de multi-indices est particulièrement simple :

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}_1} \odot \cdots \odot \mathbf{x}^{\mathbf{k}_r} \triangleright \mathbf{x}^{\ell} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_1 + \cdots + \mathbf{k}_r} \partial^r \mathbf{x}^{\ell}.$$

- **La forme explicite du coproduit dépend du choix d'un couplage.**

Facteurs de symétrie

- Pour les forêts : $\sigma(f) = |\operatorname{Aut} f|$. Par exemple,

$\sigma($$) = 1$, $\sigma($$) = 2$, $\sigma($$) = 6$, $\sigma($$) = 8$.

Facteurs de symétrie

- Pour les forêts : $\sigma(f) = |\operatorname{Aut} f|$. Par exemple,

$\sigma($  $) = 1$, $\sigma($  $) = 2$, $\sigma($  $) = 6$, $\sigma($  $) = 8$.

$$\operatorname{Aut} f = \operatorname{Aut}_{\mathrm{ext}} f \ltimes \operatorname{Aut}_{\mathrm{int}} f$$

Facteurs de symétrie

- Pour les forêts : $\sigma(f) = |\operatorname{Aut} f|$. Par exemple,

$\sigma($  $) = 1,\quad \sigma($  $) = 2,\quad \sigma($  $) = 6,\quad \sigma($  $) = 8.$

$$\operatorname{Aut} f = \operatorname{Aut}_{\mathrm{ext}} f \ltimes \operatorname{Aut}_{\mathrm{int}} f \quad \Longrightarrow \quad \sigma(f) = \sigma_{\mathrm{int}}(f)\sigma_{\mathrm{ext}}(f).$$

Facteurs de symétrie

- Pour les forêts : $\sigma(f) = |\operatorname{Aut} f|$. Par exemple,

$\sigma($$) = 1$, $\sigma($$) = 2$, $\sigma($$) = 6$, $\sigma($$) = 8$.

$$\operatorname{Aut} f = \operatorname{Aut}_{\mathrm{ext}} f \ltimes \operatorname{Aut}_{\mathrm{int}} f \quad \Longrightarrow \quad \sigma(f) = \sigma_{\mathrm{int}}(f)\sigma_{\mathrm{ext}}(f).$$

- Pour les multi-indices et leurs forêts, plusieurs options existent ! **Notre choix est le suivant :**

$$\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) = \mathbf{k}! = \prod_{a \in A, j \geq -1} (k_j^a)!$$

Par exemple,

$$\sigma(x_{-1}^2 x_0 x_1) = 2, \quad \sigma(x_{-1}^3 x_0^2 x_2) = 12.$$

- Pour une forêt de multi-indices, on distingue le facteur de symétrie interne du facteur de symétrie externe :

$$\sigma\left((\mathbf{x}_1^{\mathbf{k}_1})^{\odot n_1}\odot\cdots\odot(\mathbf{x}_r^{\mathbf{k}_r})^{\odot n_r}\right):=\underbrace{\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}_1})^{n_1}\cdots\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}_r})^{n_r}}_{\sigma_{\mathrm{int}}}\underbrace{n_1!\cdots n_r!}_{\sigma_{\mathrm{ext}}}$$

- Pour une forêt de multi-indices, on distingue le facteur de symétrie interne du facteur de symétrie externe :

$$\sigma\left((\mathbf{x}_1^{\mathbf{k}_1})^{\odot n_1}\odot\cdots\odot(\mathbf{x}_r^{\mathbf{k}_r})^{\odot n_r}\right):=\underbrace{\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}_1})^{n_1}\cdots\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}_r})^{n_r}}_{\sigma_{\mathrm{int}}}\underbrace{n_1!\cdots n_r!}_{\sigma_{\mathrm{ext}}}$$

- Autre choix présent dans la littérature récente :

$$\widetilde{\sigma}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})=\prod_{a\in A,j\geq -1}(j+1)!^{k_j^a}.$$

Autrement dit, chaque variable x_j a son propre facteur de symétrie $(j+1)!$, et $\widetilde{\sigma}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})$ est le produit des facteurs de symétrie des variables constituant le multi-indice.

- Pour une forêt de multi-indices, on distingue le facteur de symétrie interne du facteur de symétrie externe :

$$\sigma\left((\mathbf{x}_1^{\mathbf{k}_1})^{\odot n_1}\odot\cdots\odot(\mathbf{x}_r^{\mathbf{k}_r})^{\odot n_r}\right):=\underbrace{\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}_1})^{n_1}\cdots\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}_r})^{n_r}}_{\sigma_{\mathrm{int}}}\underbrace{n_1!\cdots n_r!}_{\sigma_{\mathrm{ext}}}$$

- Autre choix présent dans la littérature récente :

$$\widetilde{\sigma}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})=\prod_{a\in A,\,j\geq -1}(j+1)!^{k_j^a}.$$

Autrement dit, chaque variable x_j a son propre facteur de symétrie $(j+1)!$, et $\widetilde{\sigma}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})$ est le produit des facteurs de symétrie des variables constituant le multi-indice.

- Peut-être devrait-on combiner les deux ?

$$\widehat{\sigma}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}):=\widetilde{\sigma}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}).$$

Le couplage

- Pour deux forêts de multi-indices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{M}'$ on pose

$$\langle \mathbb{M}, \mathbb{M}' \rangle := \sigma(\mathbb{M})\delta_{\mathbb{M}}^{\mathbb{M}'},$$

$\mapsto$ identification entre $S\big(\mathrm{N}(A)\big)$ et son dual gradué $\mathcal{H}_{\mathrm{LOT}}^{A}$.

Le couplage

- Pour deux forêts de multi-indices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{M}'$ on pose

$$\langle \mathbb{M}, \mathbb{M}' \rangle := \sigma(\mathbb{M})\delta_{\mathbb{M}}^{\mathbb{M}'},$$

$\mapsto$ identification entre $S\big(\mathrm{N}(A)\big)$ et son dual gradué $\mathcal{H}_{\mathrm{LOT}}^{A}$.

- Moyennant cette identification, ${}^t\Phi = \iota$ avec

$$\iota(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) = \sum_{t,\,\Phi(t)=\mathbf{x}^{\mathbf{k}}} \frac{\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})}{\sigma(t)}\,t.$$

On étend multiplicativement : $\qquad \iota : \mathcal{H}_{\mathrm{LOT}}^{A} \to \mathcal{H}_{\mathrm{BCK}}^{A}.$

Le couplage

- Pour deux forêts de multi-indices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{M}'$ on pose

$$\langle \mathbb{M}, \mathbb{M}' \rangle := \sigma(\mathbb{M})\delta_{\mathbb{M}}^{\mathbb{M}'},$$

$\mapsto$ identification entre $S\big(\mathrm{N}(A)\big)$ et son dual gradué $\mathcal{H}_{\mathrm{LOT}}^{A}$.

- Moyennant cette identification, ${}^t\Phi = \iota$ avec

$$\iota(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) = \sum_{t,\, \Phi(t)=\mathbf{x}^{\mathbf{k}}} \frac{\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})}{\sigma(t)} t.$$

On étend multiplicativement : $\quad \iota : \mathcal{H}_{\mathrm{LOT}}^{A} \to \mathcal{H}_{\mathrm{BCK}}^{A}$.

- ${}^t\partial = \overline{\partial}$ est la seule dérivation qui vérifie $\overline{\partial} x_j^a = x_{j-1}^a$ si $j \geq 0$, et $\overline{\partial} x_{-1}^a = 0$, soit $\overline{\partial} = \sum_{a \in A,\, j \geq 0} x_{j-1}^a \partial_{x_j^a}$.

Coupes admissibles

- Rappel de la formule de Connes-Kreimer pour le coproduit dans $\mathcal{H}^A_{\mathrm{BCK}}$:

$$\Delta(t) = \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t).$$

Coupes admissibles

- Rappel de la formule de Connes-Kreimer pour le coproduit dans $\mathcal{H}^A_{\mathrm{BCK}}$:
$$\Delta(t) = \sum_{c \in \mathrm{Adm}(t)} P^c(t) \otimes R^c(t).$$
- Une coupe admissible $\mathbf{c} \in \mathrm{Adm}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})$ est un choix d'extraction de r monômes $\mathbf{x}^{\mathbf{k}^1}, \ldots \mathbf{x}^{\mathbf{k}^r}$ à partir de $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$, vérifiant $\mathrm{wt}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}^j}) = -1$. On note $\mathbf{x}^{\overline{\mathbf{k}}}$ le reste, de sorte que
$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}^1} \cdots \mathbf{x}^{\mathbf{k}^r} \mathbf{x}^{\overline{\mathbf{k}}}.$$

Coupes admissibles

- Rappel de la formule de Connes-Kreimer pour le coproduit dans $\mathcal{H}^A_{\mathrm{BCK}}$:

$$\Delta(t)=\sum_{c\in\mathrm{Adm}(t)}P^c(t)\otimes R^c(t).$$

- Une coupe admissible $\mathbf{c}\in\mathrm{Adm}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})$ est un choix d'extraction de r monômes $\mathbf{x}^{\mathbf{k}^1},\ldots\mathbf{x}^{\mathbf{k}^r}$ à partir de $\mathbf{x}^{\mathbf{k}}$, vérifiant $\mathrm{wt}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}^j})=-1$. On note $\mathbf{x}^{\overline{\mathbf{k}}}$ le reste, de sorte que

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}}=\mathbf{x}^{\mathbf{k}^1}\cdots\mathbf{x}^{\mathbf{k}^r}\mathbf{x}^{\overline{\mathbf{k}}}.$$

- Le reste $\mathbf{x}^{\overline{\mathbf{k}}}$ est de poids $r-1$. On note

$$P^{\mathbf{c}}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})=\mathbf{x}^{\mathbf{k}^1}\odot\cdots\odot\mathbf{x}^{\mathbf{k}^r},\quad \overline{R}^{\mathbf{c}}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})=\mathbf{x}^{\overline{\mathbf{k}}},\quad R^{\mathbf{c}}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})=\overline{\partial}^r\mathbf{x}^{\overline{\mathbf{k}}}.$$

Théorème (Z. Zhu, X. Gao, DM, 2024)

L'application $\iota : \mathcal{H}^A_{\mathrm{LOT}} \to \mathcal{H}^A_{\mathrm{BCK}}$ est un morphisme injectif d'algèbres de Hopf, où le coproduit dans $\mathcal{H}_{\mathrm{LOT}}$ est donné par

$$\Delta_{\mathrm{LOT}}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) = \sum_{r\geq 0} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^1+\cdots+\mathbf{k}^r+\overline{\mathbf{k}},\, \mathrm{wt}(\mathbf{k}^j)=-1} \frac{\mathbf{k}!}{\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}^1} \odot \cdots \odot \mathbf{x}^{\mathbf{k}^r})\overline{\mathbf{k}}!} \mathbf{x}^{\mathbf{k}^1} \odot \cdots \odot \mathbf{x}^{\mathbf{k}^r} \otimes \overline{\partial}^r \mathbf{x}^{\overline{\mathbf{k}}}$$

Théorème (Z. Zhu, X. Gao, DM, 2024)

L'application $\iota : \mathcal{H}^A_{\mathrm{LOT}} \to \mathcal{H}^A_{\mathrm{BCK}}$ est un morphisme injectif d'algèbres de Hopf, où le coproduit dans $\mathcal{H}_{\mathrm{LOT}}$ est donné par

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{LOT}}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) &= \sum_{r\geq 0}\ \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^1+\cdots+\mathbf{k}^r+\overline{\mathbf{k}},\, \mathrm{wt}(\mathbf{k}^i)=-1} \frac{\mathbf{k}!}{\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}^1}\odot\cdots\odot\mathbf{x}^{\mathbf{k}^r})\overline{\mathbf{k}}!}\mathbf{x}^{\mathbf{k}^1}\odot\cdots\odot\mathbf{x}^{\mathbf{k}^r}\otimes\overline{\partial}^r\mathbf{x}^{\overline{\mathbf{k}}}\\ &= \sum_{\mathbf{c}\in\mathrm{Adm}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})} P^{\mathbf{c}}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})\otimes R^{\mathbf{c}}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}).\end{aligned}$$

Théorème (Z. Zhu, X. Gao, DM, 2024)

L'application $\iota : \mathcal{H}^A_{\mathrm{LOT}} \to \mathcal{H}^A_{\mathrm{BCK}}$ est un morphisme injectif d'algèbres de Hopf, où le coproduit dans $\mathcal{H}_{\mathrm{LOT}}$ est donné par

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{LOT}}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) &= \sum_{r\geq 0} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}^1+\cdots+\mathbf{k}^r+\overline{\mathbf{k}},\, \mathrm{wt}(\mathbf{k}^i)=-1} \\ &\qquad \frac{\mathbf{k}!}{\sigma(\mathbf{x}^{\mathbf{k}^1}\odot\cdots\odot\mathbf{x}^{\mathbf{k}^r})\overline{\mathbf{k}}!}\mathbf{x}^{\mathbf{k}^1}\odot\cdots\odot\mathbf{x}^{\mathbf{k}^r}\otimes\overline{\partial}^r\mathbf{x}^{\overline{\mathbf{k}}} \\ &= \sum_{\mathbf{c}\in\mathrm{Adm}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})} P^{\mathbf{c}}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})\otimes R^{\mathbf{c}}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}).\end{aligned}$$

A comparer avec Y. Bruned, Y. Hou 2024. Voir aussi J.-D. Jacques, L. Zambotti 2023.

Exemple

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{LOT}}(x_{-1}^2x_0x_1) &= x_{-1}^2x_0x_1\otimes\mathbf{1}\\
&+\mathbf{1}\otimes x_{-1}^2x_0x_1\\
&+2x_{-1}\otimes\big(x_{-1}^2x_1+x_{-1}x_0^2\big)\\
&+2x_{-1}x_0\otimes x_{-1}x_0\\
&+x_{-1}^2x_1\otimes x_{-1}\\
&+x_{-1}\odot x_{-1}\otimes\big(3x_{-1}x_0\big)\\
&+2x_{-1}\odot x_{-1}x_0\otimes x_{-1}.
\end{aligned}$$

Merci de votre attention !