Minimisation de l'instabilité pour le Problème des Colocataires

Zacharie Moughanim - 11417

Décembre 2022

1 Définition du problème

Définition 1.0.1. *Une instance I du problème des colocataires est la donnée d'un graphe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des agents et, pour tout $a \in V$, d'une liste de préférence $L(a)$ ordonnant totalement les voisins de a. On note $N(a)$ les voisins de a.*
Pour $\{a, b\} \in E$, on note $r_I(a, b)$ la position de l'agent b dans la liste de a. On note simplement r en l'absence d'ambiguïté.
Soit M un couplage sur I. Pour $a \in V$, on note $M(a)$ l'agent couplé à a.
On appelle paire bloquante *d'un couplage M une arête $\{a, b\} \in E$ tel que $r(a, b) < r(a, M(a))$ et $r(b, a) < r(b, M(b))$. Une paire bloquante correspondant à deux agents se préférant mutuellement à leur partenaire actuel dans M. Un couplage sans paire bloquante est dit* stable.

On définit alors le problème des colocataires avec liste incomplète (SRI) :

* Instance : Une instance du problème des colocataires
* Question : Existe-t-il un couplage stable des agents ?

2 Partition Stable

Le problème de déterminer un certificat concis d'instabilité pour une instance donné du problème des colocataires a été posé pour la première fois dans [2]. Dans cette section, nous allons présenter les résultats que Tan a donné en réponse dans [4] : la définition d'une *permutation stable*, la caractérisation de stabilité donné, et l'existence d'une telle partition pour toute instance.
Dans toute cette partie, on pose I une instance, et n le nombre de ses agents. On calcule les sommes modulo n. Afin de distinguer la relation entre deux agents selon leur sens, on adopte la notation des graphes orientés : on parlera de l'arête (a, b) ou (b, a), tenant compte du sens de l'arête.

Définition 2.0.1. *Une pré-permutation de partie est un cycle $C_A \in \mathfrak{S}_n$ de support A tel que :*

— $|A| = 1$

— *ou* $|A| \geq 2$, $C_A = (a_1\ a_2\ ...\ a_{|A|})$ *et pour tout* $i \in [\![1, |A|]\!]$, a_i *est voisin de* a_{i-1} *et* a_{i+1} *et* $r(a_i, a_{i+1}) \leq r(a_i, a_{i-1})$

Soit C_A une pré-permutation de partie, $a \in A$ et une entrée $(a|b)$, on définit cette entrée par rapport à A de la façon suivante :

- Si $|A| = 1$: (a, b) est une arête *supérieure*
- Si $|A| = 2$:
  - Si $r(a, b) < r(a, C_A^{-1}(a))$, (a, b) est une arête *supérieure*
  - Si $r(a, C_A^{-1}(a)) < r(a, b)$, (a, b) est une arête *inférieure*
  - Si $\{a, b\} = A$, $(a|b)$ est une arête de *partie*
- Si $|A| = 3$:
  - Si $r(a, b) < r(a, C_A^{-1}(a))$, (a, b) est une arête *supérieure*
  - Si $r(a, C_A^{-1}(a)) \leq r(a, b)$, (a, b) est une arête *inférieure*
  - Si $b = C_A^{-1}(a)$ ou $b = C_A(a)$, (a, b) est une arête de *partie*

Définition 2.0.2. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *de décomposition en cycle* $C_1 \circ C_2 \circ ... \circ C_k$, *de support cyclique* $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ *est une* permutation stable *si et seulement si :*

- $\forall i \in [\![1, k]\!]$, C_i *est une pré-permutation de partie*
- $\forall \{a, b\} \in E$, *si* (a, b) *est supérieure, alors* $(b|a)$ *est inférieure.*

Théorème 2.0.1. *Soit I instance du problème des colocataires. I admet au moins une permutation stable, et toute permutation stable contient les mêmes cycles impairs.*

Caractérisation 2.0.1. *Une instance est stable si et seulement si elle dispose d'une permutation stable ne contenant que des cycles de longueur 1 ou de longueur paire.*

Caractérisation 2.0.2. *Une instance est instable si et seulement si elle dispose d'une permutation stable contenant au moins un cycle de longueur impaire supérieure à 3.*

Démonstration. — Soit σ une permutation stable sur une instance I. Soit C un cycle de la décomposition en cycle de σ, de support A. On construit un couplage M.

  - Si $|A| = 1$ on ne couple pas son unique élément
  - Si $|A| = k > 1$, on couple des agents consécutifs dans la permutation, par exemple, avec $a \in A$, on couple les $\sigma^i(a), \sigma^{i+1}(a)$ pour i pair.

  Supposons par l'absurde disposer de $\{a, b\}$ paire bloquante. Supposons $(a|b)$ est supérieure (par symétrie des rôles) et $(b|a)$ inférieure. Or alors b est dans une partie de taille paire et $M(b) = \sigma(b)$ ou $\sigma^{-1}(b)$ donc $r(b, M(b)) \leq r(b, \sigma^{-1}(b)) < r(b, a)$ car $(b|a)$ inférieure.

— Soit M un couplage stable, $\sigma = \prod_{\{a,b\}\in M}(a\ b)$ est une permutation stable par stabilité de M.

□

Démonstration. — Soit I une instance instable, par théorème 3.1.1, I admet une permutation stable, et elle contient au moins un cycle impair car sinon, par caractérisation 3.1.1, I est stable.

— Soit I une instance admettant une permutation stable σ contenant un cycle impair. Supposons par l'absurde disposer d'un couplage stable M. Notons $S_\sigma = \{(a|b) \mid \{a,b\} \in M, (a|b)$ supérieure dans $\sigma\}$ et $I_\sigma = \{(a|b) \mid \{a,b\} \in M, (a|b)$ inférieure dans $\sigma\}$. Par stabilité de σ, $|S_\sigma| \leq |I_\sigma|$.
Soit C cycle de σ et A son support. Pour $a \in A$, si $a, \sigma(a) \in I_\sigma$, $\{a, \sigma(a)\}$ est paire bloquante donc on ne peut pas avoir deux agents consécutifs dans I_σ. Ainsi, $I_\sigma \cap A \leq S_\sigma \cap A$, inégalité stricte si $|A|$ est impair. Comme σ contient au moins un cycle impair, $I_\sigma < S_\sigma$. Absurde.

□

Ainsi, l'instance instable de taille 4 n'est pas instable à cause de l'agent rejeté par tous les autres, mais à cause du 3-cycle que forme les autres agents.

3 Minimisation de l'instabilité

Définition 3.0.1. *Soit I une instance et M un couplage sur I.*
On note $bp_I(M)$ l'ensemble des paires bloquantes du couplage M sur I.
On note $bp(I) = min\{|bp_I(M)| \mid M$ couplage sur $I\}$

On s'intéresse désormais au problème d'optimisation suivant, qui est une généralisation du problème des Colocataires, ainsi qu'à sa variante décisionnelle :
MIN-BP-SR

* Instance : Une liste d'agents et leur listes de préférences
* Solution : Un couplage M sur le graphe sous-jacent des agents
* Optimisation : Minimiser $|bp_I(M)|$

3.1 Difficulté des problèmes à k fixé

L'objectif de cette section est de montrer que la variante décisionnelle de MIN-BP-SR où k est une constante, noté MIN-K-BP, est dans P.

Tout d'abord, on donne quelques propriétés sur les paires bloquantes.

Définition 3.1.1. *Soit I une instance sur $G = (V, E)$ et $H = (V, F)$ un sous-graphe de G. $I_{|H}$ correspond à l'instance sur H où les ordres relatifs des agents donnés par r_I est préservé.*

Lemme 3.1.1. *Soit I et $I_{|H}$ comme précédemment. $M \subset F$ un couplage sur les sommets communs à H et G, $bp_{I_{|H}}(M) = bp_I(M) \cap F$*

Démonstration. — Soit $e = \{a, b\} \in bp_{I_{|H}}(M)$, par définition, $e \in F$. Par définition d'une paire bloquante, $r_J(a, b) < r_J(a, M(a))$ et $r_J(b, a) < r_J(b, M(b))$, or l'ordre étant préservé, $r_I(a, b) < r_I(a, M(a))$ et $r_I(b, a) < r_I(b, M(b))$ donc $e \in bp_I(M)$

— Soit $e = \{a, b\} \in bp_I(M) \cap F$. De même que précédemment, $r_I(a, b) < r_I(a, M(a))$ et $r_I(b, a) < r_I(b, M(b))$ et, puisque $e \in F$ et $M \subset F$, les couples de sommets impliqués sont voisins dans H et par préservation de l'ordre, $r_J(a, b) < r_J(a, M(a))$ et $r_J(b, a) < r_J(b, M(b))$ donc $e \in bp_{I_{|H}}(M)$.

□

Caractérisation 3.1.1. *Soit I une instance sur $G = (V, E)$, $k \leq m = |E|$, $bp(I) \leq k$ si et seulement si il existe $B \subset E$, $|B| = k$ tel que $I_{|(V,E\setminus B)}$ est stable.*

Démonstration. — Supposons que $bp(I) \leq k$. Soit M un couplage réalisant $bp(I) = bp_I(M)$.
Si $k - bp(I) \leq |E \setminus M|$, on pose B un ensemble arbitraire de cardinal k contenant $bp_I(M)$ et des arêtes de $E \setminus M$.
Sinon, on pose $B = E \setminus M$ qu'on complète d'arête quelconque.
On considère l'instance $J = I_{|(V,E\setminus B)}$. Dans le premier cas : $bp_J(M) = bp_I(M) \cap E \setminus bp_M(I) = \emptyset$. Donc J est stable. Dans le second, le graphe sous-jacent de J est biparti, et tous les sommets sont de degré au plus 1, on a un couplage stable trivial.

— Supposons disposer d'un tel ensemble B. Considérons M un couplage stable sur $J = I_{|(V,E\setminus B)}$.
$bp_I(M) = (bp_I(M) \cap B) \cup (bp_I(M) \cap E \setminus B) = (bp_I(M) \cap B) \cup bp_J(M) = bp_I(M) \cap B$. Ainsi, $bp_I(M) \subset B$ donc $bp(I) \leq |bp_M(I)| \leq |B| \leq k$

A noter que dans le cas $k > m$, tout couplage vérifie $|bp_I(M)| \leq k$. □

On donne l'algorithme suivant :

pour chaque $B \subset E, |B| = k$ **faire**
  $I_B \leftarrow I_{|(V,E\setminus B)}$; `// On retire de` I `les arêtes qui vont devenir les potentielles paires bloquantes`
  si IRVING(I_B) *renvoie un couplage* M **alors**
    retourner M ; `//` M `vérifie` $|bp_I(M)| \leq k$
  fin
fin
retourner *Échec*

Algorithme 1: MIN-K-BP

Où IRVING [3] est un algorithme renvoyant un couplage stable sur l'instance en argument sous réserve d'existence, et conclut qu'il n'en existe pas sinon, en $\mathcal{O}(m)$

Démonstration. Complexité :
La boucle **pour** itère $\binom{m}{k} = \mathcal{O}(m^k)$ fois.
Le corps de la boucle ne contient que des opérations en $\mathcal{O}(1)$ et l'algorithme

d'Irving en $\mathcal{O}(m)$. Au total : $\mathcal{O}(m^{k+1})$, polynomiale en la taille de l'instance m.
Correction :
La caractérisation 4.2.1 assure la correction de l'algorithme. □

3.2 Bornes de bp(I)

3.2.1 En fonction de m

Théorème 3.2.1. *Soit σ une permutation stable sur I, $\mathcal{C}$ l'ensemble des cycles impairs de longueur $k \geq 3$, pour C un cycle dans $\mathcal{C}$, A_C son support.* $\lceil \frac{\mathcal{C}}{2} \rceil \leq bp(I) \leq \sum_{C \in \mathcal{C}} d_C - 1$
Où $d_C = min\{deg(v) \mid v \in A_C\}$ *[1]*
Amélioration : $bp(I) \leq \sum_{C \in \mathcal{C}} min\{deg(a) - r(a, C(a)) \mid a \in A_C\} - 1 \leq \frac{m}{3}$

Démonstration. Soit I une instance et une permutation stable associée. Soit M un couplage tel que :

- Les agents dans un cycle paire sont couplés comme dans la démonstration de 2.0.2
- Les agents dans un cycle impaire sont couplés de même, à l'exception d'un agent a_0 réalisant $min\{deg(v) \mid v \in A_C\}$, c'est à dire avec le moins d'agent b tels que (a_0, b) est inférieure

Soit $\{a, b\}$ paire bloquante.

- En supposant que a est couplé (ou b, quitte à permuter), par définition (b, a) est inférieure donc b n'est pas couplé.
- Si a et b sont non couplés, alors si (a, b) est supérieure, (b, a) est inférieure

Ainsi, il y a moins de paire bloquante que de paire (a, b) tels que a est non couplé et (a, b) est inférieure, d'où le résultat.
Alors, □

On peut donner par exemple cette instance :

1	3	2
2	1	3
3	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
3n+1	3n+3	3n+2
3n+2	3n+1	3n+3
3n+3	3n+2	3n+1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

TABLE 1 – L'instance I_n^c

Théorème 3.2.2 (Réponse au premier problème ouvert de [1])**.** *Il n'existe pas d'algorithme d'approximation de* MIN-BP-SR *garantissant* $|bp_M(I)| = o(m)$.

Démonstration. Ce résultat est obtenu en considérant une suite d'instances dont : (Un exemple est donné en figure 1)

— Le cardinal tend vers l'infini

— Le nombre de parties impaires tend vers l'infini

— La taille des parties impaires est bornée

□

3.2.2 En fonction de n

Il n'existe pas de borne non triviale dépendant uniquement de n pour $bp(I)$. Dans cette sous-section, on cherche empiriquement des instances maximisant $bp(I)$ à I fixé.

Définition 3.2.1. *On définit l'instance J^c_{2n+1} de cardinal $2n+1$ (représenté en figure 2) décrite par ligne : où le classement de l'agent i est :*
$\big(\sigma^n(i) \quad \sigma^{n-1}(i) \quad ... \quad \sigma(i) \quad \sigma^{-1}(i) \quad ... \quad \sigma^{-n-1}(i) \quad \sigma^{-n}(i)\big)$

1	n	$n-1$	$n-2$	...	3	**2**	$\mathbf{2n{+}1}$	$2n$	...	$n+2$	$n+1$
2	$n+1$	n	$n-1$	...	4	**3**	**1**	$2n+1$	...	$n+3$	$n+2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2n+1$	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...	2	**1**	$\mathbf{2n}$	$2n-1$	...	$n+1$	n

TABLE 2 – L'instance J^c_{2n+1}

Théorème 3.2.3. $bp(J^c_{2n+1}) = n$

Démonstration. Soit M couplage sur J^c_{2n+1}.
Quitte à rajouter des couples, ce qui ne peut augmenter les paires bloquantes du couplage, on suppose que $|M| = n$. On pose i_0 l'unique agent non couplé.
Par définition de l'instance, il existe n entrées supérieure de cette instance de la forme $(a|i_0)$. De plus, il y a n agents a dont $(a|M(a))$ est inférieure. Ainsi, $\{\{i_0, a\} \mid (a|M(a)) \text{ inférieure}\} \subset bp_{J^c_{2n+1}}(M)$ et
$n \leq |\{\{i_0, a\} \mid (a|M(a)) \text{ inférieure}\}|$ donc en passant au minimum, $n \leq bp(J^c_{2n+1})$
De plus, un couplage de la forme $M = \{\{i, \sigma(i)\} \mid i \in [\![1, 2n+1]\!], i \text{ pair}\}$ vérifie $|bp_I(M)| = n$. Donc $bp(I) \leq |bp_I(M)| = n$ □

On peut alors au donner une minoration de la borne supérieure des paires bloquantes à n fixé : $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq sup_{I \text{ sur } G=(V,E),|V|=n} bp(I)$

Références

[1] Péter Biró David J. Abraham et David F. Manlove. “"Almost Stable" Matchings in the Roommates Problem”. In : *Lecture Notes in Computer Science* (2005).

[2] Dan Gusfield et Robert W. Irving. *The Stable Marriage Problem : Structure and Algorithms*, p. 221.

[3] Robert W. Irving. “An Efficient Algorithm for the "Stable Roommates" Problem”. In : *Journal of Algorithms* (1985).

[4] Jimmy J. M. Tan. “A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of a Complete Stable Matching”. In : *Journal of Algorithms* (1991).